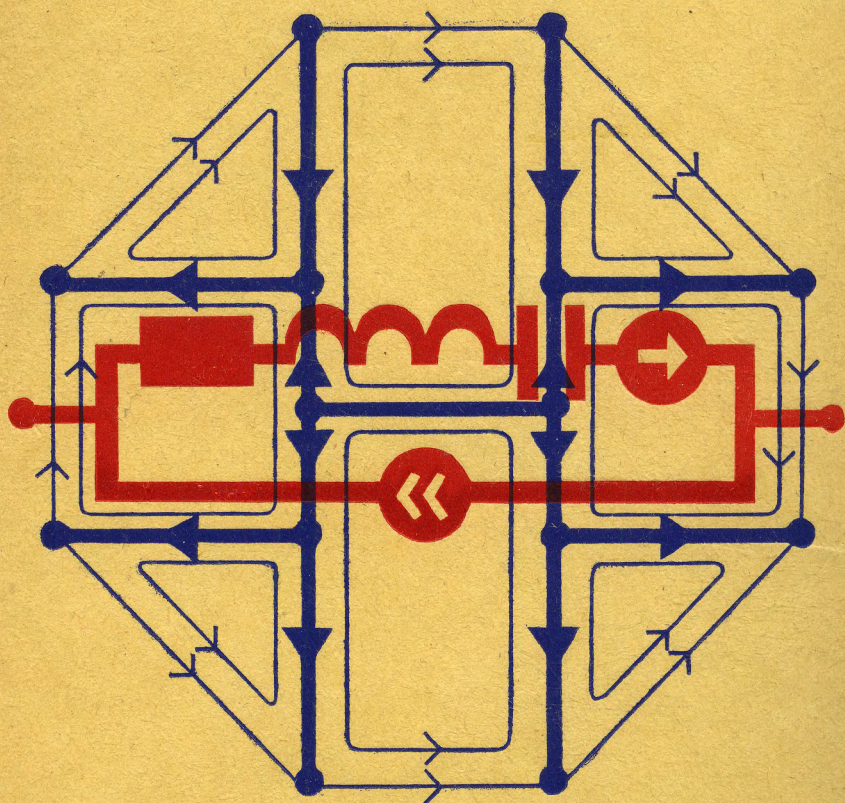
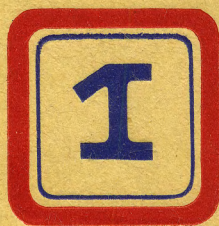


ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ



ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Том I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Под редакцией проф. П. А. Ионкина

**ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ**

**Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов электротехнических
специальностей втузов**



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1976

6П2. 1

Т 11

УДК 621. 3 (075. 8)

Рецензент: докт. техн. наук, проф. Н. Г. Максимович
(Львовский государственный университет)

*Ионкин Петр Афанасьевич, Даревский Александр Иосифович,
Кухаркин Евгений Степанович, Миронов Владимир Георгиевич,*

Мельников Николай Александрович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Т о м I.

Основы теории линейных цепей

Под ред. проф. П. А. Ионкина

Редактор Е. М. Романчук. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. И. Кострикова.

Т-02838. Сдано в набор 13/Х-75 г. Подп. к печати 6/II-76 г. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 3. Объем 34 печ. л. Усл. п. л. 34. Уч.-изд. л. 32,21. Изд. № ЭР-193. Тираж 70 000 экз.
Цена, 1 р. 23 к. Зак. 208

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1976 г.
Позиция № 129

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14, Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26,

Т 11 Теоретические основы электротехники. Т. I. Основы теории линейных цепей. Под ред. П. А. Ионкина. Учебник для электротехн. вузов. Изд. 2-е, переработ. и доп. М., «Выш. школа», 1976.

544 с. с ил.

На обороте тит. л. авт.: П. А. Ионкин, А. И. Даревский, Е. С. Кухаркин и др.

Первый том книги подвергся существенной переработке, необходимой для приближения содержания курса к современной практике расчета и проектирования электротехнических устройств. Изложение основных законов и методов расчета цепей ведется с использованием матриц, топологических понятий и графов.

Т $\frac{30306-135}{001(01)-76}$ 129-76

6П2.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последних десяти лет произошли значительные изменения в содержании как специальных электротехнических, так и общенаучных дисциплин, что в свою очередь привело к заметному изменению программы курса «Теоретические основы электротехники». В связи с этим авторы нашли целесообразным внести некоторые изменения не только в содержание предлагаемого учебника, но и в методику изложения отдельных вопросов, глав и даже разделов курса.

Для удобства читателей учебник разделен на два тома. Материал первого тома «Основы теории линейных цепей» охватывает примерно $\frac{2}{3}$ программы курса ТОЭ. Материал второго тома «Основы теории нелинейных цепей»; «Основы теории электромагнитного поля» соответствует остальной части программы того же курса.

Наиболее существенной переработке подверглись разделы учебника, в которых рассматриваются основы теории цепей; это вызвано значительным расширением применения в специальных и базовых дисциплинах вычислительной техники.

Изложение основных законов и методов расчета цепей ведется преимущественно с использованием матриц, топологических понятий и графов, широко применяемых для расчетов на ЭВМ, и базируется на знаниях, полученных студентами в курсах математики и физики. Первый раздел «Основные понятия и соотношения для электромагнитных полей и электрических цепей», имевшийся в предыдущем издании учебника, исключен. Отдельные наиболее существенные вопросы из этого раздела излагаются непосредственно в тех главах, в которых они получают дальнейшее теоретическое применение.

Изложение основ теории цепей начинается с элементов и основных топологических свойств электрических цепей и схем; вводятся понятия графов и подграфов, рассматриваются топологические матрицы графа, некоторые свойства топологических матриц, свойство дуальности. Во втором разделе излагаются основные свойства и методы расчета линейных цепей с источниками постоянных напряжений и токов. Здесь в отличие от первого издания изложение начинается с классического метода анализа переходных

и установившихся процессов в простейших цепях (гл. 3) и только после этого подробно рассматриваются методы анализа установившихся процессов и основные свойства электрических цепей произвольной конфигурации при постоянных напряжениях и токах.

В третьем (основном) разделе теории линейных электрических цепей рассматриваются свойства и методы расчета электрических цепей с источниками гармонических напряжений и токов одинаковой частоты. Здесь изложение начинается также с классического метода анализа переходных и установившихся процессов в простейших цепях (гл. 6). Затем рассматриваются методы анализа установившихся процессов в цепях с двухполюсными элементами без взаимной индукции, включая топологические методы анализа и применение сигнальных (направленных) графов.

В главу об анализе процессов в цепях с взаимной индукцией включены вопросы анализа схем с электронными невзаимными элементами.

Глава о многофазных цепях сокращена за счет уменьшения объема материала, связанного с методом симметричных составляющих.

Четырехполюсники и многополюсники в отличие от предыдущего издания изложены полностью в разделе о синусоидальных токах и напряжениях. В этот же раздел включены вопросы о характеристических сопротивлениях и коэффициенте передачи четырехполюсника, а также графы четырехполюсников и их применение для определения результирующих коэффициентов при простейших схемах соединения четырехполюсников. Расширена глава об электрических фильтрах, в которой, кроме фильтров типа k , изложены основные свойства фильтров типа m и безындукционных фильтров.

В разделе о переходных процессах в линейных цепях, кроме классического, операторного и частотного методов, изложены основные положения и показано применение метода переменных состояния. В главе о переходных процессах в цепях с распределенными параметрами рассмотрены волновые процессы при формировании импульсов, а также переходные процессы, протекающие в линии без искажения и в кабеле без индуктивности и утечки.

Шестой раздел посвящен элементам синтеза линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами. В нем рассмотрены свойства функций электрических цепей, а также даны основы синтеза двухполюсных и четырехполюсных схем.

Процессы в нелинейных цепях изложены в седьмом и восьмом разделах.

В седьмом разделе рассмотрены основные свойства и методы расчета нелинейных электрических и магнитных цепей при постоянных токах и напряжениях; особенности режимов, основные методы расчета нелинейных цепей при переменных токах и напряжениях; кроме того, проведен анализ установившихся процессов в цепях-переменного тока с различными нелинейными элементами.

В восьмом разделе изложены методы анализа переходных процессов в нелинейных цепях и элементы теории автоколебаний.

Изложение основ теории электромагнитного поля начинается в отличие от предыдущего издания с формулировки основных уравнений электромагнитного поля. Последующие главы помимо вопросов, предусмотренных программой курса, содержат решение задач Сирла для цилиндрической поверхности раздела двух сред, а также применение теории комплексного потенциала для расчета полей на основе формулы Келдыша — Седова. Кроме того, рассмотрены приближенный расчет поверхностного эффекта и эффекта близости, а также плоские волны в гиромангнитных средах.

Из новых вопросов теории поля можно отметить:

- а) применение метода интегральных уравнений для расчета электростатических и магнитных стационарных полей;
- б) приближенные методы расчета и моделирование полей (метод сеток, аналоговый метод и др.);
- в) излучение квантовых генераторов (квантовый осциллятор, индуцированное излучение, квантовые переходы и т. п.);
- г) электромагнитное поле в магнитодиэлектриках;
- д) электромагнитные явления в движущейся среде.

Многие разделы курса снабжены примерами, содержание которых органически увязано с излагаемым текстом.

Работа по написанию и переработке учебника распределена между авторами следующим образом: гл. 1—9, 15, 16, 18, 19, приложение I написаны проф. П. А. Ионкиным и доц. В. Г. Мироновым; гл. 10—14, 20, в первом издании написанные проф. П. А. Ионкиным и проф. Н. А. Мельниковым, во втором издании переработаны проф. П. А. Ионкиным и доц. В. Г. Мироновым; гл. 21—24 написаны проф. П. А. Ионкиным, доц. В. Г. Мироновым и доц. Г. Г. Гусевым; гл. 17, 28 (кроме § 28.7), 30 (кроме § 30.1), 35 (кроме § 35.1, 35.4), § 27.15, 27.16, 29.19, 32.5, 33.5, приложение II — доц. Е. С. Кухаркиным; гл. 25, 26, 27 (кроме § 27.15, 27.16), 29 (кроме § 29.19), 31, 32 (кроме § 32.5), 33 (кроме § 33.5), 34, § 28.7,

30.1, 35.1, 35.4 — доц. А. И. Даревским; введение к теории поля — доц. Е. С. Кухаркиным и доц. А. И. Даревским; предисловие и введение к учебнику — проф. П. А. Ионкиным, доц. Е. С. Кухаркиным и доц. В. Г. Мироновым.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность официальному рецензенту проф. Н. Г. Максимовичу и доц. Л. А. Синицкому, внимательно просмотревшим рукопись второго издания учебника и сделавшим ряд ценных замечаний.

Все пожелания, замечания и отзывы о книге просьба направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14. Издательство «Высшая школа».

Авторы

В Программе КПСС указано, что электрификация, являющаяся одним из стержней строительства экономики коммунистического общества, играет ведущую роль в развитии всех отраслей народного хозяйства, в осуществлении современного научно-технического прогресса. Одновременно со значительным ростом мощностей электростанций в настоящее время строятся десятки тысяч километров высоковольтных магистральных и распределительных сетей во всех районах страны. По мере удешевления производства атомной энергии развертывается строительство атомных электростанций.

Все большее место в технологии производства занимают электроника, полупроводниковая техника и ультразвук. Автоматизация уже сейчас связана с широким применением кибернетики, электронных вычислительных и управляющих устройств в производственных процессах промышленности, строительной индустрии и транспорта, в научных исследованиях, в плановых и проектно-конструкторских расчетах и особенно в сфере учета и управления.

Одной из важных задач коммунистического строительства, решаемых в настоящее время, является электрификация сельского хозяйства. Только на базе электричества оказалось возможным широкое развитие новейших научно-технических направлений в автоматике, телемеханике и радиоэлектронике, которые привели к покорению космоса, разработке и применению нескольких поколений вычислительных машин, возникновению и быстрому развитию кибернетики.

Трудно представить жизнь современного человека без таких важных проводников культуры, как электрическое освещение, кино, радио, телевидение и т. д.

Широкое и разнообразное использование электрической энергии объясняется тем, что она имеет огромные преимущества перед другими формами энергии. Электрическая энергия сравнительно просто получается (из других форм энергии), передается на различные расстояния и преобразуется в другие формы энергии. Она может существовать в самых различных количествах и использоваться достаточно экономично. Всем известны такие устройства, как, например, электрические лампы, электрические двигатели, электрические печи, электронагревательные приборы, электромагниты и т. п. Электрической энергией могут приводиться в действие как самые тонкие хирургические инструменты, так и самые мощные прокатные станы (блуминги). Поэтому электрическая форма энергии до сего времени является незаменимой для народного хозяйства.

Электромагнитные явления очень своеобразны, в большинстве случаев их нельзя наблюдать непосредственно (без специальных приборов). Обычно они протекают весьма быстро и связаны с рядом

сопутствующих явлений; однако, изучив свойства электромагнитных явлений, ими можно сравнительно просто управлять.

Процессы, протекающие в различных электромагнитных устройствах, всегда зависят от свойств среды, в которой они наблюдаются и исследуются.

Первые представления о свойствах среды вблизи заряженных тел сложились еще в глубокой древности, когда люди заметили, что натертый янтарь вызывает движение мелких предметов без непосредственного соприкосновения с ними (на расстоянии). Позже было обнаружено, что подобные явления имеют место и при отсутствии между взаимодействующими зарядами вещества в какой бы то ни было форме. На этой почве возникло представление, что телам присуще свойство действовать на другие тела на расстоянии, без участия промежуточных тел или сред и притом практически мгновенно. Теория дальнего действия, или действия на расстоянии, открывала широкие возможности для мистических домыслов о природе действующих сил и с самого начала была принята на вооружение философами-идеалистами. Против теории дальнего действия решительно выступали не только философы-материалисты, но и ученые-естествоиспытатели. В частности, заслуга в объяснении электромагнитных явлений на основе материалистической теории близкого действия принадлежит М. В. Ломоносову. Согласно этой теории, силовые взаимодействия между телами могут передаваться только при наличии какой-нибудь среды, окружающей тела, с конечной скоростью. Значительным шагом в утверждении материалистических взглядов на электромагнитное поле явились работы Фарадея и Максвелла. Попыткам дать трактовку электрических и магнитных явлений с помощью таинственных невесомых веществ они противопоставили объяснение этих явлений деформациями и пертурбациями в среде, заполняющей все межзвездное пространство и называемой эфиром. Силовым линиям они придавали физическое значение как линиям, показывающим направления натяжений и перпендикулярным к направлениям-сжатий эфира. Однако на этой основе стройной теории, пригодной для объяснения одновременно всех явлений в электромагнитном поле, создать не удалось. И это было не случайно, так как электромагнитное поле качественно отличается от механического движения. Бесплодность попыток свести электромагнитное движение к механическому стала очевидной после опытов Физо, Майкельсона и Марлея, показавших независимость скорости света от скорости движущихся тел. Дальнейшее развитие электромагнитной теории Лоренц мог осуществить только отказавшись от попыток найти какую-либо механическую модель поля. Это дало повод многим ученым, не имевшим представления о диалектическом материализме, утверждать, что «материя исчезает; остаются одни уравнения» или что «поле — это движение без материи». В борьбе против попыток сделать идеалистические выводы из развития физики выдающаяся роль принадлежит В. И. Ленину. В работе «Материализм и эмпириокритицизм» он дал принципиальное философское толкование этой проблемы, указав, что, поскольку бесспорно

установленной является объективность существования электромагнитного поля, электромагнитное поле следует считать одним из видов материи «...единственное «свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство быть объективной реальностью, существовать вне нашего сознания» *.

Величины, характеризующие электромагнитные явления в различных электротехнических устройствах, обычно с большой степенью точности можно рассчитать заранее, в процессе наблюдения — измерить и зарегистрировать, а при желании и смоделировать. При этом расчет и проектирование, монтаж и эксплуатация электротехнических установок, как правило, требуют весьма квалифицированного персонала.

Электротехникой в широком смысле слова называется обширная область практического применения электромагнитных явлений.

Много открытий и изобретений наряду с иностранными учеными сделали русские ученые и инженеры, положившие начало важнейшим отраслям электротехники.

М. В. Ломоносов кроме обоснования теории близкодействия создал оригинальную теорию атмосферного электричества, открыл закон сохранения массы и движения. После изобретения А. Вольтом гальванического столба появилась возможность получать электрический ток. Исследуя явления в электрической цепи, В. В. Петров открыл (1802 г.) электрическую дугу и указал на возможность практического применения ее для освещения, плавки и сварки металлов.

Важную роль в развитии учения об электромагнитных явлениях сыграл английский ученый М. Фарадей, открывший в 1831 г. закон электромагнитной индукции.

В 1832 г. П. Л. Шиллингом был построен первый в мире электромагнитный телеграф.

В 1833 г. русский академик Э. Х. Ленц открыл закон, устанавливающий связь между направлениями индукционных токов и их электромагнитными и электродинамическими взаимодействиями. В частности, им был установлен принцип электромагнитной инерции. В 1844 г. он независимо от Д. Джоуля установил, что количество тепла, выделяющегося в проводнике при прохождении тока, прямо пропорционально сопротивлению проводника и квадрату тока.

В 1845 г. немецким физиком Г. Кирхгофом были сформулированы основные законы для разветвленных электрических цепей, имеющие огромное значение для развития теоретической и практической электротехники.

Изобретенная русским ученым П. Н. Яблочковым электрическая свеча положила начало электрическому освещению. Первая лампа накаливания с угольным стерженьком была создана русским инженером А. Н. Лодыгиным.

* В. И. Ленин. Собр. соч., изд. 5-е, т. 18, стр. 275.

Из других русских ученых второй половины XIX столетия необходимо отметить А. Г. Столетова, впервые подробно исследовавшего магнитные свойства железа, и Н. А. Умова, заложившего основы для вывода уравнений движения электромагнитной энергии в телах.

Таким образом, за период с 1800 по 1880 г. в тесной связи с развитием прикладной электротехники и, в частности, с телеграфией, гальванопластикой и техникой электрического освещения развивалась теория цепей постоянного тока. За этот период были установлены основные понятия теории электрических цепей и созданы первые методы их расчета.

Начало применению переменного тока положил в 1876 г. П. Н. Яблочков. Переменный ток обеспечивал равномерность сгорания углей в его свече и давал возможность легко осуществлять питание многих ламп от одного источника электрической энергии.

Расширение потребления электрической энергии выдвинуло проблему передачи ее на значительные расстояния. Для решения этой проблемы требовалось применение различных напряжений для передачи и распределения электрической энергии. Эта задача легко разрешалась для переменного тока путем применения трансформаторов, изобретенных также П. Н. Яблочковым.

Переменный ток получил всеобщее признание и широчайшее использование в электроэнергетике благодаря изобретениям русского инженера и ученого М. О. Доливо-Добровольского. Им была разработана трехфазная система, получившая повсеместное распространение. В 1889 г. он построил первый трехфазный двигатель, разработал все остальные звенья трехфазной цепи и в 1891 г. осуществил передачу электрической энергии трехфазным током на расстояние 175 км. Применение переменного тока требовало решения многих вопросов и послужило основанием для разработки целой области теоретических основ электротехники — теории переменных токов. Особенно значительным в развитии этой теории было введение крупным электротехником Ч. П. Штейнцем метода комплексных величин для расчетов цепей.

Наряду с необходимостью решения теоретических задач, относящихся к электрическим и магнитным цепям, практическая электротехника выдвинула задачи по расчету электромагнитных полей. Конструирование электрических машин и электромагнитных аппаратов требовало расчета магнитных полей. Создание надежной изоляции токоведущих частей приводило к необходимости расчета электрических полей.

В 1873 г. английский ученый Д. Максвелл в классическом труде «Трактат о электричестве и магнетизме» изложил в математической форме основы теории электромагнитного поля, представляющей собой, как было отмечено, расширение и дальнейшее развитие идей М. Фарадея о физической реальности электромагнитного поля. Экспериментальное подтверждение и развитие теории электромагнитного поля, разработанной Д. Максвеллом, было осуществлено немецким физиком Г. Герцем в 1887—1889 гг. в его опытах по полу-

чению и распространению электромагнитных волн, а также русским физиком П. Н. Лебедевым, доказавшим давление световых волн.

В 1895 г. А. С. Попов изобрел радиосвязь, открывшую новую эру в культурной жизни человечества. Развитие радио послужило мощным толчком к разработке как теории электрических цепей, так и теории электромагнитного поля. В 1904 г. в Петербургском политехническом институте проф. В. Ф. Миткевич начал читать курс «Теория электрических и магнитных явлений», а в 1905 г. в Московском высшем техническом училище проф. К. А. Круг — курс «Теория переменных токов», который был издан в 1906 г. Первой книгой в России, в значительной мере охватывающей весь комплекс вопросов теоретических основ электротехники, была изданная в 1916 г. книга К. А. Круга «Основы электротехники».

Следовательно, в развитии электротехники можно отметить второй этап (1880—1917), характеризующийся формированием самостоятельной дисциплины «Теоретические основы электротехники».

Следует иметь в виду, что при расчетах многих электротехнических установок встречаются весьма большие трудности, связанные с необходимостью идеализации задач в процессе их математической постановки. Такая идеализация может быть выполнена только на основе определенного опыта, уже имеющихся методов расчета и некоторых допущений, для которых подчас требуется дополнительная экспериментальная проверка. Это особенно важно, так как практически наиболее желательны простые методы расчета.

Возможны два принципиально различных подхода к решению электротехнических задач и рассмотрению электромагнитных явлений: 1) с использованием интегральных величин, характеризующих работу устройства в целом; 2) с применением дифференциальных понятий, характеризующих состояние того или иного материала в разных местах устройства. Так например, расчет электрической цепи, в которую включены различные приемники электрической энергии (лампы, двигатели), может заключаться в определении токов в проводах и напряжений на зажимах приемников, а расчет изолирующей конструкции — в определении напряженности электрического поля в отдельных местах диэлектрика. Первому аспекту задачи отвечает теория цепей; второму — теория электромагнитного поля. Иногда для одной и той же установки приходится решать задачи обоими методами. Физически более общей и детальной является задача, формулируемая в теории электромагнитного поля. Однако, как правило, ее можно решить только в отдельных частных случаях. Кроме того, постановка такой задачи нередко не является необходимой, так как, во-первых, изучаемое явление во всех деталях можно не рассматривать и, во-вторых, оно достаточно полно характеризуется задачей, формулируемой в теории цепей.

В основе теории цепей лежат законы Ома и Кирхгофа, в простейшем виде известные из курса физики, в основе теории электромагнитного поля — уравнения Максвелла, дающие математическую формулировку электромагнитных процессов в пространстве. Основ-

ной математический аппарат, используемый в этих разделах электротехники, различный. Если в теории цепей используется система алгебраических (при рассмотрении установившихся режимов) или дифференциальных (при рассмотрении переходных процессов) уравнений, то в теории электромагнитного поля — уравнения математической физики, т. е. дифференциальные уравнения в частных производных. Известны случаи, когда решения задач электротехники приводили к необходимости дальнейшего развития математических методов (функции комплексного переменного, операционное исчисление, теория информации и т. д.).

В течение последних десятилетий теоретические основы электротехники получили дальнейшее развитие не только в пределах того же курса, но и в ряде специальных дисциплин, таких, как «Основы теории связи», «Основы радиотехники», «Теория электрических машин», «Теория электрических сетей» и др. В специальных дисциплинах задачи теоретической электротехники рассматриваются применительно к конкретным установкам. В теоретических основах электротехники они имеют самую общую постановку, без деталей, требующих специальной подготовки.

Таким образом, курс теоретических основ электротехники является базовым для всех специальных электротехнических дисциплин.

Качественные и количественные стороны исследуемых электромагнитных явлений и процессов находятся в неразрывной связи. Поэтому изучение курса теоретических основ электротехники в высшей школе, как было отмечено, основывается на знаниях, полученных из курсов физики и математики. Эти знания в курсе теоретических основ электротехники расширяются и развиваются в направлении разработки методов анализа, расчета и экспериментального исследования явлений и процессов, протекающих в электрических и магнитных цепях и в электромагнитных полях.

Как при исследовании физических процессов в цепях, так и при изучении электромагнитных полей единственным научным методом познания является диалектический метод: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» *.

Следует отметить, что по мере дальнейшего развития техники каждый инженер в процессе творческой деятельности может встретиться со многими новыми задачами, не отраженными в данном курсе. Поэтому необходимо стремиться к тому, чтобы при изучении материала курса получить наибольшую самостоятельность в решении практических задач. В курсе теоретических основ электротехники рассмотрены решения лишь типовых задач, систематизированных на основе имеющегося опыта. За истекший период указанный курс неоднократно дополнялся и, несомненно, будет дополняться в дальнейшем новыми задачами и теориями.

* В. И. Ленин. Собр. соч., изд. 5-е, т. 29, стр. 152, 153.

**ЭЛЕМЕНТЫ И ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

ГЛАВА 1

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ И ЕЕ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 1.1. Классификация электрических цепей и их элементов

Электрической цепью называют совокупность устройств и объектов, предназначенных для распределения, взаимного преобразования и передачи электрической и других видов энергии и (или) информации. Свое назначение цепь выполняет при наличии в ней электрического тока. Электромагнитные процессы в цепи и ее параметры могут быть описаны с помощью известных из курса физики интегральных понятий: ток, напряжение (разность потенциалов), заряд, магнитный поток, электродвижущая сила, сопротивление, индуктивность, взаимная индуктивность и емкость.

В отличие от электрической цепи электромагнитные процессы в ряде электротехнических устройств характеризуются дифференциальными понятиями: вектор напряженности электрического поля и вектор электрического смещения, вектор напряженности магнитного поля и вектор магнитной индукции, плотность заряда и вектор плотности тока, удельная электрическая проводимость и др. Анализ устройств, процессы в которых описываются с помощью дифференциальных понятий, рассматривают в теории электромагнитного поля.

Следует отметить, что именно в теории поля дается определение интегральных понятий (таких, как ток и напряжение), характеризующих электрическую цепь. Расчет параметров цепи (сопротивлений, индуктивностей, емкостей) в общем случае также возможен только с помощью понятий, используемых в теории поля.

В некоторых случаях одно и то же устройство можно анализировать и методами теории цепей, и методами теории поля. Например, линия передачи электрической энергии может рассматриваться как цепь с распределенными параметрами или как направляющая система для электромагнитного поля. Выбор того или иного метода зависит от конкретных целей анализа, необходимой точности и других факторов.

Электрическая цепь состоит из отдельных частей (объектов), выполняющих определенные функции и называемых элементами цепи.

Основными элементами цепи являются источники и приемники электрической энергии (сигналов).

Источники энергии (сигналов), такие, как электромеханические или электронные генераторы, аккумуляторы, гальванические элементы, термодатчики и т. д., предназначены для преобразования различных видов энергии в электрическую энергию.

Приемники энергии (сигналов) служат для преобразования электрической энергии в другие виды энергии. К ним относятся электрические двигатели, нагревательные приборы, электрические лампы, электронно-лучевые трубки, динамические громкоговорители и др.

Кроме основных элементов, цепь содержит различные вспомогательные элементы, которые связывают источники с приемниками (соединительные провода, линии передачи), подавляют или усиливают определенные составляющие сигналов (фильтры, усилители), изменяют уровень напряжения и тока в других частях цепи (трансформаторы), улучшают или изменяют характеристики и параметры участков цепи и ее элементов (корректирующие устройства, фазовые звенья) и т. п.

По назначению различают цепи *для передачи и преобразования электрической энергии* (цепи, применяемые в электроэнергетике) и *цепи для передачи и преобразования информации* (цепи в технике связи, радиотехнические цепи, цепи устройств автоматики и телемеханики и т. д.).

Цепи можно классифицировать по типу элементов, из которых они состоят, например, резистивные цепи — цепи, состоящие из резисторов и источников энергии, электронные цепи — цепи, содержащие электронные лампы и транзисторы, и т. д.

У каждого элемента цепи можно выделить определенное число зажимов (полюсов, выводов), с помощью которых он соединяется с другими элементами.

Различают *двухполюсные* и *многополюсные* (трехполюсные, четырехполюсные и т. д.) элементы цепи. Двухполюсные элементы имеют два зажима; к ним относятся источники энергии (за исключением многофазных и управляемых источников), резисторы, конденсаторы, индуктивные катушки.

Наиболее распространенные трехполюсные элементы — это электронные лампы (вакуумные триоды) и транзисторы (полупроводниковые триоды).

Примерами четырехполюсных элементов могут служить трансформаторы (двухобмоточные), индуктивные катушки с подмагничиванием (дрессели с подмагничиванием), интегральные операционные усилители.

Элементы цепи, имеющие более четырех зажимов, также находят применение (например, многообмоточные трансформаторы, различные микромодули — твердотельные компоненты электронных схем, многоэлектродные электронные лампы). Различают *активные* и *пассивные* элементы цепи. К активным элементам относятся источники энергии. Часто активными элементами называют также электронные лампы, транзисторы, операционные усилители, которые способны усиливать электрические сигналы. К пассивным

относят элементы, в которых рассеивается и (или) накапливается энергия (резисторы, индуктивные катушки, конденсаторы, трансформаторы).

Реальные элементы цепи могут быть описаны алгебраическими или дифференциальными уравнениями, связывающими напряжения и токи на зажимах этих элементов. Такое описание может быть сделано с определенной степенью точности при идеализации физических процессов в элементах; второстепенные с определенной точки зрения процессы при этом не учитываются.

Если элемент цепи характеризуется линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями (при упомянутой ранее идеализации), то его называют *линейным*. Коэффициенты, связывающие напряжения и токи и их производные, представляют собой *параметры* элемента. Параметры линейного элемента могут быть постоянными (стационарный элемент) или могут изменяться в зависимости от времени по какому-либо закону (нестационарный, параметрический элемент).

Если элемент цепи описывается нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями, то он называется *нелинейным*. Нелинейные элементы могут быть также параметрическими.

Во многих случаях параметры элемента рассматриваются как *сосредоточенные* (элемент с сосредоточенными параметрами); при этом напряжения и токи на зажимах элемента не являются функциями пространственных координат, определяющих геометрические размеры элемента. Параметры элемента могут быть также *распределенными* (элемент с распределенными параметрами); такой элемент характеризуется уравнениями, в которых напряжения и токи зависят от пространственных координат. В качестве примеров элементов с распределенными параметрами можно назвать линии передачи энергии и информации, многослойные пленочные резистивно-емкостные микроструктуры.

Элементы электрической цепи могут удовлетворять или не удовлетворять принципу взаимности *. В соответствии с этим различают взаимные и невзаимные элементы. Примеры взаимных элементов — резисторы, индуктивные катушки, конденсаторы, трансформаторы; к невзаимным элементам относятся электронные лампы, транзисторы и др.

Цепи, содержащие только линейные элементы, называют *линейными* и цепями. Основное свойство таких цепей — применимость принципа наложения, заключающегося в том, что *результатирующая реакция линейной цепи на несколько приложенных одновременно возмущений равна сумме реакций, обусловленных каждым возмущением в отдельности*.

Если цепь содержит один или несколько параметрических элементов, то ее называют *параметрической* (нестационарной).

* Упрощенно принцип взаимности состоит в следующем: реакция цепи на участке 1 от возмущения на участке 2 равна реакции на участке 2 от такого же возмущения на участке 1. Математическая формулировка этого принципа и его иллюстрации даны ниже.

Аналогично, если цепь содержит один или более нелинейных элементов, то ее называют **нелинейной**. Для нелинейной цепи в общем случае неприменим принцип наложения.

Цепь, содержащую элементы с сосредоточенными параметрами, называют **цепью с сосредоточенными параметрами**. Цепь, содержащую элементы с распределенными параметрами, называют **цепью с распределенными параметрами**.

Строго говоря, любая электрическая цепь представляет собой цепь с распределенными параметрами, зависящими от режима цепи, т. е. является нелинейной. Однако во многих случаях из-за большой скорости электромагнитных процессов изменения напряжений и токов, происшедшие на одном участке цепи, одновременно вызывают определенные изменения и на всех остальных участках цепи; зависимость параметров цепи от ее режима часто незначительна. Таким образом, во многих случаях реальные электрические цепи можно рассматривать как линейные цепи с сосредоточенными параметрами.

Цепи, содержащие только взаимные элементы, называют **взаимными** (цепи, состоящие из резисторов, конденсаторов, индуктивных катушек, трансформаторов и источников энергии). Если в цепи имеются не взаимные элементы, то цепь называют **не взаимной** (цепи с электронными лампами, транзисторами, операционными усилителями).

Можно говорить также об активных и пассивных цепях. Цепь считают **активной**, если по отношению к некоторым зажимам она является источником энергии. Такая цепь содержит активные элементы. В противном случае цепь называют **пассивной**.

§ 1.2. Схема электрической цепи и элементы схемы

Электрическая цепь характеризуется совокупностью элементов, из которых она состоит, и способом их соединения.

Как уже отмечалось, реальные элементы цепи идеализируются для упрощения математического описания элемента. Однако идеализированные уравнения должны правильно отражать основные физические явления в том или ином реальном элементе.

Идеализированному элементу цепи ставят в соответствие его математическую модель — схемный элемент. Уравнения, описывающие схемный элемент, идентичны идеализированным уравнениям реального элемента электрической цепи. Схемные элементы могут быть введены и как математические абстракции; при этом они необязательно должны соответствовать каким-либо реальным элементам цепи. Однако любой реальный элемент цепи с необходимой степенью точности можно представить с помощью одного или совокупности схемных элементов, соединенных определенным образом. Такую совокупность схемных элементов (в частном случае один схемный элемент) называют **схемой замещения** или **эквивалентной схемой** элемента электрической цепи при условии совпадения уравнений, описывающих эту схему и элемент цепи.

Каждому схемному элементу соответствует условное геометрическое изображение. Тогда способ соединения элементов реальной цепи легко представить с помощью соответствующего соединения схемных элементов. Геометрическое изображение соединения схемных элементов, отображающее соединение реальных элементов электрической цепи и ее свойства, называют *схемой* цепи.

В схеме выделяют *ветви* — участки, которые характеризуются одним и тем же током в начале и конце в любой момент времени, и *узлы* — граничные (концевые) точки ветвей. Напряжение ветви тождественно разности потенциалов ее узлов*.

Ветвям и узлам схемы, как правило, соответствуют ветви и узлы реальной цепи. В схемах электрических цепей, содержащих многополюсные элементы, некоторые узлы и ветви могут не отображать узлы и ветви цепи. Кроме того, некоторые ветви схемы вводят для учета конструктивных и монтажных параметров цепи (например, паразитных емкостей между зажимами элемента, емкостей монтажа, индуктивностей выводов).

Применительно к электрической цепи ветвь часто определяют как участок цепи, в любом сечении которого ток имеет одно и то же значение в данный момент времени, а узел — как «место» соединения ветвей.

§ 1.3. Двухполюсные активные элементы

Любой двухполюсный элемент схемы может быть условно представлен так, как показано на рис. 1.1. Зажимы 1 и 2 присоединяют данный элемент к другим элементам. Напряжение между этими зажимами и ток элемента обозначены соответственно через u , i . Напряжение измеряется в *вольтах* (В), ток — в *амперах* (А). Стрелки без просвета (с просветом) определяют положительные направления напряжения (тока).

Напряжение u и ток i в общем случае представляют собой функции времени t :

$$u = u(t); i = i(t).$$

Для любого фиксированного момента времени напряжение и ток могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Положительное направление выбирают для того, чтобы придать знакам напряжения и тока определенный смысл.

Напряжение u (рис. 1.1) отождествляют с разностью потенциалов на зажимах 1 и 2, т. е.

$$u = \varphi_1 - \varphi_2.$$

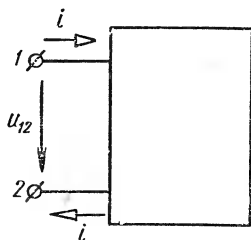


Рис. 1.1

* Ветви и узлы схемы — топологические понятия (см. гл. 2).

Если для какого-либо момента времени напряжение $u > 0$ ($u < 0$), то это означает, что потенциал φ_1 узла 1 больше (меньше) потенциала φ_2 узла 2 *.

Положительное направление напряжения можно указать двойным индексом. Так, на рис. 1.1 в качестве положительного направления выбрано направление напряжения u_{12} . При этом

$$u_{12} = -u_{21}.$$

Ток i равен скорости изменения заряда q , переносимого заряженными частицами через поперечное сечение участка цепи, т. е.

$$i = dq/dt.$$

В общем случае заряд q представляет собой сумму заряда q_+ , переносимого положительно заряженными частицами, и абсолютной величины заряда q_- , переносимого отрицательно заряженными частицами. Величина заряда измеряется в *кулонах* (Кл). За направление тока принимают направление перемещения положительно заряженных частиц, или, что то же самое, направление, противоположное направлению перемещения отрицательно заряженных частиц. Если при указанном положительном направлении в некоторый момент времени ток $i > 0$ ($i < 0$), то это означает, что направление тока совпадает с положительным направлением (противоположно положительному направлению).

Положительное направление напряжения и тока выбирают произвольно. Любые соотношения, характеризующие взаимосвязь между напряжениями и токами элемента (схемы в целом), имеют смысл лишь для выбранных положительных направлений.

У двухполюсного элемента ток через поперечное сечение проводника у зажима 1 равен току через поперечное сечение проводника у зажима 2 (при учете соответствующих направлений). Поэтому в дальнейшем ток двухполюсника будет указываться на схеме только один раз.

Для принятых на рис. 1.1 положительных направлений напряжения и тока произведение ui выражает мгновенную мощность, потребляемую двухполюсником:

$$p(t) = u(t) i(t).$$

Мощность характеризует скорость изменения энергии $W(t)$, т. е.

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt}.$$

Энергия, поступившая в цепь,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau,$$

где τ — переменная интегрирования.

* Потенциал любого узла схемы отсчитывается относительно некоторой точки, потенциал которой принимается равным нулю.

Если для любого момента времени t энергия $W(t) \geq 0$, то соответствующий двухполюсный элемент является потребителем энергии и называется пассивным.

Активный двухполюсник генерирует энергию. Для такого двухполюсника $W(t) < 0$.

Если на рис. 1.1 изменить положительное направление тока на противоположное, то интеграл

$$W(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau$$

будет определять генерируемую энергию. В этом случае $W(t) > 0$ соответствует источнику (активному двухполюснику), а $W(t) \leq 0$ — потребителю энергии (пассивному двухполюснику).

Реальным источникам энергии можно поставить в соответствие двухполюсные схемные элементы: источник э. д. с. (напряжения) и источник тока.

Источник э. д. с. Источник э. д. с. (напряжения) характеризуется величиной э. д. с. $e(t)$, равной напряжению, т. е. разности потенциалов на зажимах при отсутствии тока через источник. Э. д. с. определяют как работу сторонних сил, присущих источнику, на перемещение единичного положительного заряда внутри источника от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом.

Напряжение $u(t)$ на зажимах реального источника э. д. с. зависит от тока через источник. Если этой зависимостью можно пренебречь, т. е. если напряжение на зажимах источника равно э. д. с. при любом токе через источник $u(t) = e(t)$, то источник э. д. с. называют **идеальным**. Обозначение идеального источника э. д. с. дано на рис. 1.2, а; стрелка внутри кружка указывает положительное направление действия сторонних сил в источнике (положительное направление э. д. с.).

Источник, у которого э. д. с.

$$e(t) = \mathcal{E} = \text{const},$$

называют **источником постоянной э. д. с.** В противном случае источник называют **источником переменной э. д. с.** У источника постоянной э. д. с., изображенного на схеме, начало (конец) стрелки, указывающей положительное направление э. д. с. $\mathcal{E} > 0$ (рис. 1.2, а), соответствует отрицательному (положительному) зажиму. Возможно также изображение источника постоянной э. д. с., показанное на рис. 1.2, б.

Зависимость напряжения u на зажимах реального источника от тока i через источник может быть различной. В простейшем случае у источника постоянной э. д. с. эта зависимость выражается

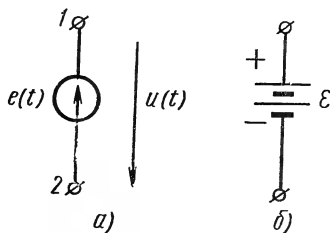


Рис. 1.2

уравнением

$$u = \mathcal{E} - r_{\text{в}} i. \quad (1.1)$$

Уравнению (1.1) соответствует схема замещения источника на рис. 1.3. В этой схеме элемент $r_{\text{в}}$, последовательно соединенный с идеальным источником э. д. с. $\mathcal{E}$, называют **внутренним сопротивлением** источника и характеризуют соотношением $u_{\text{в}} = r_{\text{в}} i$.

Таким образом, в уравнении (1.1) учитывается падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника: напряжение u на зажимах реального источника меньше э. д. с. на величину падения напряжения во внутреннем сопротивлении. Идеальный источник э. д. с. имеет $r_{\text{в}} = 0$.

График зависимости (1.1) показан на рис. 1.4, а. Ток

$$i_{\text{кз}} = \mathcal{E} / r_{\text{в}}$$

— это ток короткого замыкания источника, т. е. ток при напряжении на зажимах $u = 0$.

Зависимости $u(i)$ для реальных источников, называемые **внешними характеристиками**, отличаются от линейной зависимости на рис. 1.4, а. Пример внешней характеристики реального источника постоянной э. д. с. дан на рис. 1.4, б; в определенном диапазоне изменения тока эта характеристика близка к линейной и описывается уравнением (1.1).

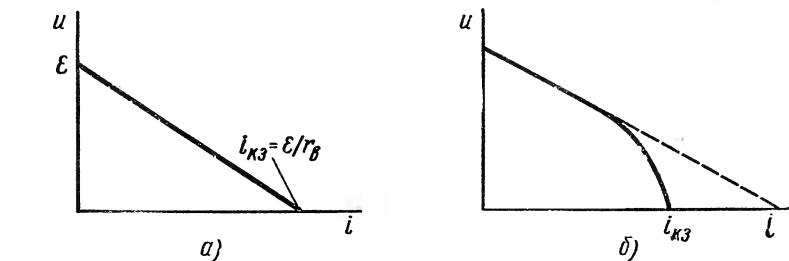


Рис. 1.4

У источников переменной э. д. с. с напряжением $u(t)$ напряжение во внутреннем сопротивлении в некоторых случаях определяют как $u_{\text{в}} = r_{\text{в}} i$. Тогда схема замещения источника аналогична схеме на рис. 1.3.

Источник тока. В отличие от источника э. д. с. источник тока характеризуется током $i(t)$ при короткозамкнутых зажимах (при отсутствии напряжения на зажимах источника). Если ток источника не зависит от напряжения, т. е. $i(t) = J(t)$ для любых напряжений на зажимах, то источник тока называют **идеальным**. Обозначение идеального источника тока приведено на рис. 1.5.

Двойная стрелка с разрывом в кружке показывает положительное направление тока источника тока.

Если $J(t) = \text{const}$, то источник называют источником постоянного тока; в противном случае — источником переменного тока.

Ток i реального источника энергии зависит от напряжения u на его зажимах. Так, из уравнения (1.1)

$$i = (\mathcal{E}/r_{\text{в}}) - (u/r_{\text{в}}) = J - g_{\text{в}}u, \quad (1.2)$$

где $J = \mathcal{E}/r_{\text{в}}$; $g_{\text{в}} = 1/r_{\text{в}}$ — внутренняя проводимость.

Уравнению (1.2) соответствует схема замещения на рис. 1.6. В этой схеме элемент $g_{\text{в}}$, параллельно соединенный с идеальным источником J , называют внутренней проводимостью и характеризуют соотношением $i_{\text{в}} = g_{\text{в}}u$.

Идеальный источник тока имеет $g_{\text{в}} = 0$.

Схема замещения реальных источников переменного тока в ряде случаев может быть представлена схемой, аналогичной схеме на рис. 1.6.

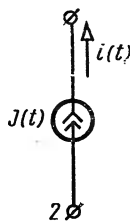


Рис. 1.5

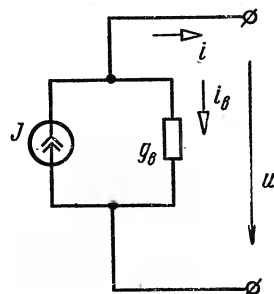


Рис. 1.6

Эквивалентность источников. Можно говорить о двух

схемах замещения реального источника электрической энергии (рис. 1.3 и 1.6). Эти схемы эквивалентны, если $J = \mathcal{E}/r_{\text{в}}$; $g_{\text{в}} = 1/r_{\text{в}}$, т. е. при одном и том же напряжении u (токе i) токи i (напряжения u) этих схем одинаковы.

Докажем активность источников, схемы которых приведены на рис. 1.3 и 1.6. Так, для положительных направлений напряжений и токов на рис. 1.3 энергия, отдаваемая источником,

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t (\mathcal{E} - r_{\text{в}}i) i d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t \mathcal{E} i d\tau - \int_{-\infty}^t r_{\text{в}} i^2 d\tau. \end{aligned}$$

У источника $u > 0$, $i > 0$ и, следовательно, отдаваемая энергия $W(t) > 0$. Слагаемое $\int_{-\infty}^t \mathcal{E} i d\tau$ характеризует энергию, гене-

рируемую идеальным источником э. д. с.; слагаемое $\int_{-\infty}^t r_{\text{в}} i^2 d\tau$ соответствует энергии, рассеиваемой на внутреннем сопротивлении источника.

Если при положительных направлениях, принятых на рис. 1.3, $u > 0$, $i < 0$, то $W(t) < 0$, т. е. энергия потребляется. Такой

случай возможен, например, при зарядке аккумулятора, когда аккумулятор является потребителем энергии.

Энергия, отдаваемая источником на рис. 1.6,

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t (J - g_B u) u d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t J u d\tau - \int_{-\infty}^t g_B u^2 d\tau. \end{aligned}$$

Слагаемое $\int_{-\infty}^t J u d\tau$ определяет энергию, генерируемую идеальным источником тока; слагаемое $\int_{-\infty}^t g_B u^2 d\tau$ характеризует потери энергии, обусловленные внутренней проводимостью источника.

Эквивалентные источники (рис. 1.3 и 1.6) по отношению к внешним зажимам генерируют одинаковую энергию. Энергия, отдаваемая идеальными источниками э. д. с. и тока, для этих схем различна. Действительно,

$$\mathcal{E}i \neq Ju,$$

так как $\mathcal{E}i = (Jr_B)i$; $Ju = J(r_B i_B)$; $i \neq i_B$.

В дальнейшем, если нет оговорок, под источниками э. д. с. и тока понимают идеальные источники.

§ 1.4. Двухполюсные пассивные элементы

Основными двухполюсными пассивными элементами схемы являются *резистивный* (сопротивление или проводимость), *индуктивный* и *емкостный* элементы.

Резистивный элемент. Двухполюсный элемент, характеризующийся зависимостью $u = u(i)$ или $i = i(u)$ (см. рис. 1.1), называют *резистивным* элементом — сопротивлением или проводимостью. Зависимость $u(i)$ или $i(u)$ называют *вольт-амперной характеристикой* такого элемента*.

В общем случае вольт-амперная характеристика нелинейна. Например, на рис. 1.7, а, б показаны две нелинейные характеристики, которые могут иметь реальные элементы — полупроводниковые диоды различных типов. Элементы с нелинейными зависимостями $u(i)$ или $i(u)$ характеризуются нелинейными сопротивлениями или проводимостями.

Если зависимость $u = u(i)$ представляет собой прямую линию, то сопротивление (проводимость) называют *линейным* (рис. 1.7, в). Обозначение такого сопротивления дано на рис. 1.8.

* Все характеристики, рассматриваемые в данном параграфе, представляют собой статические характеристики, т. е. характеристики, полученные при достаточно медленном изменении во времени соответствующих величин.

Линейное сопротивление описывается соотношением (закон Ома)

$$u_r = r i, \quad (1.3)$$

или

$$i = g u_r, \quad (1.4)$$

где r — сопротивление; $g = 1/r$ — проводимость.

Сопротивление $r > 0$ — пассивный элемент. Энергия, поступающая в данный элемент,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau = r \int_{-\infty}^t i^2(\tau) d\tau > 0.$$

Эта энергия преобразуется в тепловую энергию (необратимо рассеивается). При этом мощность $p = i^2 r$ (закон Джоуля — Ленца).

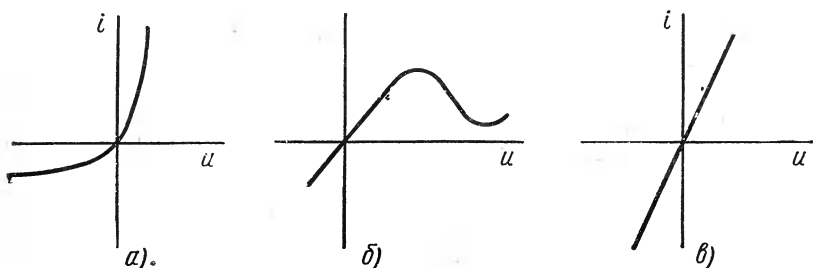


Рис. 1.7

Сопротивление r как элемент схемы соответствует элементу цепи — резистору, если последний идеализируется.

Резистор представляет собой, например, проводящий однородный цилиндр длиной l и поперечным сечением S (рис. 1.9). Проводящие свойства материала цилиндра характеризуют удельной проводимостью σ .

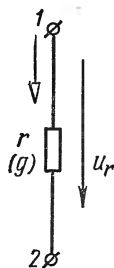


Рис. 1.8

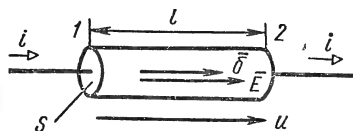


Рис. 1.9

По определению, напряжение между точками 1 и 2

$$u = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

где $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля;
ток

$$i = \int_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S},$$

где $\bar{\delta}$ — вектор плотности тока проводимости. Если ток равномерно распределен по сечению, а вектор $\bar{E}$ одинаков по длине, сопротивление

$$r = u/i = El/\delta S.$$

По закону Ома в дифференциальной форме

$$\bar{\delta} = \sigma \bar{E}; \quad \delta = \sigma E.$$

Следовательно,

$$r = l/\sigma S; \quad g = \sigma S/l.$$

При переменном токе сопротивление цилиндра увеличивается за счет неравномерного распределения тока, получающегося вследствие поверхностного эффекта и эффекта близости.

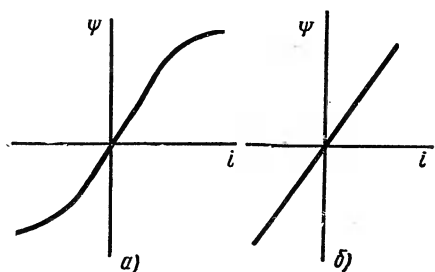


Рис. 1.10



Рис. 1.11

Индуктивный элемент. Двухполюсник (см. рис. 1.1) может характеризоваться зависимостью $\Psi(i)$ или $i(\Psi)$, где

$$\bar{\Psi} = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

называют потокоцеплением. При этом напряжение на зажимах двухполюсника

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}.$$

Зависимость $\Psi(i)$ называют вебер-амперной характеристикой. Потокоцепление измеряется в *веберах* (Вб).

Если элемент характеризуется зависимостью $\Psi(i)$ или $i(\Psi)$, то его называют индуктивным элементом (индуктивностью).

Так же как и в случае резистивного элемента, различают нелинейные и линейные индуктивные элементы. Нелинейная характеристика $\Psi(i)$ дана на рис. 1.10, а, линейная — на рис. 1.10, б.

У линейного индуктивного элемента потокоцепление линейно зависит от тока:

$$\Psi = Li. \quad (1.5)$$

Величину $L = \Psi/i$ называют индуктивностью. Индуктивность измеряется в генри (Г). Обозначение линейной индуктивности на схеме приведено на рис. 1.11. Напряжение на зажимах индуктивности

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt}.$$

Если $L = \text{const}$, то

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (1.6)$$

Ток в линейной индуктивности

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt. \quad (1.7)$$

Индуктивность L как элемент схемы соответствует элементу цепи — индуктивной катушке при ее идеализации.

Индуктивная катушка часто представляет собой кольцевой сердечник, на который равномерно нанесена обмотка с числом витков ω (рис. 1.12); материал сердечника характеризуется магнитной проницаемостью μ . Ток i в обмотке создает магнитный поток Φ , замыкающийся в сердечнике (поток вне сердечника можно пренебречь). Направления тока i и потока Φ связаны правилом правого винта.

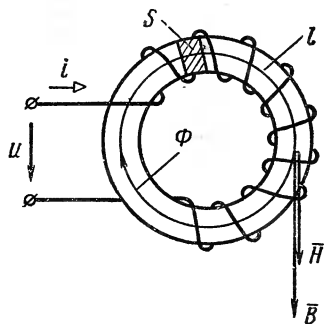


Рис. 1.12

Потокоцепление катушки $\Psi = \omega\Phi$, так как поток, сцепленный с каждым витком обмотки, в этом случае можно считать одинаковым. Магнитный поток

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции; S — сечение сердечника. В однородной линейной среде вектор

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м — магнитная постоянная.

По закону полного тока,

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = i\omega,$$

где l — замкнутый путь интегрирования.

Если внутренний и внешний диаметры сердечника превышают размеры поперечного сечения S , то поток Φ можно считать равно-

мерно распределенным по сечению. В этом случае

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\omega BS}{Hl/\omega} = \mu_0 \mu \frac{\omega^2 S}{l},$$

где l определяется по среднему диаметру (по средней силовой линии).

Как видно из формулы (1.6), напряжение u_L на зажимах индуктивности отлично от нуля только при $i \neq \text{const}$ ($\Psi \neq \text{const}$). Изменяющийся ток i создает изменяющийся магнитный поток. По закону электромагнитной индукции, изменение магнитного потока вызывает э. д. с. (называемую э. д. с. самоиндукции), противодействующую, согласно правилу Ленца, изменению потока:

$$e_L = - \frac{d\Psi}{dt}$$

или в случае линейной индуктивности

$$e_L = - L \frac{di}{dt}$$

(положительные направления e_L и i совпадают).

Если потокоцепление (ток) возрастает, то $e_L < 0$; если потокоцепление (ток) убывает, $e_L > 0$. Напряжение на зажимах катушки (положительные направления u_L и i совпадают) $u_L = -e_L$, так как оно должно уравновешивать э. д. с. e_L .

Линейная индуктивность при $L = \text{const} > 0$ — пассивный элемент. Энергия, поступающая в такой элемент,

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t u_L(\tau) i(\tau) d\tau = L \int_{-\infty}^t \frac{di(\tau)}{d\tau} i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} L \int_{-\infty}^t d[i^2(\tau)] = \frac{Li^2(t)}{2} > 0 \end{aligned}$$

[при условии $i(-\infty) = 0$].

В данном случае энергия не рассеивается, а запасается в магнитном поле, связанном с индуктивностью.

Емкостный элемент. Двухполюсник (см. рис. 1.1) может характеризоваться зависимостью $q(u)$ или $u(q)$, где

$$q = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

— электрический заряд. При этом

$$i = dq/dt.$$

Зависимость $q(u)$ или $u(q)$ называют кулон-вольтной характеристикой.

Если элемент характеризуется зависимостью $q(u)$ или $u(q)$, то его называют емкостным элементом (емкостью).

На рис. 1.13, а, б соответственно показаны зависимости для нелинейной и линейной емкостей.

У линейного емкостного элемента заряд q пропорционален напряжению:

$$q = Cu_C. \quad (1.8)$$

Величину $C = q/u_C$ называют емкостью. Емкость измеряется в фарадах (Ф).

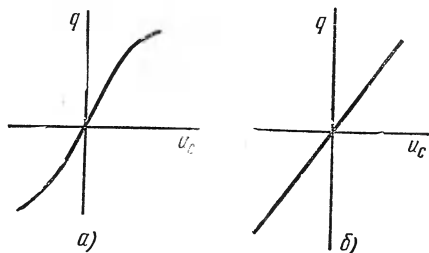


Рис. 1.13

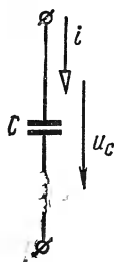


Рис. 1.14

Обозначение линейной емкости приведено на рис. 1.14. Ток через емкость

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt}.$$

Если $C = \text{const}$, то

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.9)$$

Напряжение на зажимах емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (1.10)$$

Емкость как элемент схемы соответствует элементу цепи — конденсатору при его идеализации.

Конденсатор часто представляет собой два проводящих параллельно расположенных электрода площадью S , разделенных диэлектрическим слоем толщиной d , свойства которого характеризуются диэлектрической проницаемостью ϵ (рис. 1.15).

При напряжении $u = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ между электродами на одном из них будет положительный заряд $q_+ = q$, на другом — отрицательный заряд $q_- = -q$. Заряд

$$q_+ = \int_S \bar{D} dS,$$

где $\bar{D}$ — вектор электрического смещения, связанный в однородной линейной среде с вектором напряженности E равенством

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon E$$

($\epsilon_0 = 1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9$ Кл/В·м — электрическая постоянная).

Если поле в конденсаторе считать равномерным, то

$$C = \frac{q_+}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q_-}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{DS}{Ed} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

Как видно из равенства (1.8), ток через емкость отличен от нуля только при $u_c \neq \text{const}$. Изменение напряжения на электродах вызывает изменение величины заряда каждого из них. Если напряжение возрастает, ток $i > 0$, т. е. конденсатор заряжается; заряд $q = q_+ = -q_-$ увеличивается. Если напряжение убывает, ток $i < 0$, т. е. конденсатор разряжается; заряд $q = q_+ = -q_-$ уменьшается.

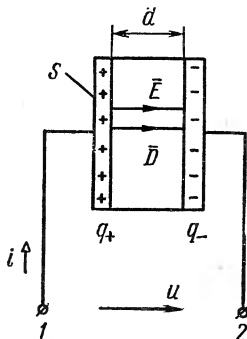


Рис. 1.15

Формула (1.9) записана для совпадающих положительных направлений u_c и i (рис. 1.14 и 1.15); при этом знаки u_c и $q_+ = -q_-$ всегда одинаковы. Ток i между электродами конденсатора является током смещения.

Линейная емкость при $C = \text{const} > 0$ представляет собой пассивный элемент. Энергия, поступающая в такой элемент,

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t u_c(\tau) i(\tau) d\tau = C \int_{-\infty}^t u_c(\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} C \int_{-\infty}^t d[u_c^2(\tau)] = \frac{Cu_c^2(t)}{2} > 0 \end{aligned}$$

[при $u_c(-\infty) = 0$].

В данном случае энергия запасается в электрическом поле, связанном с емкостью.

Процесс запасаения энергии как в магнитном, так и в электрическом полях является обратимым. Запасенная энергия может быть отдана другим элементам цепи. Например, энергия заряженного конденсатора при разряде его на сопротивление рассеивается в этом сопротивлении; разряжающийся конденсатор можно рассматривать в указанном смысле как активный элемент — источник энергии.

Схемы замещения резисторов, индуктивных катушек и конденсаторов. Идеализированные схемные элементы — сопротивление r , индуктивность L , емкость C — отражают основные свойства и параметры соответственно резисторов, индуктивных катушек и конденсаторов, обусловленные физическими процессами необратимого рассеяния энергии и обратимого накопления энергии, связанной с магнитным и электрическим полями.

При определенных условиях необходимо учитывать свойства и параметры реальных элементов, обусловленные побочными (так называемыми паразитными) процессами. Например, на высоких

частотах на работу схемы влияют скорость изменения магнитного потока, сцепленного с резистором, и ток смещения, т. е. индуктивность и емкость резистора, которыми при других условиях можно пренебречь. У индуктивной катушки в ряде случаев требуется учесть потери энергии в обмотке и сердечнике, межвитковую емкость; у конденсатора — потери энергии в несовершенном диэлектрике; индуктивности выводов.

С помощью идеализированных элементов r , L и C можно составить схемы замещения резисторов, индуктивных катушек и конденсаторов, учитывающие побочные процессы. Например, на рис. 1.16, а показана схема замещения резистора, учитывающая его индуктивность и емкость; на рис. 1.16, б, в приведены схемы замещения индуктивной катушки и конденсатора, учитывающие потери энергии, паразитные емкости и индуктивности. Параметры таких схем замещения находят на основании экспериментальных данных, а также в определенных случаях — расчетным путем.

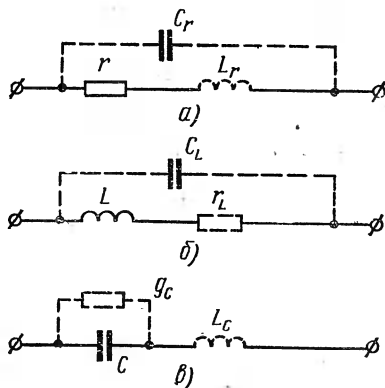


Рис. 1.16

§ 1.5. Основные уравнения цепей с сосредоточенными параметрами

Цепи, содержащие источники энергии, резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы, могут быть представлены схемами замещения, состоящими из источников э. д. с., тока и элементов r , L , C . В схеме с сосредоточенными параметрами необратимые потери энергии происходят только в сопротивлениях, магнитное поле связано только с индуктивностями, ток смещения, обусловленный изменяющимся электрическим полем, имеет место только в емкостях.

Основные уравнения для цепей с сосредоточенными параметрами вытекают из известных физических законов — *принципа непрерывности полного тока и закона электромагнитной индукции*.

Если некоторый узел схемы охватить замкнутой поверхностью S (рис. 1.17), то для этой поверхности справедливо уравнение, определяющее принцип непрерывности полного тока:

$$\oint_S \bar{\delta}_{\text{полн}} d\bar{S} = 0, \quad (1.11)$$

где $\bar{\delta}_{\text{полн}}$ — вектор плотности полного тока, т. е. суммы тока проводимости и тока смещения. В схеме с сосредоточенными параметрами ток смещения существует только между электродами

емкостей; поэтому в выражении (1.11) вектор плотности полного тока равен вектору тока проводимости: $\bar{\delta}_{\text{полн}} = \bar{\delta}$. Вектор $\bar{\delta}$ отличен от нуля в тех точках поверхности S , которые совпадают с поперечными сечениями проводников. Учитывая сказанное, из уравнения (1.11) получают

$$\sum_k i_k = 0, \quad (1.12)$$

где i_k — ток k -го проводника, присоединенного к рассматриваемому узлу.

Уравнение (1.12) называют первым законом Кирхгофа, который формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узле, равна нулю в любой момент времени*. При этом с положительным (отрицательным) знаком учитывают токи, направленные от узла (к узлу) или направленные из замкнутой поверхности (внутрь поверхности).

Для узла на рис. 1.17 уравнение по первому закону Кирхгофа записывается следующим образом:

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0.$$

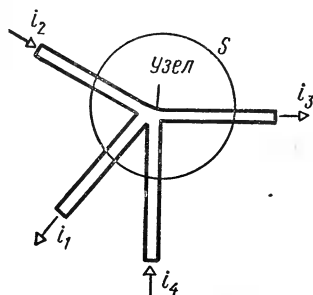


Рис. 1.17

Первый закон Кирхгофа справедлив и для замкнутой поверхности, охватывающей несколько узлов. При этом

в выражении (1.12) алгебраически суммируются токи ветвей, рассекаемых поверхностью.

Если в уравнении (1.12) токи источников тока перенести в правую часть, то получается

$$\sum_k i_k = \sum_k J_k, \quad (1.13)$$

где $\sum_k J_k$ — алгебраическая сумма токов источников тока; $\sum_k i_k$ — алгебраическая сумма токов других ветвей (элементов). В уравнении (1.13) с положительным (отрицательным) знаком записывают ток источника J_k , направленный к узлу (от узла), и ток i_k , направленный от узла (к узлу).

Например, если ток i_4 представляет собой ток источника тока, т. е. $i_4 = J_4$ (рис. 1.17), то в соответствии с равенством (1.13)

$$i_1 - i_2 + i_3 = J_4.$$

По закону электромагнитной индукции для любого замкнутого пути интегрирования (контура) l справедливо равенство

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\Phi/dt, \quad (1.14)$$

где Φ — магнитный поток, сцепленный с контуром (направление обхода контура и направление потока согласованы по правилу правого винта).

Пусть путь интегрирования связан с ветвями схемы электрической цепи, причем на участках, содержащих источники э. д. с., путь проходит вне источников. Так как в цепи с сосредоточенными параметрами магнитное поле имеется только в индуктивностях, то контур интегрирования всегда можно выбрать так, чтобы поток, сцепленный с контуром, был равен нулю. Тогда

$$\oint_l \vec{E} \vec{dl} = 0, \quad (1.15)$$

т. е. поле вектора $\vec{E}$ потенциально и напряжение между любыми двумя точками совпадает с разностью потенциалов.

Из равенства (1.15) следует

$$\sum_k u_k = 0. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) называют вторым законом Кирхгофа, который формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма напряжений на зажимах ветвей (элементов) контура равна нулю в любой момент времени*. При этом с положительным (отрицательным) знаком учитывают напряжения, положительные направления которых совпадают (противоположны) направлению обхода контура.

На рис. 1.18 показан пример контура цепи; путь интегрирования $1-a-2-3-b-4-1$ содержит зажимы элементов. Для выбранного пути интеграл в равенстве (1.15) разбивается на четыре слагаемых:

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0,$$

где

$$u_1 = \varphi_2 - \varphi_1; \quad u_2 = \varphi_2 - \varphi_3; \quad u_3 = \varphi_4 - \varphi_3; \quad u_4 = \varphi_4 - \varphi_1.$$

Если напряжения источников перенести в правую часть равенства (1.16) и заменить на э. д. с., то второму закону Кирхгофа соответствует уравнение

$$\sum_k u_k = \sum_k e_k, \quad (1.17)$$

которое выражает равенство алгебраических сумм напряжений на пассивных элементах и э. д. с. контура. В уравнении (1.17) с положительным (отрицательным) знаком записывают напряжения и э. д. с., направление которых совпадает (противоположно) с направлением обхода контура.

Например, для контура на рис. 1.18 по второму закону Кирхгофа записывают (выбирая направление обхода по часовой стрелке, совпадающим с направлением э. д. с. e_1)

$$u_2 - u_3 + u_4 = e_1.$$

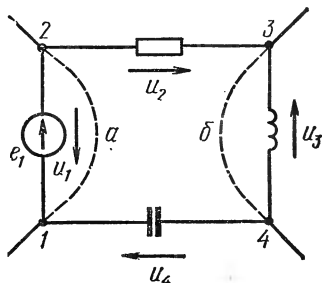


Рис. 1.18

Уравнения (1.12), (1.16) или (1.13) и (1.17) совместно с соотношениями (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), (1.9), (1.10), связывающими напряжения и токи каждого элемента, дают полное математическое описание цепи.

Пример 1.1. Составить уравнения Кирхгофа для схемы на рис. 1.19.

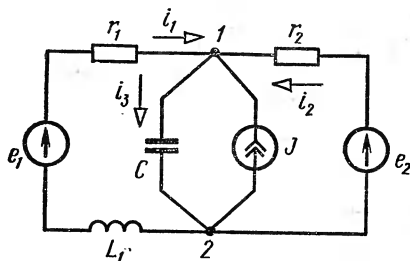


Рис. 1.19

Решение. Для узлов 1 и 2, по первому закону Кирхгофа,

$$-i_1 - i_2 + i_3 = J;$$

$$i_1 + i_2 - i_3 = -J.$$

Одно из записанных уравнений является зависимым.

Для контура $e_1 - r_1 - C - L_1$ (при направлении обхода контура по часовой стрелке), по второму закону Кирхгофа,

$$r_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} = e_1.$$

Положительные направления напряжений на зажимах пассивных элементов приняты совпадающими с положительными направлениями токов и учтены выражения (1.3), (1.10), (1.6). Для контура $C - r_2 - e_2$ (направление обхода по часовой стрелке)

$$-\frac{1}{C} \int i_3 dt - r_2 i_2 = -e_2.$$

Для контура $e_1 - r_1 - r_2 - e_2 - L_1$ (направление обхода по часовой стрелке)

$$r_1 i_1 - r_2 i_2 + L \frac{di_1}{dt} = e_1 - e_2.$$

Последнее уравнение, записанное по второму закону Кирхгофа, равно сумме двух предыдущих уравнений.

Таким образом, из пяти уравнений Кирхгофа для схемы на рис. 1.19 независимыми являются три уравнения (одно для какого-либо узла и два других для любых двух контуров схемы).

§ 1.6. Трехполюсные элементы цепей

Трехполюсный элемент (трехполюсник) имеет три зажима, которые служат для соединения такого элемента с другими элементами цепи. Свойства трехполюсного элемента можно описать соотношениями между напряжениями u_1 , u_2 и токами i_1 , i_2 , положительные направления которых показаны на рис. 1.20.

Напряжения u_1 и u_2 представляют собой напряжения между парами зажимов 1, 3 и 2, 3: $u_1 = u_{13}$, $u_2 = u_{23}$. Напряжение u_{12} между парой зажимов 1, 2 однозначно определяется через u_{13} и u_{23} , так как, по второму закону Кирхгофа, $-u_{13} + u_{12} + u_{23} = 0$. Ток i_3 зажима 3 зависит от токов i_1 и i_2 , так как, по первому закону Кирхгофа, для замкнутой поверхности $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Таким образом, для описания трехполюсника достаточно двух напряжений и двух токов.

Трехполюсник (рис. 1.20) рассматривают как элемент с двумя парами зажимов, причем зажим 3 является общим для каждой пары (рис. 1.21).

Произведения $p_1(t) = u_1(t) i_1(t)$ и $p_2(t) = u_2(t) i_2(t)$ для положительных направлений напряжений и токов (рис. 1.20 и 1.21) выражают мгновенную мощность, потребляемую трехполюсником через каждую пару зажимов. Поэтому энергия, поступающая в трехполюсник,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^2 u_k(\tau) i_k(\tau) d\tau.$$

Как и двухполюсники, трехполюсники могут быть резистивными, индуктивными и емкостными.

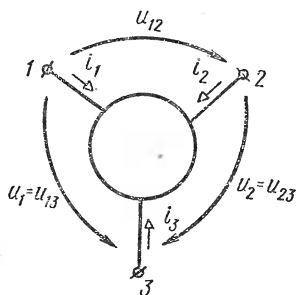


Рис. 1.20

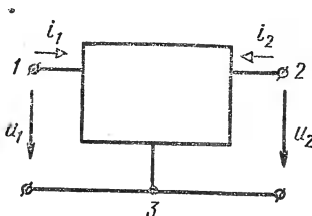


Рис. 1.21

Если трехполюсник характеризуется соотношениями между напряжениями u_1 , u_2 и токами i_1 , i_2 , то его называют резистивным.

Если напряжениям u_1 , u_2 можно поставить в соответствие потокоосцепления

$$\Psi_1 = \int_{-\infty}^t u_1(\tau) d\tau; \quad \Psi_2 = \int_{-\infty}^t u_2(\tau) d\tau$$

и описать трехполюсник соотношениями между Ψ_1 , Ψ_2 и i_1 , i_2 , то такой трехполюсник называют индуктивным.

Если токам i_1 , i_2 можно поставить в соответствие заряды

$$q_1 = \int_{-\infty}^t i_1(\tau) d\tau, \quad q_2 = \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau$$

и описать трехполюсник соотношениями между q_1 , q_2 и u_1 , u_2 , то такой трехполюсник называют емкостным.

Широкое применение находят трехполюсные элементы — электронные лампы, транзисторы и индуктивные трехполюсники (трансформаторы).

Электронная лампа. Электронная лампа (вакуумный триод) имеет три металлических электрода, называемые анодом (а), катодом (к) и сеткой (с), укрепленные в колбе, внутри которой создан вакуум (рис. 1.22).

Накаленный катод эмиттирует электроны, которые под действием электрического поля между анодом и катодом (напряжение $u_a > 0$) устремляются к аноду. Поток электронов между анодом и катодом и представляет собой ток в анодной цепи лампы i_a .

На пути электронного потока между катодом и анодом имеется управляющий электрод с отверстиями — сетка. Изменяя напряжение u_c между сеткой и катодом, можно регулировать поток электронов, достигающих анода, т. е. изменять i_a . Сетка расположена ближе к катоду, поэтому изменения напряжения u_c больше влияют на анодный ток, чем изменения напряжения u_a .

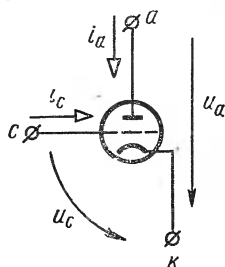


Рис. 1.22

Часть электронов, эмиттируемых катодом, не достигает анода, попадая на сетку. Этой части электронов соответствует сеточный ток i_c .

Лампа представляет собой резистивный нелинейный трехполюсный элемент (в предположении, что частота переменных составляющих напряжений и токов не очень велика и межэлектродными емкостями лампы можно пренебречь).

Токи анода и сетки являются функциями двух переменных:

$$i_a = i_a(u_c, u_a);$$

$$i_c = i_c(u_c, u_a).$$

Эти функции выражаются в виде семейств характеристик, определяемых экспериментально. Примеры характеристик лампы

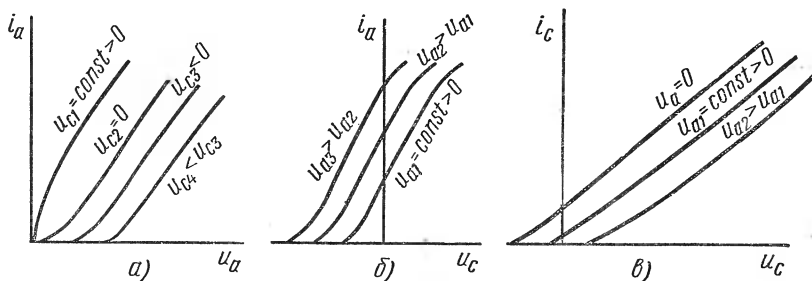


Рис. 1.23

приведены на рис. 1.23. Анодные характеристики (рис. 1.23, а) показывают зависимость анодного тока от анодного напряжения при постоянном сеточном напряжении. Анодно-сеточные характеристики (рис. 1.23, б) отражают зависимость анодного тока от сеточного напряжения при постоянном анодном напряжении. Сеточные характеристики (рис. 1.23, в) дают зависимость сеточного тока от сеточного напряжения при постоянном анодном напряжении.

Напряжения u_c , u_a и токи i_c , i_a в общем случае представляют собой суммы постоянных и переменных составляющих. Постоянные составляющие играют вспомогательную роль, обеспечивая необходимый режим работы лампы. Для получения нужных значений постоянных составляющих в анодную и сеточную цепи лампы включают источники постоянных э. д. с. $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}_c$, называемые соответственно источниками анодного питания и сеточного смещения. Пример цепи с лампой и источниками приведен на рис. 1.24.

Как правило, лампа работает при отрицательном напряжении между сеткой и катодом ($u_c < 0$) и ток сетки можно считать равным нулю: $i_c = 0$. Анодный ток

$$i_a = I_{a0} + \Delta i_a,$$

где I_{a0} — постоянная составляющая; Δi_a — переменная составляющая. Переменная составляющая анодного тока при достаточно малых переменных составляющих сеточного и анодного напряжений Δu_c , Δu_a может быть выражена следующим образом:

$$\Delta i_a \approx \frac{\partial i_a}{\partial u_c} \Delta u_c + \frac{\partial i_a}{\partial u_a} \Delta u_a.$$

Данное выражение представляет, по существу, два слагаемых разложения функции двух переменных в ряд Тейлора. Производная

$$\left. \frac{\partial i_a}{\partial u_c} \right|_{u_a = \text{const}} = S$$

характеризует параметр лампы, имеющий размерность проводимости и называемый крутизной анодно-сеточной характеристики.

Производную

$$\left. \frac{\partial i_a}{\partial u_a} \right|_{u_c = \text{const}} = r_i$$

называют внутренним сопротивлением лампы.

Следует подчеркнуть, что крутизна S и внутреннее сопротивление r_i зависят от постоянных составляющих анодного и сеточного напряжений, т. е. от положения рабочей точки на характеристиках лампы. Если рабочая точка расположена на линейном участке характеристик и при отклонениях сеточного и анодного напряжений на Δu_c , Δu_a не выходит за пределы линейного участка, то для переменной составляющей анодного тока получается линейное уравнение

$$\Delta i_a = S \Delta u_c + \frac{1}{r_i} \Delta u_a.$$

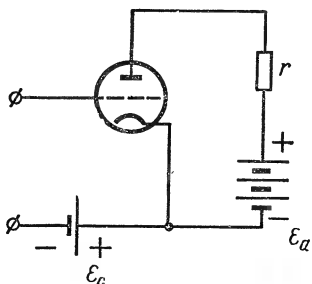


Рис. 1.24

Таким образом, в *линейном режиме* электронная лампа характеризуется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= 0; \\ i_2 &= S u_1 + \frac{1}{r_i} u_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где $i_1 = \Delta i_c$; $i_2 = \Delta i_a$; $u_1 = \Delta u_c$; $u_2 = \Delta u_a$ — переменные составляющие токов и напряжений.

Уравнениям (1.18) соответствует линейная эквивалентная схема лампы для *переменных составляющих* на рис. 1.25, а. Эта

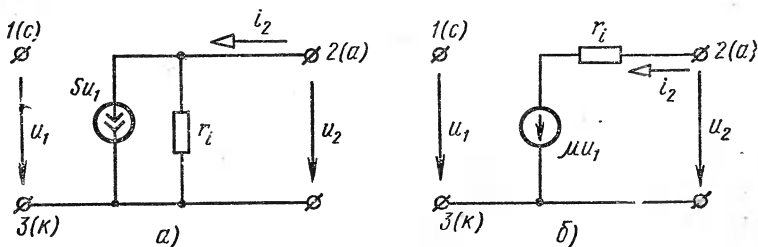


Рис. 1.25

схема содержит источник тока, ток которого зависит от напряжения на входе схемы.

Если уравнения (1.18) переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= 0; \\ u_2 &= -\mu u_1 + r_i i_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

где $\mu = S r_i = (-u_2/u_1)_{i_2=0} = -(\partial u_a / \partial u_c)_{i_a = \text{const}}$ — коэффициент усиления лампы, то получается вторая эквивалентная схема лампы (рис. 1.25, б). Эта схема содержит источник э. д. с., значение которой зависит от напряжения на входе схемы.

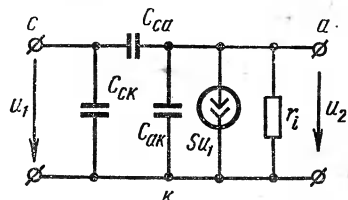


Рис. 1.26

Уравнения (1.18) в общем виде можно записать как

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= g_{11} u_1 + g_{12} u_2; \\ i_2 &= g_{21} u_1 + g_{22} u_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

где $g_{11} = 0$; $g_{12} = 0$; $g_{21} = S$, $g_{22} = 1/r_i$.

Коэффициенты уравнений g_{ij} ($i, j = 1, 2$) имеют размерность проводимости. Если $g_{12} \neq g_{21}$, то трехполюсник является *невозвратным*. Таким образом, электронная лампа — *невозвратный элемент цепи*.

На высоких частотах лампу нельзя рассматривать как резистивный трехполюсник, так как существенное влияние на ее работу будут оказывать паразитные емкости между электродами. Эквивалентная схема лампы усложняется (рис. 1.26).

Транзистор. Полупроводниковый триод (транзистор) представляет собой монолитный кристалл полупроводника (кремния или

германия), состоящий из трех областей с различным типом электропроводности.

Область полупроводника, в которой электропроводность обусловлена свободными электронами, называют *n*-областью. Такую область получают при добавлении в полупроводник небольшого количества примесей химических элементов, атомы которых имеют на один валентный электрон больше, чем атомы полупроводника.

Если в полупроводниковую область добавить небольшое количество примесей химических элементов, атомы которых имеют на один валентный электрон меньше, чем атомы полупроводника, то получается область с незаполненными валентными связями атомов — дырками. Дырки можно рассматривать как элементарные носители положительного заряда. Перемещение электронов, заполняющих валентные связи, эквивалентно перемещению дырок в противоположном направлении. Область, в которой электропроводность обусловлена дырками, называют *p*-областью.

У транзистора слои с дырочной и электронной электропроводностью чередуются. В соответствии с чередованием слоев различают транзисторы *p-n-p*-и *n-p-n*-типов.

Транзистор *p-n-p*-типа имеет две *p*-области, одну из которых называют эмиттером (э), другую — коллектором (к). Эти области разделены *n*-областью, называемой базой (рис. 1.27, а). Каждая область с помощью металлического электрода соединяется с другими элементами цепи.

Если к транзистору не подключены источники, то вследствие диффузии дырок (в *n*-область) и электронов (в *p*-области) на границе раздела областей создается электрическое поле, препятствующее дальнейшей диффузии носителей зарядов. Распределение потенциала электрического поля при этом показано на рис. 1.27, б. Разность потенциала на границе раздела областей называют потенциальным барьером *p-n*-перехода.

При подключении к транзистору источников постоянных э. д. с. $\mathcal{E}_э$, $\mathcal{E}_к$ (рис. 1.27, а) снижается потенциальный барьер между эмиттером и базой и увеличивается потенциальный барьер между базой и коллектором (рис. 1.27, в). В результате дырки эмиттера диффундируют в область базы и, увлекаясь полем коллекторного перехода, попадают в область коллектора, образуя коллекторный

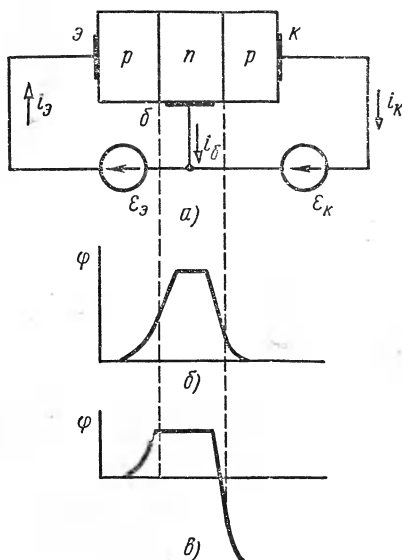
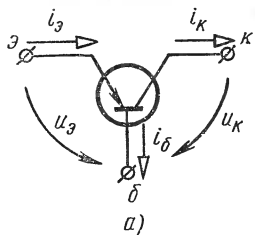


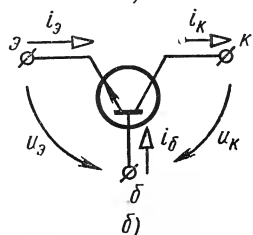
Рис. 1.27

ток i_k . Вследствие малой толщины базы большая часть дырок, инжектированных эмиттером, достигает коллектора. Ток эмиттера i_e лишь незначительно превышает ток коллектора. Разность

токов i_e и i_k соответствует току базы:
 $i_b = i_e - i_k^*$.



а)



б)

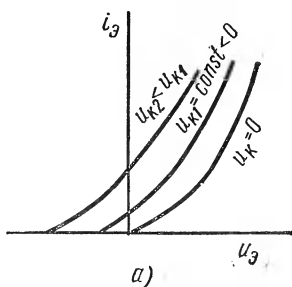
Рис. 1.28

Транзистор типа $n-p-n$ имеет эмиттер и коллектор электронной электропроводности, базу — дырочной электропроводности. Принцип действия транзистора аналогичен рассмотренному ранее. Однако в отличие от транзистора $p-n-p$ -типа в транзисторе $n-p-n$ -типа токи i_e , i_k обусловлены в основном движением электронов.

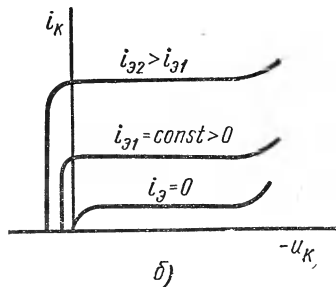
Условное обозначение транзисторов $p-n-p$ - и $n-p-n$ -типов показано соответственно на рис. 1.28, а, б.

Если частота переменных составляющих токов и напряжений транзистора не слишком велика, его можно рассматривать как резистивный нелинейный элемент, описываемый семействами входных и выходных характеристик. Входные характеристики показывают зависимость тока i_e от напряжения $u_э$ при постоянном напряжении $u_к$. Выходные характеристики отражают зависимость тока i_k от напряжения $u_к$ при постоянном токе i_e .

Входные характеристики отражают зависимость тока i_e от напряжения $u_э$ при постоянном напряжении $u_к$. Выходные характеристики отражают зависимость тока i_k от напряжения $u_к$ при постоянном токе i_e .



а)



б)

Рис. 1.29

На рис. 1.29, а, б приведены соответственно входные и выходные характеристики транзистора $p-n-p$ -типа. Для транзистора $n-p-n$ -типа при положительных направлениях токов и напряжений (см. рис. 1.28, б) входные и выходные характеристики совпадают с характеристиками транзистора $p-n-p$ -типа, если у всех

* В транзисторе $p-n-p$ -типа дырки — основные носители заряда; токи i_e , i_k обусловлены главным образом движением дырок. Однако кроме дырочных составляющих токов имеются значительно меньшие составляющие, обусловленные движением электронов (неосновных носителей).

величин ($i_э$, $i_к$, $u_э$, $u_к$) на рис. 1.29 изменены знаки на противоположные.

Напряжения $u_э$, $u_к$ представляют собой функции двух переменных:

$$u_э = u_э(i_э, i_к);$$

$$u_к = u_к(i_э, i_к).$$

Эти напряжения, а также токи $i_э$, $i_к$ содержат в общем случае постоянные и переменные составляющие. Постоянные составляющие обеспечиваются источниками постоянных э. д. с. $\mathcal{E}_к$, $\mathcal{E}_э$, включаемыми, например, как показано на рис. 1.30, а (транзистор $p-n-p$ -типа) и 1.30, б (транзистор $n-p-n$ -типа).

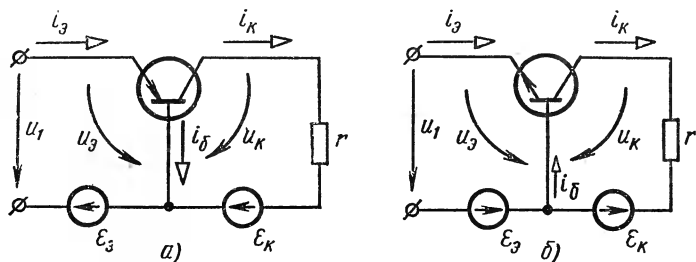


Рис. 1.30

Для малых переменных составляющих напряжений записывают уравнения

$$\Delta u_э \approx \frac{\partial u_э}{\partial i_э} \Delta i_э + \frac{\partial u_э}{\partial i_к} \Delta i_к;$$

$$\Delta u_к \approx \frac{\partial u_к}{\partial i_э} \Delta i_э + \frac{\partial u_к}{\partial i_к} \Delta i_к,$$

где $\Delta i_э$, $\Delta i_к$ — малые переменные составляющие эмиттерного и коллекторного токов.

Частные производные

$$\left. \frac{\partial u_э}{\partial i_э} \right|_{i_к = \text{const}} = r_{11}; \quad \left. \frac{\partial u_э}{\partial i_к} \right|_{i_э = \text{const}} = -r_{12};$$

$$\left. \frac{\partial u_к}{\partial i_э} \right|_{i_к = \text{const}} = r_{21}; \quad \left. \frac{\partial u_к}{\partial i_к} \right|_{i_э = \text{const}} = -r_{22}$$

характеризуют параметры транзистора в соответствующей рабочей точке. Если транзистор работает в линейном режиме (рабочая точка не выходит за пределы линейных участков характеристик), то для переменных составляющих получаются линейные уравнения

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= r_{11}i_1 + r_{12}i_2; \\ u_2 &= r_{21}i_1 + r_{22}i_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

где $u_1 = \Delta u_э$; $u_2 = \Delta u_к$; $i_1 = \Delta i_э$; $i_2 = -\Delta i_к$ — переменные составляющие токов и напряжений.

Параметры r_{ij} ($i, j = 1, 2$) имеют размерность сопротивлений. У транзистора $r_{12} \neq r_{21}$, что указывает на невязимость транзистора.

Если в правой части первого уравнения системы (1.21) прибавить и вычесть произведение $r_{12}i_1$, а в правой части второго уравнения прибавить и вычесть произведения $r_{12}i_1$, $r_{12}i_2$, то уравнения (1.21) будут эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} u_1 &= (r_{11} - r_{12}) i_1 + r_{12} (i_1 + i_2); \\ u_2 &= (r_{21} - r_{12}) i_1 + (r_{22} - r_{12}) i_2 + r_{12} (i_1 + i_2) \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= r_э i_1 + r_6 (i_1 + i_2); \\ u_2 &= r_м i_1 + r_к i_2 + r_6 (i_1 + i_2), \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

где $r_э = r_{11} - r_{12}$; $r_6 = r_{12}$; $r_к = r_{22} - r_{12}$; $r_м = r_{21} - r_{12}$.

Уравнениям (1.22) соответствует эквивалентная схема транзистора рис. 1.31, а. Эта схема содержит источник, э. д. с. которого зависит от тока входной цепи (т. е. от тока i_1); сопротивления $r_э$, $r_к$, r_6 характеризуют соответственно сопротивления эмиттерного и коллекторного переходов и базового слоя.

Если источник э. д. с. $r_м i_1$ заменить эквивалентным источником тока, то получится вторая эквивалентная схема транзистора (рис. 1.31, б). В этой схеме ток источника зависит от тока входной цепи. Коэффициент

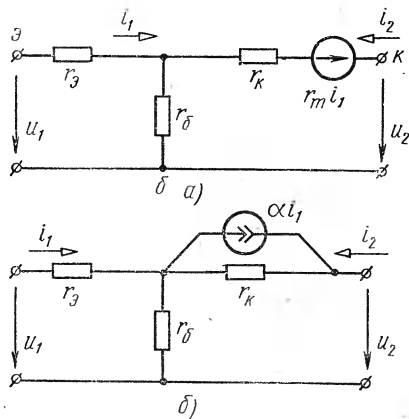


Рис. 1.31

$$\alpha = \frac{r_м}{r_к} = \left. \frac{\partial i_к}{\partial i_э} \right|_{u_к = \text{const}}$$

называют коэффициентом передачи эмиттерного тока.

Схемы на рис. 1.31 справедливы для транзисторов p - n - p - и n - p - n -типов.

На высоких частотах транзистор нельзя рассматривать как резистивный трехполюсник, поскольку необходимо учитывать влияние емкостей эмиттерного и особенно коллекторного p - n -переходов. Соответственно эквивалентная схема транзистора усложняется (рис. 1.32).

Управляемые (зависимые) источники напряжения и тока. В схемах замещения лампы и транзистора были введены схемные элементы — управляемые (зависимые) источники.

Управляемые источники представляют собой трехполюсные (в общем случае четырехполюсные) элементы, у которых напряжение (ток) одной пары зажимов пропорционально напряжению (току) другой пары зажимов.

Различают четыре типа управляемых источников.

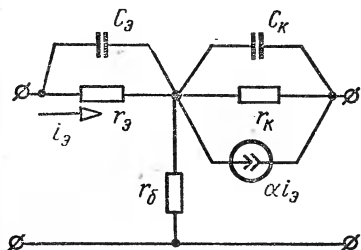


Рис. 1.32

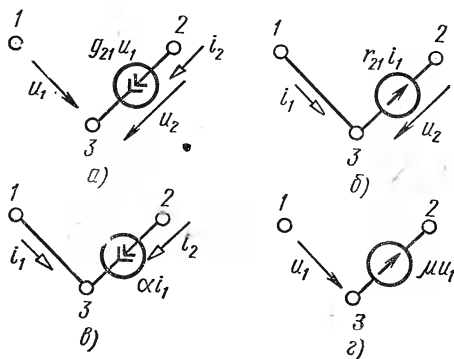


Рис. 1.33

Источник тока, управляемый напряжением (рис. 1.33, а), — это источник, у которого токи i_1 и i_2 определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= 0; \\ i_2 &= g_{21}u_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Источник напряжения, управляемый током (рис. 1.33, б), — это источник, у которого напряжения u_1 и u_2 определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0; \\ u_2 &= r_{21}i_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Источник тока, управляемый током, или идеальный усилитель тока (рис. 1.33, в) — это источник, характеризующийся уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0; \\ i_2 &= \alpha i_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Источник напряжения, управляемый напряжением, или идеальный усилитель напряжения (рис. 1.33, г) — это источник, характеризующийся уравнениями

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= 0; \\ u_2 &= \mu u_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Зависимые источники могут генерировать энергию. Так, например, для источника тока, управляемого напряжением, энергия,

поступающая в источник,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^2 u_k(\tau) i_k(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u_2(\tau) i_2(\tau) d\tau.$$

Если к зажимам 2, 3 источника (рис. 1.33, а) подключено сопротивление r , то напряжение

$$u_2 = -ri_2 = -rg_{21}u_1.$$

При этом энергия

$$W(t) = -rg_{21}^2 \int_{-\infty}^t u_1^2(\tau) d\tau < 0.$$

Отрицательный знак энергии свидетельствует о том, что энергия генерируется, т. е. зависимый источник — активный элемент.

Схемы с зависимыми источниками типа схем, показанных на рис. 1.25, 1.31, относятся к активным схемам.

Уравнения зависимых источников, имеющих четыре зажима (две пары различных зажимов), совпадают с уравнениями (1.23) — (1.26).

Индуктивный трехполюсник. На рис. 1.34 показан кольцевой сердечник с двумя катушками, имеющими соответственно числа витков

w_1 и w_2 . Ток каждой катушки создает в сердечнике магнитный поток, направление которого определяется по правилу буравчика*. Для направлений намотки, указанных на рисунке, магнитные потоки, обусловленные токами i_1 и i_2 , складываются.

Потокоосцепления каждой катушки представляют собой функции двух токов:

$$\Psi_1 = \Psi_1(i_1, i_2); \quad \Psi_2 = \Psi_2(i_1, i_2).$$

Функции Ψ_1 и Ψ_2 в общем случае нелинейны и выражаются в виде семейств нелинейных характеристик (рис. 1.35, а, б).

Если материал сердечника можно считать линейным ($\mu = \text{const}$), то потокоосцепления Ψ_1 и Ψ_2 будут линейными функциями токов:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= L_{11}i_1 + M_{12}i_2; \\ \Psi_2 &= M_{21}i_1 + L_{22}i_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Слагаемое $L_{11}i_1$ ($M_{12}i_2$) характеризует потокоосцепление катушки w_1 , вызванное током i_1 (i_2); слагаемое $M_{21}i_1$ ($L_{22}i_2$) характеризует потокоосцепление катушки w_2 , обусловленное током i_1 (i_2).

Параметры

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1} \Big|_{i_2=0}, \quad L_2 = \frac{\Psi_2}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

* Можно считать, что магнитный поток замыкается только по сердечнику.

называют собственными индуктивностями катушек, параметры

$$M_{12} = \frac{\Psi_1}{i_2} \Big|_{i_1=0}, \quad M_{21} = \frac{\Psi_2}{i_1} \Big|_{i_2=0}$$

— взаимными индуктивностями катушек.

Собственные индуктивности всегда положительны и определяются выражениями (см. § 1.6)

$$L_1 = \mu_0 \mu \frac{\omega_1^2 S}{l}; \quad L_2 = \mu_0 \mu \frac{\omega_2^2 S}{l}.$$

Взаимные индуктивности в зависимости от направления намотки катушек могут быть положительными или отрицательными; $M_{12} > 0$, $M_{21} > 0$ ($M_{12} < 0$, $M_{21} < 0$), если магнитные потоки, обусловленные токами i_1 и i_2 , складываются (вычитаются). Для трехполюсника на рис. 1.34 взаимные индуктивности положительны.

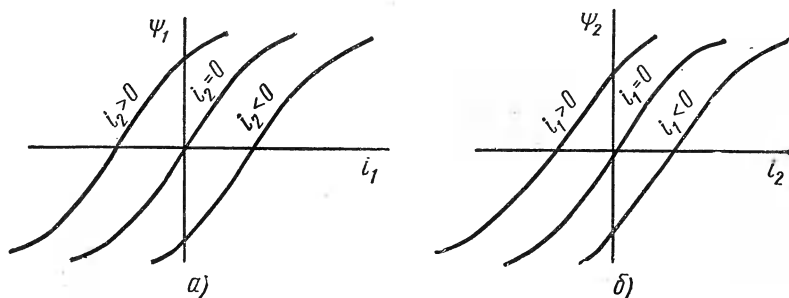


Рис. 1.35

Взаимную индуктивность вычисляют по аналогии с собственной индуктивностью (см. § 1.6):

$$M_{12} = \frac{\Psi_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{\omega_1 B S}{H l / \omega_2} = \mu_0 \mu \frac{\omega_1 \omega_2 S}{l},$$

где B и H — магнитная индукция и напряженность магнитного поля в сердечнике, вызванные током i_2 при $i_1 = 0$. Нетрудно видеть, что $M_{21} = M_{12}$. Это равенство отражает взаимность индуктивного трехполюсника.

При условии, что магнитный поток замыкается только по сердечнику, для рассматриваемого трехполюсника

$$M_{12} = M_{21} = M = \sqrt{L_1 L_2}$$

или

$$K_c = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1,$$

где K_c — коэффициент связи катушек. В реальных условиях $K_c = |M| / \sqrt{L_1 L_2} < 1$, так как часть магнитного потока, обусловленного током катушки, замыкается помимо сердечника.

Напряжения на зажимах трехполосника:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \\ u_2 &= \frac{d\Psi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Слагаемые $L_1 di_1/dt$ и $L_2 di_2/dt$ определяют напряжения, уравновешивающие э. д. с. самоиндукции; слагаемые $M di_2/dt$ и $M di_1/dt$ — напряжения, уравновешивающие э. д. с. взаимной индукции.

Условное обозначение индуктивного трехполосника (см. рис. 1.34) дано на рис. 1.36. Зажимы 1 и 2 отмечены точками и называются одноименными или однополярными; это означает, что при одинаковых направлениях токов i_1 и i_2 относительно одноименных зажимов магнитные потоки, обусловленные токами i_1 и i_2 , складываются.

Если направление намотки катушек неизвестно, то одноименные зажимы могут быть определены экспериментально.

Рис. 1.36

Трехполосник, описываемый уравнениями (1.28) при $K_c = 1$, называют

совершенным трансформатором. Подставляя в уравнение (1.28) выражения для L_1 , L_2 и M , приведенные ранее, получают

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\omega_2^2 + \omega_1 \omega_2}{\omega_1 \omega_2 + \omega_1^2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

т. е. отношение напряжений u_2/u_1 постоянно и равно отношению числа витков катушек ω_2/ω_1 ; последнее отношение называют коэффициентом трансформации.

Трехполосник на рис. 1.34 и 1.36 описывается уравнениями (1.28) при условии, что потерями энергии в нем пренебрегают. Вся энергия, потребляемая совершенным трансформатором, запасается (обратимо) в магнитном поле. Эту энергию вычисляют с помощью уравнений (1.28):

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^2 u_k(\tau) i_k(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t (L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M i_1 di_2 + M i_2 di_1) = \\ &= \frac{L_1 i_1^2(t)}{2} + \frac{L_2 i_2^2(t)}{2} + M i_1(t) i_2(t) \end{aligned}$$

[если $i_1(-\infty) = 0$; $i_2(-\infty) = 0$].

Аналогичными свойствами обладает четырехполосный индуктивный элемент, имеющий две пары различных зажимов.

§ 2.1. Граф электрической цепи и некоторые его подграфы

Электрическая цепь характеризуется совокупностью элементов, из которых она состоит, и способом их соединения (см. гл. 1). Рассмотрим соотношения в электрической цепи, обусловленные способом соединения элементов.

Соединение элементов электрической цепи наглядно отображается ее схемой. Пусть цепь состоит только из двухполюсных элементов. В простейшем случае такие элементы могут быть соединены *последовательно* или *параллельно*.

Схема последовательного соединения двухполюсных элементов показана на рис. 2.1. В этом соединении любые два соседних элемента имеют один общий зажим. В любой момент времени ток в каждом элементе имеет одинаковое значение. Напряжение на зажимах всего соединения равно сумме напряжений на отдельных элементах:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k. \quad (2.1)$$

Схема параллельного соединения двухполюсных элементов показана на рис. 2.2. В этом соединении все элементы присоединены к одной и той же паре узлов. Для любого момента времени напряжение на каждом элементе одинаково. Ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов всех элементов:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \sum_{k=1}^n i_k. \quad (2.2)$$

Соотношения (2.1) и (2.2) справедливы для соединений любых элементов: линейных и нелинейных, с постоянными и переменными во времени параметрами, резистивных, индуктивных и т. д. Кроме того, схемы на рис. 2.1 и 2.2 можно понимать и как соединения ветвей, причем ветви могут состоять из каких-либо элементов, в свою очередь соединенных различным образом. И в этом случае соотношения (2.1) и (2.2) будут справедливы.

Таким образом, выражения (2.1) и (2.2) представляют собой примеры простейших соотношений, которые определяются только способом соединения элементов, или, как говорят, *геометрией* (топологией) соединений.

Топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоит ветвь. Поэтому целесообразно каждую ветвь схемы электрической цепи изобразить отрезком линии. Например, на рис. 2.3 приведена схема разветвленной электрической цепи. Если каждую ветвь схемы заменить отрезком линии, получается геометрическая фигура, показанная на рис. 2.4. При этом за ветвь *l* принимается

последовательное соединение элементов $\mathcal{E}_1$ и r_1 , за ветвь b — параллельное соединение элементов r_6 и J_6 и т. д.

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называют графом электрической цепи.

Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называют ветвью графа. Граничные (концевые) точки ветви графа называют узлами графа.

Граф — абстрактное математическое понятие, не обязательно соответствующее электрической цепи. В виде графа могут быть изображены схемы железнодорожных путей, состояния переключающих систем, отношения родства между группой людей, положение участников хоккейного чемпионата и т. д.

Если в общем случае определить ребро как отрезок линии вместе с его

граничными (концевыми) точками, тогда граф можно определить как множество ребер, причем в этом множестве все общие точки ребер являются граничными. Граничную точку ребра называют вершиной.

В электротехнической литературе вместо терминов «ребро» и «вершина» применяют термины «ветвь» и «узел».

Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы,

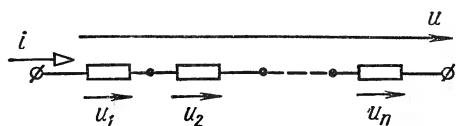


Рис. 2.1

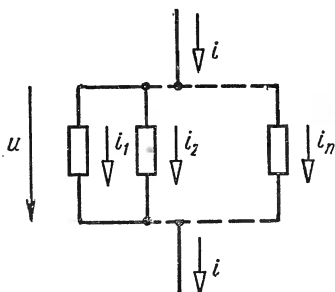


Рис. 2.2

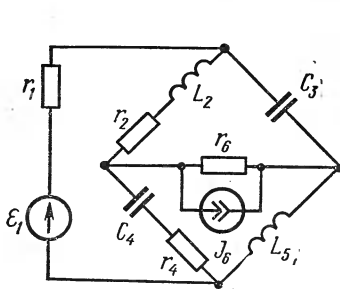


Рис. 2.3

называют ориентированным. В противном случае граф считают неориентированным.

Граф одной и той же схемы электрической цепи может быть изображен различными способами. Например, граф схемы на рис. 2.3 можно начертить, как это показано на рис. 2.5. Однако топологические свойства графов (рис. 2.4; 2.5) одинаковы. Такие графы называют изоморфными. У изоморфных графов существует взаимно однозначное соответствие между узлами и ветвями. Если некоторая пара узлов в одном графе соединена ветвью, то

пара соответствующих узлов в изоморфном графе также должна быть соединена соответствующей ветвью.

Некоторые подграфы графа. Подграфом графа называют часть графа.

Согласно этому определению подграфом может быть одна ветвь или один изолированный узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащееся в данном графе.

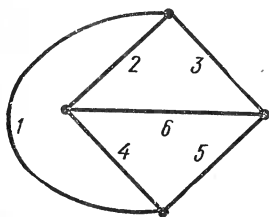


Рис. 2.4

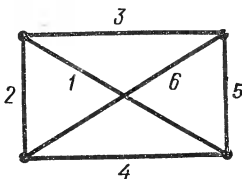


Рис. 2.5

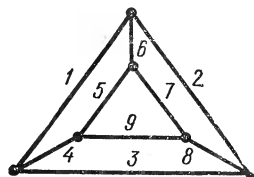


Рис. 2.6

В теории электрических цепей большое значение имеют такие подграфы: путь, контур, дерево, связи (дополнение дерева) и сечение. Все определения (пути, контура и т. д.), сформулированные для графа, применимы и к схемам электрической цепи.

Путь — это упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседних ветви имеют общий узел, причем любая ветвь и любой узел встречаются в этом пути только один раз. Например, в графе на рис. 2.6 ветви 4—1—2—8, 4—1—6—7,

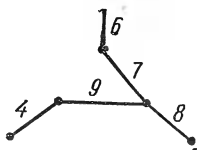
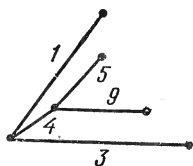
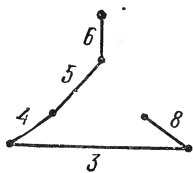


Рис. 2.7

4—3—8, 4—3—2—6—7, 5—7, 5—6—2—8 и 9 образуют пути между одной и той же парой узлов (узлов, к которым присоединена ветвь 9).

Контур — замкнутый путь, в котором один из узлов является начальным и конечным узлом пути. Например, в графе на рис. 2.6 ветви 4—1—2—8—9, 5—6—2—8—9, 4—3—8—9 образуют контуры.

Если между любой парой узлов графа (схемы) существует путь, то граф (схему) называют связным (связной).

Деревом связного графа (схемы) называют связный подграф (подсхему), содержащий все узлы графа (схемы), но ни одного контура. Примеры деревьев графа на рис. 2.6 приведены на рис. 2.7.

Ветви графа (схемы), которые дополняют дерево до исходного графа, называют ветвями связи (дополнением дерева). Отдельную ветвь связи называют также главной ветвью. Ветви связи деревьев графа на рис. 2.7. приведены на рис. 2.8.

Если граф (схема) содержит v ветвей и y узлов, то число ветвей любого дерева $d = y - 1$.

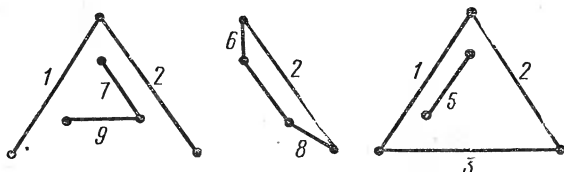


Рис. 2.6

Действительно, если число узлов $y = 2$, то дерево может содержать только одну ветвь. Добавление к этой ветви еще одной так, чтобы получился граф без контуров, увеличивает число узлов на единицу и т. д. для каждой новой ветви дерева.

Число ветвей связи графа

$$k = v - (y - 1) = v - y + 1.$$

Сечением графа (схемы) называют множество ветвей, удаление которых делит граф (схему) на два изолированных подграфа (подсхемы), один из которых в частном случае может быть изолированным узлом. Например, для графа на рис. 2.6 ветви 1—4—3, 1—5—9—3, 1—5—7—2 образуют сечения.

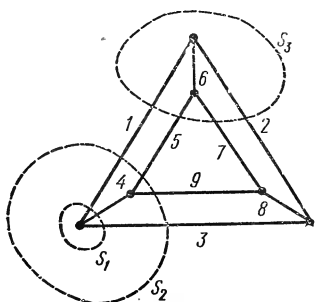


Рис. 2.9

Сечение можно наглядно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, рассекающей соответствующие ветви. Примеры таких поверхностей (S_1 , S_2 , S_3) для графа на рис. 2.6 показаны на рис. 2.9. Поверхность S_1 рассекает граф на две части, одна из которых — изолированный узел.

С понятием дерева связаны понятия главных контуров и главных сечений.

Главным контуром называют контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи. Другими словами, при соединении любой ветви связи с деревом образуется главный контур.

Главным сечением считают сечение, состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева. Каждая ветвь дерева позволяет образовать одно главное сечение.

Для любого выбранного дерева можно образовать свою систему главных контуров и сечений. При этом характерно, что каждый такой контур и каждое сечение будут отличаться от других хотя бы одной ветвью.

На рис. 2.10 и 2.11 показаны главные контуры и сечения, построенные на основе одного из деревьев графа рис. 2.6. Ветви дерева 4—9—7—6—8 отмечены более жирными линиями. Главные контуры (пронумерованы римскими цифрами) образуются ветвями 1—4—9—7—6 (I); 2—8—7—6 (II); 3—4—9—8 (III);

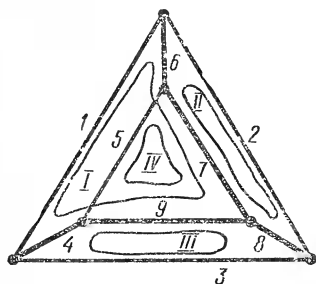


Рис. 2.10

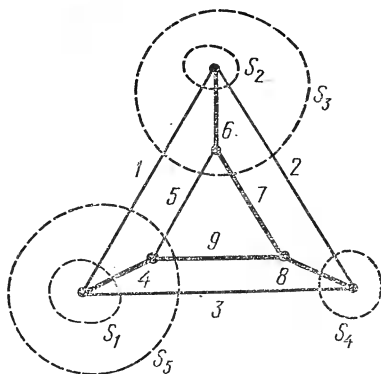


Рис. 2.11

5—7—9 (IV). Главные сечения содержат ветви 4—1—3 (S_1); 6—1—2 (S_2); 7—1—5—2 (S_3); 8—2—3 (S_4); 9—1—5—3 (S_5).

Число главных контуров равно числу ветвей связи (κ), а число главных сечений — числу ветвей дерева (δ).

§ 2.2. Законы Кирхгофа

Токи в ветвях электрической цепи и напряжения на зажимах ветвей удовлетворяют соотношениям (1.12) и (1.16), которые определяют первый и второй законы Кирхгофа.

Равенство (1.12) справедливо для любого узла или сечения; равенство (1.16) справедливо для любого контура. Суммирование выполняется для всех ветвей, сходящихся в узле (пересекаемых замкнутой поверхностью) или образующих контур.

Уравнения (1.12) и (1.16) не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоят ветви. Это топологические соотношения, которые могут быть составлены по графу цепи или по ее схеме. В дальнейшем при составлении уравнений цепи считается, что направление ветви графа, указанное стрелкой, совпадает с выбранным положительным направлением тока и напряжения ветви схемы (положительные направления тока и напряжения принимаются совпадающими).

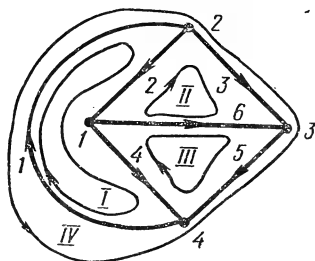


Рис. 2.12

В качестве примера можно составить уравнения по законам Кирхгофа для схемы на рис. 2.3, граф которой с указанием выбранных положительных направлений токов и напряжений, а также направлений обхода контуров представлен на рис. 2.12.

На основании первого закона Кирхгофа справедливы уравнения:

$$-i_2 + i_4 + i_6 = 0 \text{ (узел 1);}$$

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \text{ (узел 2);}$$

$$-i_3 + i_5 - i_6 = 0 \text{ (узел 3);}$$

$$i_1 - i_4 - i_5 = 0 \text{ (узел 4).}$$

На основании второго закона Кирхгофа получаются следующие уравнения:

$$u_1 + u_2 + u_4 = 0 \text{ (контур I);}$$

$$-u_2 + u_3 - u_6 = 0 \text{ (контур II);}$$

$$-u_4 + u_5 + u_6 = 0 \text{ (контур III);}$$

$$-u_1 - u_3 - u_5 = 0 \text{ (контур IV).}$$

В записанных уравнениях ток i_k и напряжение u_k обозначают ток и напряжение k -й ветви.

Сложение всех уравнений, записанных по первому закону Кирхгофа, дает тождество $0 \equiv 0$. Аналогичный результат получается при суммировании уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Таким образом, среди записанных уравнений есть линейно зависимые.

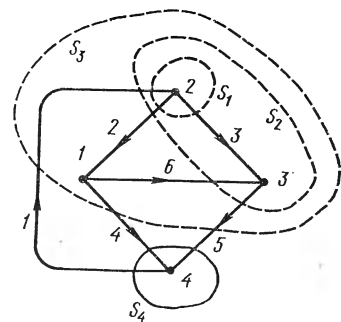


Рис. 2.13

Вместо уравнений по первому закону Кирхгофа для узлов можно составить уравнения по первому закону Кирхгофа для сечений (замкнутых поверхностей). При этом сечению замкнутой поверхности придается ориентация. На рис. 2.13 показаны четыре сечения $S_1 \div S_4$, для которых справедливы следующие уравнения (за положительные направления принимают направления токов из замкнутых поверхностей):

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (S_1);$$

$$-i_1 + i_2 + i_5 - i_6 = 0 \quad (S_2);$$

$$-i_1 + i_4 + i_5 = 0 \quad (S_3);$$

$$i_1 - i_4 - i_5 = 0 \quad (S_4).$$

Уравнение для сечения S_3 отличается от уравнения для сечения S_4 только знаками слагаемых. Следовательно, среди уравне-

ний, составленных для четырех сечений, по крайней мере одно является зависимым.

Вопрос о числе независимых уравнений, которые практически можно составить по законам Кирхгофа, весьма важен. Этот вопрос решают, применяя понятие дерева графа (схемы).

С помощью дерева образуется δ главных сечений и κ главных контуров. Главные сечения (главные контуры) отличаются друг от друга по крайней мере одной ветвью дерева (одной ветвью связи). Если для главных сечений или для главных контуров составляют уравнения по первому закону Кирхгофа, то они содержат по крайней мере по одному слагаемому, которого нет в других уравнениях. Таким образом, уравнения для главных сечений и главных контуров линейно независимы. Общее число линейно независимых уравнений, составляемых по законам Кирхгофа, равно числу всех ветвей:

$$\delta + \kappa = (y - 1) + v - (y - 1) = v.$$

Таким образом, по первому закону Кирхгофа для сечений составляют

$$\delta = y - 1 \quad (2.3)$$

независимых уравнений. Число независимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, равно

$$\kappa = v - y + 1. \quad (2.4)$$

Очевидно, что уравнения для сечений получаются как линейные комбинации уравнений для узлов. Например, уравнение для сечения S_2 представляет сумму уравнений для узлов 2 и 3, уравнение для сечения S_3 — сумму уравнений для узлов 1, 2 и 3. В общем случае уравнение для замкнутой поверхности получается суммированием уравнений для узлов, охватываемых этой поверхностью. Следовательно, число независимых уравнений для узлов совпадает с числом независимых уравнений для сечений (2.3).

Из сказанного вытекает значение топологического понятия дерево: *дерево позволяет образовать независимые контуры и сечения и, следовательно, формировать независимые уравнения по законам Кирхгофа.*

Пример 2.1. Составить независимые уравнения по законам Кирхгофа для графа рис. 2.12.

Решение. Сначала выбираем дерево графа (ветви 2—3—5). Дерево, главные контуры и сечения показаны на рис. 2.14. За направление обхода контура принимаем направление ветви связи контура, за направление сечения — направление, совпадающее с направлением ветви дерева сечения.

По первому закону Кирхгофа, для сечений

$$i_2 - i_4 - i_6 = 0 \quad (S_1);$$

$$i_3 + i_6 + i_4 = 0 \quad (S_2);$$

$$i_5 + i_4 - i_1 = 0 \quad (S_3).$$

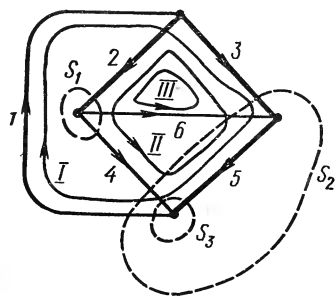


Рис. 2.14

Если за положительное направление тока принять направление к узлу, то уравнения для сечений S_1 и S_3 совпадают с уравнениями для узлов.

По второму закону Кирхгофа,

$$\begin{aligned} u_1 + u_3 + u_5 &= 0 & (\text{контур } I); \\ u_4 - u_5 - u_3 + u_2 &= 0 & (\text{контур } II); \\ u_6 - u_3 + u_2 &= 0 & (\text{контур } III). \end{aligned}$$

§ 2.3. Топологические матрицы графа и их свойства

Уравнения по законам Кирхгофа для токов и напряжений могут быть записаны в матричной форме. Например, независимые уравнения для трех узлов графа на рис. 2.12

$$\left. \begin{aligned} -i_2 &+ i_4 &+ i_6 &= 0; \\ -i_1 + i_2 + i_3 &&&= 0; \\ &-i_3 &+ i_5 - i_6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

эквивалентны матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично в матричной форме можно записать уравнения для сечений и контуров. Левая часть таких уравнений представляет собой произведение матрицы коэффициентов на столбцовую матрицу переменных. В правой части уравнения записана столбцовая матрица, все элементы которой равны нулю.

Матрицы коэффициентов уравнений Кирхгофа состоят только из элементов $+1$, -1 и 0 . Значения этих элементов определяются только структурой графа (схемы) и могут быть найдены при рассмотрении графа (схемы).

В соответствии с видом уравнений Кирхгофа различают три топологические матрицы: матрицу соединений (узловую) A , матрицу сечений Q и матрицу контуров B .

Матрица соединений (узловая матрица) A — это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для узлов. Строки этой матрицы соответствуют узлам, столбцы — ветвям. Если элемент матрицы A обозначить через a_{ij} , т. е.

$$A = [a_{ij}]$$

(i — номер строки, j — номер столбца), то можно сформулировать следующее правило составления матрицы:

$a_{ij} = 1$, если ветвь j соединена с узлом i и направлена от узла;

$a_{ij} = -1$, если ветвь j соединена с узлом i и направлена к узлу;

$a_{ij} = 0$, если ветвь j не соединена с узлом i .

Обычно число строк матрицы A равно числу независимых узлов, т. е. $d = y - 1$. Если узловую матрицу записывают для всех y узлов, то ее обозначают A_n .

Пример 2.2. Составить матрицы A_n и A для графа на рис. 2.15.

Решение. Матрица A_n , записанная для всех 5 узлов, имеет вид

$$A_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Вычеркивая любую строку, получают матрицу A . Если вычеркнуть строку, соответствующую узлу 5, то

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

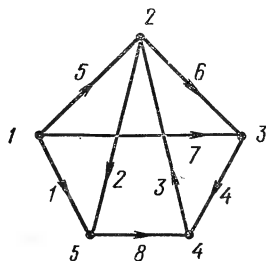


Рис. 2.15

Сумма элементов каждого столбца матрицы A_n равна нулю, так как каждый столбец матрицы содержит только одну $+1$ и одну -1 , а остальные элементы столбца нулевые. В матрице A может отсутствовать одна строка матрицы A_n , соответствующая любому узлу.

Если обозначить через

$$\mathbf{i}^{(v)} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_v \end{bmatrix}$$

столбцовую матрицу токов всех ветвей, то уравнение

$$A \mathbf{i}^{(v)} = 0 \quad (2.5)$$

будет представлять матричную запись первого закона Кирхгофа.

С помощью матрицы A нетрудно выразить напряжения всех ветвей через потенциалы узлов. Для этого элементы k -й строки матрицы A следует умножить на φ_k — потенциал k -го узла, затем сложить элементы каждого столбца. В j -м столбце может быть $+1$ в k -й строке и -1 в i -й строке, если j -я ветвь соединена между k -м и i -м узлами и направлена от k -го узла. Тогда напряжение j -й ветви $u_j = \varphi_k - \varphi_i$.

Таким образом, матрицы напряжений ветвей и узловых потенциалов связаны равенством

$$u^{(в)} = A^T \Phi, \quad (2.6)$$

где

$$u^{(в)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_B \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_d \end{bmatrix}$$

— соответственно столбцовые матрицы напряжений ветвей и узловых потенциалов, причем потенциал последнего узла $\Phi_{d+1} = \Phi_y = 0$;

A^T — транспонированная узловая матрица.

Матрица сечений Q — это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для сечений. Строки матрицы Q соответствуют сечениям, столбцы — ветвям.

Элемент q_{ij} матрицы $Q = [q_{ij}]$ определяется следующим образом:

$q_{ij} = 1$, если ветвь j содержится в сечении i и направлена согласно с направлением сечения (т. е. с направлением для замкнутой поверхности);

$q_{ij} = -1$, если ветвь j содержится в сечении i и направлена противоположно направлению сечения;

$q_{ij} = 0$, если ветвь j не содержится в сечении i .

Если матрица Q составлена для главных сечений, то ее называют матрицей главных сечений. При этом за положительное направление сечения обычно принимают направление ветви дерева данного сечения.

Пример 2.3. Для графа на рис. 2.16 записать матрицу главных сечений.

Решение. Выбранное дерево (ветви 1—2—3—4) и сечения показаны на рис. 2.16. Номер сечения считаем совпадающим с номером ветви дерева. Матрица сечений

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Число строк матрицы Q равно числу независимых сечений d .

Матрица Q может быть получена с помощью линейной комбинации строк матрицы A_n . Так, в матрице Q (см. пример 2.3) строки 1 и 4 совпадают со строками 1 и 3 матрицы A_n (см. пример 2.2). Строку 2 матрицы Q получаем как сумму строк 1 и 5

матрицы A_n , умноженных на -1 ; строка 3 матрицы Q равна сумме строк 3 и 4 матрицы A_n .

Закон Кирхгофа для сечений в матричной форме записывают следующим образом:

$$Qi^{(b)} = 0. \quad (2.7)$$

Если матрицу напряжений ветвей дерева обозначить через $u^{(d)}$, то

$$u^{(b)} = Q^T u^{(d)}, \quad (2.8)$$

т. е. напряжение любой ветви схемы определяют через напряжения ветвей дерева.

Если ветвям дерева присвоены первые номера, то матрица главных сечений может быть разделена на две подматрицы:

$$Q = [I \ F],$$

где I — единичная подматрица порядка $y-1$, столбцы которой соответствуют ветвям дерева; F — подматрица, столбцы которой соответствуют ветвям связи (см. пример 2.3).

Матрица контуров (контурная матрица соединения ветвей) B — это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки матрицы B соответствуют контурам, столбцы — ветвям.

Элемент b_{ij} матрицы $B = [b_{ij}]$ определяется следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если ветвь j содержится в контуре i и направление ветви совпадает с направлением обхода контура;

$b_{ij} = -1$, если ветвь j содержится в контуре i и направление ветви противоположно направлению обхода контура;

$b_{ij} = 0$, если ветвь j не содержится в контуре i .

Матрицу B , записанную для главных контуров, называют матрицей главных контуров. При этом за направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура.

Пример 2.4. Для графа на рис. 2.17 составить матрицу главных контуров.

Решение. Выбранное дерево (ветви 1—2—3—4) и контуры показаны на рис. 2.17. Номера контуров обозначаем римскими цифрами. Матрица контуров

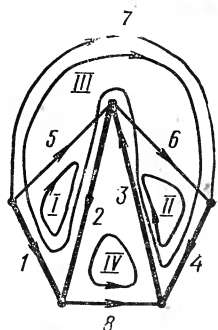


Рис. 2.17

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I \\ II \\ III \\ IV \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Число строк матрицы B равно числу независимых контуров k . Если матрица контуров составлена для большего числа контуров, то ее обозначают B_n .

Второй закон Кирхгофа для напряжений в матричной форме записывают следующим образом:

$$\mathbf{B}\mathbf{u}^{(B)} = 0. \quad (2.9)$$

Токи всех ветвей могут быть выражены как линейные комбинации токов ветвей связи. Можно считать, что в каждом контуре замыкается контурный ток, равный току ветви связи этого контура. Если элементы j -го столбца матрицы $\mathbf{B}$ умножить соответствующим образом на контурные токи, то сумма таких произведений и будет выражением тока j -й ветви через контурные токи (через токи ветвей связи). Этот результат может быть записан в виде матричного соотношения

$$\mathbf{i}^{(B)} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}^{(K)}, \quad (2.10)$$

где $\mathbf{i}^{(K)}$ — столбцовая матрица контурных токов.

Если ветвям дерева присвоены первые номера, то матрица главных контуров состоит из двух подматриц:

$$\mathbf{B} = [-\mathbf{F}^T \quad \mathbf{1}],$$

где $\mathbf{F}$ — подматрица матрицы сечений $\mathbf{Q}$, составленная на основании того же самого дерева (см. примеры 2.3 и 2.4); $\mathbf{1}$ — единичная подматрица порядка $k = v - y + 1$.

Пример 2.5. Проиллюстрировать матричные соотношения (2.5) ÷ (2.10) на примере графов рис. 2.15 ÷ 2.17.

Решение. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ графов на рис. 2.15 ÷ 2.17 записаны в примерах 2.2 ÷ 2.4. Матрицы токов и напряжений ветвей содержат по восемь элементов:

$$\mathbf{i}^{(B)} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^{(B)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}.$$

Выполняя умножение матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{i}^{(B)}$, легко получить уравнения

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_5 + i_7 &= 0; \\ i_2 - i_3 - i_5 + i_6 &= 0; \\ i_4 - i_6 - i_7 &= 0; \\ i_3 - i_4 - i_8 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которые, как видно из графа на рис. 2.15, представляют собой уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2, 3 и 4.

Умножая матрицу Q на матрицу $i^{(B)}$, можно получить уравнения по первому закону Кирхгофа для сечений на рис. 2.16:

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_5 + i_7 &= 0; \\ i_2 - i_5 - i_7 - i_8 &= 0; \\ i_3 - i_6 - i_7 - i_8 &= 0; \\ i_4 - i_6 - i_7 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В правильности этих уравнений нетрудно убедиться непосредственно из рассмотрения графа на рис. 2.16.

Умножение матрицы B на матрицу $u^{(B)}$ дает уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров на рис. 2.17:

$$\left. \begin{aligned} -u_1 + u_2 + u_5 &= 0; \\ u_3 + u_4 + u_6 &= 0; \\ -u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_7 &= 0; \\ u_2 + u_3 + u_8 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для иллюстрации соотношений (2.6), (2.8) и (2.10) необходимо записать матрицы узловых потенциалов, напряжений ветвей дерева и контурных токов:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}; \quad u^{(L)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}; \quad i^{(K)} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_{11} \\ i_{111} \\ i_{1V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix}.$$

Матрица Φ содержит потенциалы всех узлов, кроме $\varphi_5 = 0$, поскольку в матрице A (см. пример 2.2) отсутствует строка, соответствующая узлу 5. Произведение

$$A^T \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}.$$

Умножая матрицы, получим соотношения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1; & u_2 &= \varphi_2; & u_3 &= -\varphi_2 + \varphi_4; & u_4 &= \varphi_3 - \varphi_4; & u_5 &= \varphi_1 - \varphi_2; \\ u_6 &= \varphi_2 - \varphi_3; & u_7 &= \varphi_1 - \varphi_3; & u_8 &= -\varphi_4. \end{aligned}$$

Справедливость этих равенств очевидна (см. рис. 2.15).

Аналогично при умножении матрицы Q^T на матрицу $u^{(L)}$ получаются выражения:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1; & u_2 &= u_2; & u_3 &= u_3; & u_4 &= u_4; & u_5 &= u_1 - u_2; & u_6 &= -u_3 - u_4; \\ u_7 &= u_1 - u_2 - u_3 - u_4; & u_8 &= -u_2 - u_3. \end{aligned}$$

Первые четыре равенства определяют напряжения ветвей дерева, остальные — напряжения ветвей связи через напряжения ветвей дерева. Правильность этих равенств очевидна из рис. 2.16.

Умножение матрицы $\mathbf{B}^T$ на вектор контурных токов приводит к соотношениям:

$$i_1 = -i_I - i_{III} = -i_5 - i_7;$$

$$i_2 = i_I + i_{III} + i_{IV} = i_5 + i_7 + i_8;$$

$$i_3 = i_{II} + i_{III} + i_{IV} = i_6 + i_7 + i_8;$$

$$i_4 = i_{II} + i_{III} = i_6 - i_7;$$

$$i_5 = i_I; i_6 = i_{II}; i_7 = i_{III}; i_8 = i_{IV}.$$

Первые четыре соотношения выражают токи ветвей дерева через контурные токи (токи ветвей связи), остальные — токи ветвей связи, равные соответствующим контурным токам. Полученные соотношения легко составить и непосредственно по графу на рис. 2.17.

Матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{B}$ позволяют выразить алгебраическим языком топологию схем, что существенно при анализе сложных цепей с помощью цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Следует определить соотношения между этими матрицами, а также ряд их свойств.

Соотношения между топологическими матрицами. Если матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{B}$ составлены для одного и того же графа (схемы), то они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathbf{AB}^T = \mathbf{0}; \quad (2.11)$$

$$\mathbf{QB}^T = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Справедливость этих равенств легко показать на примерах 2.2 ÷ 2.4.

Докажем справедливость этих равенств в общем случае. Так, вычисление произведения $\mathbf{AB}^T$ сводится к вычислению произведений элементов матриц $a_{ij}b_{kj}$ и суммированию таких произведений. Произведение $a_{ij}b_{kj}$ отлично от нуля, если ветвь j присоединена к узлу i и входит в контур k (рис. 2.18). Но в таком случае всегда будет еще ненулевое произведение $a_{il}b_{kl}$, соответствующее ветви l , присоединенной к узлу i и принадлежащей также контуру k . При любых ориентациях ветвей j , l и контура k сумма

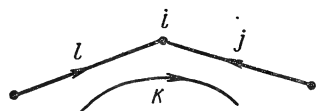


Рис. 2.18

при любых ориентациях ветвей j , l и контура k сумма

$$a_{ij}b_{kj} + a_{il}b_{kl} = 0.$$

Например, для подграфа на рис. 2.18

$$a_{ij}b_{kj} + a_{il}b_{kl} = i \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ l \end{matrix} = 0.$$

Аналогично доказывается и равенство (2.12).

Если к выражениям (2.11) и (2.12) применить операцию транспонирования*, то

$$\mathbf{BA}^T = \mathbf{0}; \quad (2.13)$$

$$\mathbf{BQ}^T = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

* Известно, что $[\mathbf{ABC} \dots]^T = \dots \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Из соотношения (2.12) вытекает справедливость отмеченного положения: если ветвям дерева присвоены первые номера, то матрицы Q и B имеют вид

$$Q = [1 \ F]; \quad B = [-F^T \ 1].$$

Действительно, если $QB^T = 0$ и $Q = [1 \ F]$, то

$$B^T = \begin{bmatrix} -F \\ 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -F^T \\ 1 \end{bmatrix}^T = [-F^T \ 1].$$

Целесообразно установить связь между матрицами Q , B и A . Пусть матрица A разделена на две подматрицы:

$$A = [A_d \ A_c],$$

где A_d — подматрица, соответствующая ветвям некоторого дерева; A_c — подматрица, соответствующая ветвям связи. Тогда

$$Ai^{(B)} = [A_d A_c] \begin{bmatrix} i^{(d)} \\ i^{(c)} \end{bmatrix} = A_d i^{(d)} + A_c i^{(c)} = 0, \quad (2.15)$$

где $i^{(d)}$ и $i^{(c)}$ — соответственно матрицы токов ветвей дерева и ветвей связи.

Если подматрица дерева A_d неособенная*, то обе части уравнения (2.15) можно умножить на обратную матрицу A_d^{-1} . При этом

$$i^{(d)} + A_d^{-1} A_c i^{(c)} = 0,$$

или

$$[1 \ A_d^{-1} A_c] \begin{bmatrix} i^{(d)} \\ i^{(c)} \end{bmatrix} = Qi^{(B)} = 0.$$

Таким образом, матрица сечений

$$Q = [1 \ A_d^{-1} A_c] = A_d^{-1} A, \quad (2.16)$$

а ее подматрица, соответствующая ветвям связи,

$$F = A_d^{-1} A_c.$$

Матрица контуров

$$B = [-F^T \ 1] = [-A_c^T (A_d^{-1})^T \ 1]. \quad (2.17)$$

Как видно из равенств (2.16) и (2.17), матрицы Q и B могут быть сформированы из матрицы A . Следует подчеркнуть, что матрицы (2.16) и (2.17) записаны для главных сечений и главных контуров, соответствующих одному и тому же дереву. Единичные подматрицы в матрицах Q и B имеют различный поря-

* Неособенной называют квадратную матрицу, определитель которой отличен от нуля. Если A_d — неособенная матрица, то ее определитель $\det A_d \neq 0$ и существует матрица A_d^{-1} , называемая обратной матрицей для матрицы A_d . Произведение $A_d^{-1} A_d = A_d A_d^{-1} = 1$ (1 — единичная матрица).

док: в матрице $Q(B)$ порядок единичной подматрицы равен $y-1$ ($v-y+1$).

Неособенные подматрицы топологических матриц. Неособенные подматрицы некоторой матрицы определяют ранг этой матрицы. Рангом матрицы называют наивысший порядок неособенной подматрицы, содержащейся в матрице.

Ранг матрицы равен числу ее линейно независимых строк (столбцов). Как было показано, число линейно независимых строк матриц A , B и Q равно числу независимых уравнений, составляемых по соответствующему закону Кирхгофа. Таким образом, ранг матриц A и Q графа (схемы) равен числу ветвей дерева:

$$\partial = y - 1.$$

Ранг матрицы B графа (схемы) равен числу ветвей связи, т. е.

$$\kappa = v - y + 1.$$

Если из столбцов матрицы A образовать все возможные подматрицы порядка $\partial = y - 1$, то все неособенные подматрицы порядка ∂ матрицы A соответствуют деревьям, причем определитель таких подматриц равен ± 1 .

Это утверждение можно доказать в общем случае. Дерево рассматривают как самостоятельный граф и составляют для него узловую матрицу A_d . Матрица A_d — квадратная порядка $\partial = y - 1$. Ранг матрицы A_d , как любой узловой матрицы, равен числу линейно независимых строк, т. е. ∂ . Порядок матрицы A_d равен ее рангу, следовательно, матрица A неособенная.

Любая неособенная подматрица, составленная из $y-1$ столбцов матрицы A , имеет линейно независимые столбцы. Эти столбцы могут соответствовать только ветвям дерева, поскольку столбцы матрицы A , соответствующие ветвям любого контура или подграфа, содержащего контур, на основании равенства (2.11) линейно зависимы. Таким образом, квадратная подматрица A_d порядка $y-1$ матрицы A является неособенной, если только столбцы A_d соответствуют дереву.

Поскольку матрица A_d неособенная, т. е. ее определитель

$$\det A_d \neq 0,$$

то в матрице A_d обязательно найдется такой столбец, который содержит только одну $+1$ или только одну -1 . Выполняя разложение определителя по элементам этого столбца, можно записать

$$\det A_d = \pm 1 \cdot \Delta_{ij},$$

где Δ_{ij} — соответствующее алгебраическое дополнение. Так как $\det A_d \neq 0$, то алгебраическое дополнение содержит столбец, в котором имеется только одна $+1$ (или -1). Продолжая таким образом разложение определителя, получают

$$\det A_d = (\pm 1)(\pm 1) \dots (\pm 1) = \pm 1.$$

Например, для графа на рис. 2.15 определитель подматрицы A_1 матрицы A , соответствующей дереву $1-2-3-4$ (см. пример 2.2),

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

Если образовать подматрицу A_2 из столбцов $1-2-3-5$ матрицы A (ветви $1-2-3-5$ образуют подграф, содержащий контур), то

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом, если в матрице A найдены все неособенные подматрицы, то определены все деревья схемы.

Из равенства (2.16) можно доказать, что все неособенные подматрицы порядка $y-1$ матрицы Q также соответствуют деревьям схемы, причем определитель таких подматриц равен ± 1 .

Действительно, подматрица Q' порядка $y-1$ матрицы Q получается в результате умножения A_d^{-1} на подматрицу A' порядка $y-1$ матрицы A : $Q' = A_d^{-1} A'$, где A_d — подматрица матрицы A , соответствующая одному из деревьев схемы. Определитель произведения двух квадратных матриц, как известно, равен произведению их определителей. Поэтому, если подматрица A' соответствует любому дереву, то $\det A' = \pm 1$, $\det A_d^{-1} = \pm 1$ и $\det Q' = \pm 1$; если же подматрица A' не соответствует дереву, то $\det A' = 0$ и $\det Q' = 0$.

Определители квадратных подматриц любого порядка (до $y-1$ включительно), образованных из матриц A или Q , могут принимать значения только $+1$, -1 и 0 . Из выражения (2.17) следует, что определители квадратных подматриц любого порядка до $v-y+1$ включительно, образованных из матрицы B , могут принимать лишь значения $+1$, -1 и 0 .

Все неособенные подматрицы порядка $k = v - y + 1$ матрицы B соответствуют ветвям связи (дополнениям деревьев).

Пусть выбрано одно из деревьев схемы (первое дерево) и для главных контуров, которые получаются присоединением ветвей связи к этому дереву, составлена матрица B в виде (2.17). Можно выбрать другое дерево и для другой системы главных контуров записать матрицу контуров B' при условии, что порядок столбцов соответствует порядку столбцов в матрице B . Тогда матрица

$$B' = [B'_d \ B'_c],$$

где подматрица $B'_d (B'_c)$ соответствует тем же ветвям, что и подматрица $-F^T(1)$ в матрице (2.17), т. е. ветвям первого дерева

(ветвям связи первого дерева). По второму закону Кирхгофа,

$$\mathbf{B}'_{\mathbf{d}} \mathbf{u}_{\mathbf{d}} + \mathbf{B}'_{\mathbf{c}} \mathbf{u}_{\mathbf{c}} = 0,$$

где $\mathbf{u}_{\mathbf{d}}$ ($\mathbf{u}_{\mathbf{c}}$) — матрица напряжений ветвей первого дерева (ветвей связи первого дерева). Из записанного равенства матрица

$$\mathbf{u}_{\mathbf{c}} = -(\mathbf{B}'_{\mathbf{c}})^{-1} \mathbf{B}'_{\mathbf{d}} \mathbf{u}_{\mathbf{d}}. \quad (2.18)$$

Напряжение любой ветви связи может быть выражено как линейная комбинация напряжений ветвей дерева, так как существует путь по ветвям дерева между узлами ветви связи. Следовательно, в матричном соотношении (2.18) между матрицами $\mathbf{u}_{\mathbf{c}}$ и $\mathbf{u}_{\mathbf{d}}$ подматрица $\mathbf{B}'_{\mathbf{c}}$ должна быть неособенной, т. е. подматрица матрицы контуров, соответствующая ветвям связи любого дерева, является неособенной.

Если предположить, что $\mathbf{B}'_{\mathbf{c}}$ — неособенная подматрица порядка k матрицы $\mathbf{B}'$, то легко прийти к выводу, что $\mathbf{B}'_{\mathbf{c}}$ соответствует ветвям связи некоторого дерева, а $\mathbf{B}'_{\mathbf{d}}$ — ветвям дерева. В противном случае некоторые ветви, соответствующие столбцам $\mathbf{B}'_{\mathbf{d}}$, образуют контур и число независимых уравнений, по второму закону Кирхгофа, будет больше $k = v - y + 1$, что невозможно.

Таким образом, все неособенные подматрицы порядка k матрицы контуров соответствуют ветвям связи. Определители этих неособенных подматриц равны ± 1 (в случае матрицы главных контуров).

§ 2.4. Дуальные цепи

Дуальные графы. Дуальными называют два графа, если узловая матрица одного из них $\mathbf{A}_1$ равна контурной матрице другого $\mathbf{B}_2$ (и наоборот):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_2; \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2. \quad (2.20)$$

Из равенств (2.19) и (2.20) вытекает, что дуальные графы имеют одинаковое число ветвей. Кроме того, узлы одного графа соответствуют контурам второго и наоборот.

Для построения графа, дуального заданному, необходимо внутри каждого контура исходного графа поместить узел; один узел помещается вне графа. Затем каждую пару новых узлов соединят ветвью так, чтобы эта ветвь пересекала ветвь исходного графа. Ориентацию ветвей нового графа производят в соответствии с рис. 2.19, на котором показаны один контур исходного графа, узел и ветви дуального графа (обозначения ветвей и узла дуального графа имеют индекс d).

Сформулированное правило иллюстрируется рис. 2.20. Исходный граф показан на рис. 2.20, а; штриховые линии соответствуют построению дуального графа. На рис. 2.20, б изображен дуальный граф.

Любому дереву исходного графа соответствуют ветви связи дерева дуального графа и наоборот. Например, дереву $1-2-3-5$ (рис. 2.20, а) соответствуют ветви связи $1^d-2^d-3^d-5^d$ (ветви $1^d-2^d-3^d-5^d$ образуют связи дерева $4^d-6^d-7^d$).

Ветвям контура (сечения) исходного графа соответствуют ветви сечения (контура) дуального графа. Например, ветви $1-5-6$

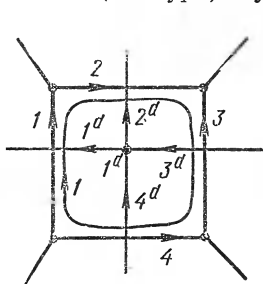


Рис. 2.19

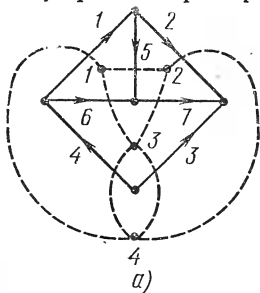


Рис. 2.20

образуют контур (рис. 2.20, а); ветви $1^d-5^d-6^d$ образуют сечение (рис. 2.20, б).

Последовательному соединению ветвей исходного графа соответствует параллельное соединение дуальных ветвей и наоборот. Например, ветви 3 и 4 соединены последовательно (рис. 2.20, а), ветви 3^d и 4^d — параллельно (рис. 2.20, б).

Если в некотором графе число контуров равно числу ветвей дерева: $\delta = \kappa$, то дуальный граф имеет такую же структуру, как исходный. Такие графы называют самодуальными (рис. 2.21, а, б).

Из правила построения дуального графа можно сделать вывод, что дуальный граф нельзя построить для любого графа. Дуальные графы существуют только для графов, которые могут быть изображены на плоскости без пересечения ветвей.

Такие графы называют планарными (плоскими). Например, граф на рис. 2.15 планарный, так как он может быть изображен без пересечений ветвей (см. рис. 2.17).

На рис. 2.22, а и б приведены примеры непланарных графов, так называемых графов Куратовского.

Дуальные элементы схемы. Двухполюсные элементы схемы называют дуальными, если зависимость $u(i)$ одного элемента совпадает с зависимостью $i(u)$ другого и наоборот.

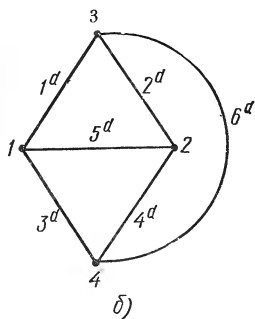
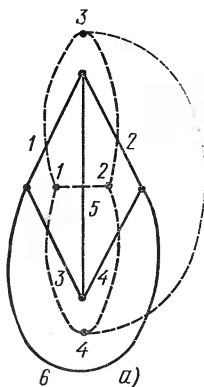


Рис. 2.21

Источник э. д. с. $e(t)$ и источник тока $J(t)$ будут дуальными, если $e(t) = J(t)$. Это равенство следует понимать как численное равенство э. д. с. (в вольтах) и тока источника тока (в амперах).

Для линейного сопротивления r дуальным элементом будет проводимость $g = r$ и наоборот. Действительно, при $g = r$ уравнение $u = ri$ совпадает с уравнением $i = gu^*$.

Равенство $g = r$ следует понимать как численное равенство проводимости (в сименсах) и сопротивления (в омах).

У дуальных нелинейных резистивных двухполюсников должны совпадать нелинейные зависимости $u(i)$ и $i(u)$.

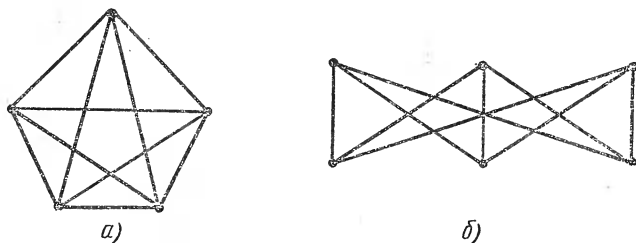


Рис. 2.22

Линейный индуктивный и емкостный двухполюсники характеризуются соответственно уравнениями

$$u = L \frac{di}{dt}; \quad i = C \frac{du}{dt},$$

откуда видно, что индуктивность L и емкость C — дуальные элементы при $L = C$. Равенство $L = C$ следует понимать как численное равенство индуктивности (в генри) и емкости (в фарадах).

В общем случае нелинейных индуктивных и емкостных двухполюсников дуальность означает совпадение нелинейных характеристик $\Psi(i)$ и $q(u)$.

Принципиально можно говорить и о дуальности многополюсных элементов схемы. При этом два элемента считают дуальными, если математическое описание одного получают из математического описания другого заменой всех переменных, обозначающих напряжения (токи), на переменные, обозначающие токи (напряжения).

Построение и свойства дуальных схем. Две схемы электрических цепей, содержащих двухполюсные элементы, называют дуальными, если они имеют дуальные графы и каждому элементу одной схемы соответствует дуальный элемент другой.

Для построения схемы, дуальной заданной, строят дуальный граф и каждый элемент заданной схемы заменяют дуальным эле-

* Совпадение уравнений понимается следующим образом: если в первом уравнении напряжение (ток) заменить током (напряжением), то получается второе уравнение.

ментом. При построении дуального графа каждый двухполюсный элемент (e , J , r , L , C) следует рассматривать как отдельную ветвь.

На рис. 2.23 приведен пример схемы электрической цепи и штриховыми линиями показано построение дуального графа этой схемы. Дуальная схема изображена на рис. 2.24.

Для заданной схемы дуальная схема существует в том случае, если исходная является планарной, т. е. имеет планарный граф.

Основным свойством дуальных схем является совпадение уравнений, составленных по первому (второму) закону Кирхгофа, одной схемы с уравнениями, составленными по второму (первому) закону Кирхгофа другой схемы.

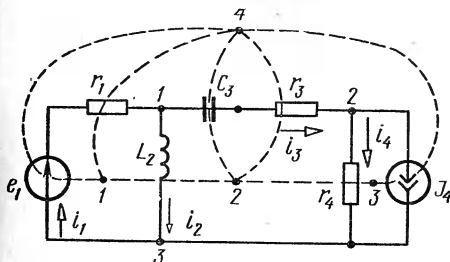


Рис. 2.23

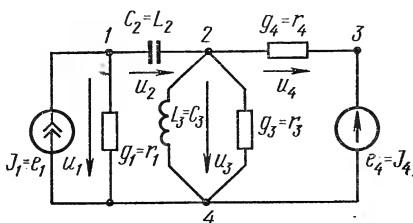


Рис. 2.24

Совпадение уравнений вытекает из равенств (2.17) и (2.18) и определения дуальных элементов.

Пример 2.6. Составить уравнение по законам Кирхгофа дуальных схем на рис. 2.23 и 2.24.

Решение. Для схемы на рис. 2.23, по первому закону Кирхгофа,

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0;$$

$$-i_3 + i_4 + J_4 = 0.$$

По второму закону Кирхгофа, уравнения для контуров имеют вид

$$r_1 i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} = e_1;$$

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt + r_3 i_3 + r_4 i_4 = 0.$$

Заменяя в записанных уравнениях все величины на дуальные, получим:

$$-u_1 + u_2 + u_3 = 0; \quad (a)$$

$$-u_3 + u_4 + e_4 = 0; \quad (б)$$

$$g_1 u_1 + C_2 \frac{du_2}{dt} = J_1; \quad (в)$$

$$-C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L_3} \int u_3 dt + g_3 u_3 + g_4 u_4 = 0. \quad (г)$$

При рассмотрении схемы на рис. 2.24 видим, что уравнения (а) и (б) представляют собой уравнения для контуров $g_1 - C_2 - L_3$ и $g_3 - g_4 - e_4$ дуальной схемы, а уравнения (в) и (г) — уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1 и 2 дуальной схемы (токи элементов выражены через напряжения на их зажимах).

Если для системы уравнений одной из дуальных схем найдено решение, то оно будет и решением уравнений другой схемы (при замене токов напряжениями и наоборот).

Равенство узловой и контурной матриц дуальных схем позволяет установить важное свойство матрицы контуров планарной схемы в случае, если контуры выбраны в виде элементарных ячеек схемы.

Контурам (ячейкам планарной схемы) ставят в соответствие узлы дуальной схемы. При этом матрица контуров $\mathbf{B}$ исходной схемы равна узловой матрице дуальной схемы. В § 2.5 доказано, что все неособенные подматрицы максимального порядка узловой матрицы находятся в однозначном соответствии с деревьями и их определители равны ± 1 . Так как дереву дуальной схемы соответствуют ветви связи исходной схемы, можно сделать вывод, что все неособенные подматрицы максимального порядка матрицы контуров (ячеек планарной схемы) находятся в однозначном соответствии с ветвями связи деревьев, причем определители этих подматриц равны ± 1 .

Таким образом, подматрицы порядка $v - y + 1$ матрицы контуров-ячеек имеют те же свойства, что и подматрицы матрицы главных контуров.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННЫХ Э. Д. С. И ТОКОВ

ГЛАВА 3

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЯХ

§ 3.1. Постановка задач анализа электрических цепей

В общем случае задача анализа электрической цепи состоит в определении токов в ветвях (элементах) цепи и напряжений на зажимах ветвей (элементов). При этом должны быть известны схема цепи, параметры пассивных элементов, а также законы изменения во времени э. д. с. и токов источников.

Э. д. с. источников э. д. с. и токи источников тока представляют собой внешние «возмущающие воздействия», или, кратко, «возмущения». Токи в ветвях цепи или напряжения на зажимах ветвей можно рассматривать как «реакции цепи» на приложенные возмущения.

Часто представляет интерес определение тока только в одной из ветвей или напряжения между одной парой зажимов при возмущении от одного источника. В этом случае можно говорить о расчете некоторой выходной величины (реакции) $y(t)$ при известной входной величине (возмущении) $x(t)$, т. е. о расчете зависимости

$$y = y(x),$$

где $y = y(t)$; $x = x(t)$.

Расчет реакций цепи в виде функций времени называют анализом во временной области.

Большое практическое значение имеют два вида возмущений: *постоянные* (неизменные во времени) и *изменяющиеся во времени* по периодическому, например по гармоническому, закону.

Если при постоянных (периодических) возмущениях реакции цепи также постоянны (меняются по периодическому закону), то режим в цепи называют *у с т а н о в и в ш и м с я*. В других случаях говорят о переходных (нестационарных) режимах. Установившийся режим представляет собой частный случай переходного и наступает теоретически при бесконечно длительном воздействии источников.

В линейных цепях реакции пропорциональны возмущениям. Поэтому удобно рассматривать реакцию, отнесенную к возмущению, если возмущение — постоянная величина. Отношение реакции

к возмущению, т. е. y/x , называемое в общем случае передаточной (схемной) функцией, может иметь различную размерность. Если y и x представляют собой напряжения (токи), то отношение y/x — безразмерная величина и называется коэффициентом передачи напряжения (тока). Если y — напряжение (ток), а x — ток (напряжение), то отношение y/x имеет размерность сопротивления (проводимости) и называется передаточным или взаимным сопротивлением (проводимостью)*.

Учитывая сказанное, задача анализа может ставиться как задача расчета коэффициентов передачи напряжения и тока, передаточных (взаимных) сопротивлений и проводимостей, т. е. передаточных функций.

При гармонически изменяющемся возмущении отношение реакции к возмущению при установившемся режиме может быть представлено как некоторая комплексная величина, модуль и аргумент которой зависят от частоты гармонического возмущения. Расчет частотных зависимостей относится к задачам анализа цепи в *частотной области*.

Для ряда цепей важное значение имеет определение энергетических показателей — энергий и мощностей генераторов и нагрузок, коэффициентов полезного действия и т. д. Расчет энергетических показателей сводится к расчету соответствующих напряжений и токов.

Следует отметить также еще ряд задач анализа цепей: вычисление изменения реакции цепи, обусловленного изменением параметров цепи; расчет характеристик чувствительности цепи к изменениям параметров; определение условий устойчивой работы цепи; исследование свойств передаточных функций (во временной и частотной областях). Решение этих задач в первую очередь требует умения рассчитывать токи и напряжения элементов цепи.

§ 3.2. Цепи с сопротивлением r и индуктивностью L

Последовательная цепь. На рис. 3.1 показана схема электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности L , а также источника постоянной э. д. с. При замыкании ключа источник подключается к ветви L, r .

Для этой цепи при замкнутом ключе, по второму закону Кирхгофа,

$$u_L + u_r = \mathcal{E},$$

где u_L, u_r — соответственно напряжения на индуктивности и сопротивлении. Учитывая выражения для напряжений

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_r = ri,$$

* В частном случае, когда y и x — напряжение и ток одной ветви, отношение y/x называют входным сопротивлением (проводимостью) ветви.

данную цепь характеризуют следующим дифференциальным уравнением:

$$L \frac{di}{dt} + ri = \mathcal{E}$$

или

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{\mathcal{E}}{r}, \quad (3.1)$$

где $\tau = L/r$.

Уравнение (3.1) представляет собой обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Чтобы решить это уравнение, сначала находят общее решение $i_{\text{св}}$ однородного уравнения, т. е. уравнения с правой частью, равной нулю:

$$\tau \frac{di_{\text{св}}}{dt} + i_{\text{св}} = 0. \quad (3.2)$$

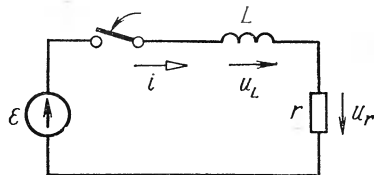


Рис. 3.1

Уравнение (3.2) — это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{di_{\text{св}}}{i_{\text{св}}} = -\frac{1}{\tau} dt, \quad (3.3)$$

Интегрируя равенство (3.3), получаем

$$\ln i_{\text{св}} = -\frac{t}{\tau} + \ln A.$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где A — постоянная интегрирования.

Если найдено общее решение однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения можно получить, например, с помощью вариации постоянной. Для этого принимают ток

$$i = B(t) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $B(t)$ — неизвестная функция t .

Производная тока

$$\frac{di}{dt} = B'(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} B(t) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

При подстановке выражений для тока и его производной в уравнение (3.1) получают

$$\tau B'(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - B(t) e^{-\frac{t}{\tau}} + B(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{r},$$

откуда

$$B'(t) = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{\frac{t}{\tau}};$$

$$B(t) = \frac{\mathcal{E}}{r} \int e^{\frac{t}{\tau}} dt = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{\frac{t}{\tau}} + A.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (3.1) записывается следующим образом:

$$i = \left(\frac{\mathcal{E}}{r} e^{\frac{t}{\tau}} + A \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{r} + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.4)$$

или

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}, \quad (3.5)$$

где $i_{\text{пр}} = \mathcal{E}/r$.

Как видно из выражения (3.5), ток i имеет две составляющие: первая составляющая $i_{\text{пр}}$ является *частным решением* неоднородного уравнения (получается из общего решения при $A=0$); вторая составляющая $i_{\text{св}}$ — *общим решением* однородного уравнения. Первая составляющая для рассматриваемого случая во времени не изменяется; вторая — изменяется с течением времени по экспоненциальному закону и обращается в нуль при $t=\infty$.

Момент времени $t=0$ рассматривают как момент, в который источник напряжения $\mathcal{E}$ подключается к цепи. Момент $t=\infty$ соответствует установившемуся режиму: ток $i=i_{\text{пр}}$ не изменяется. При неизменном токе $di/dt=0$ и из уравнения (3.1) находят

$$i_{\text{пр}} = \mathcal{E}/r.$$

Таким образом, в выражении (3.5) первое слагаемое имеет физический смысл тока установившегося или принужденного режима и называется *принужденным током*.

Слагаемое $i_{\text{св}}$ в выражении (3.5) характеризует ток в цепи при отсутствии источника, т. е. при $\mathcal{E}=0$. Этот ток может быть обусловлен энергией, запасенной в магнитном поле, связанном с индуктивностью, и называется *свободным током*.

Если известно значение тока в начальный момент времени $t=0$ (момент замыкания ключа), можно найти постоянную интегрирования A . Так, при $i|_{t=0} = i(0) = 0$ постоянная A определяется соотношением

$$i(0) = \frac{\mathcal{E}}{r} + A = 0,$$

откуда

$$A = -\frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Подставляя найденное значение A в равенство (3.4), легко записать выражение для тока

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (3.6)$$

На рис. 3.2 показаны графики изменения токов i_{np} , $i_{св}$, i при $i(0)=0$. При $t=\tau$ свободная составляющая уменьшается по абсолютной величине в e раз; постоянная τ , имеющая размерность времени, характеризует скорость изменения свободной составляющей тока и называется постоянной времени цепи. Для рассматриваемой цепи $\tau=L/r$, т. е. постоянная времени пропорциональна индуктивности и обратно пропорциональна сопротивлению. Нетрудно убедиться, что постоянная времени τ соответствует подкасательной OM , т. е.

$$\tau = \left| \frac{i_{св}(0)}{i'_{св}(0)} \right|.$$

Теоретически установившийся режим наступает при $t=\infty$. Практически уже при $t=3\tau$ свободный ток в цепи уменьшается (по абсолютной величине) до 5% от своего начального значения; при $t=5\tau$ свободный ток уменьшается до 0,7% от начального значения.

Процесс нарастания тока в соответствии с графиком на рис. 3.2 можно пояснить следующим образом. В момент включения источника э. д. с. ток в цепи $i=0$ и энергия, запасенная в магнитном поле, $W_L=0$. При включении источника установившийся режим не может наступить мгновенно, так как не может мгновенно возрасти энергия магнитного поля, связанная с индуктивностью, до величины

$$W_{Lnp} = \frac{Li_{np}^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

Мгновенное (скачкообразное) изменение энергии соответствовало бы бесконечной мощности

$$p_L = \frac{dW_L}{dt} = u_L i$$

и бесконечно большому напряжению u_L , что не имеет физического смысла для рассматриваемой цепи.

Поэтому в данной цепи с индуктивностью возможно лишь непрерывное изменение тока, соответствующее непрерывному изменению энергии, запасенной в магнитном поле, от начального до конечного уровня. Росту тока противодействует э. д. с. самоиндукции, возникающая по закону Ленца*:

$$e_L = -u_L = -L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

В начальный момент времени э. д. с. самоиндукции равна по величине и противоположна по направлению э. д. с. источника:

$$e_L(0) = -\mathcal{E}.$$

* При условии, что ток изменяется по формуле (3.6).

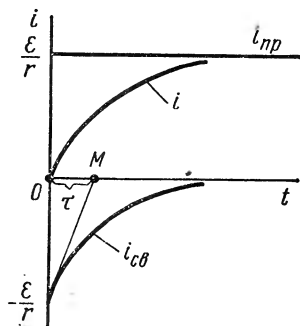


Рис. 3.2

Пусть в цепи, схема которой приведена на рис. 3.3, ключ был замкнут (положение 1) и источник действовал достаточно

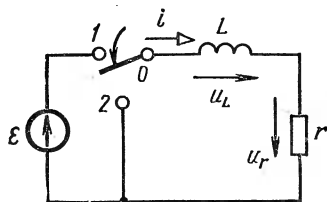


Рис. 3.3

долго, т. е. наступил установившийся режим. Если в некоторый момент времени, который можно считать равным $t=0$, ключ мгновенно (без разрыва rL -цепи) переключить в положение 2, то получится короткозамкнутая rL -цепь. Ток в короткозамкнутой цепи не может мгновенно уменьшиться до нуля, поскольку не может скачкообразно уменьшиться энергия, запасенная в магнитном поле индуктивной катушки.

Процесс в короткозамкнутой цепи описывается уравнением (3.2). По условию, начальное значение тока

$$i(0) = \mathcal{E}/r,$$

поэтому

$$i = i_{\text{св}} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.7)$$

В данном случае ток в цепи поддерживается э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -u_L = -L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.8)$$

Графики функций $i(t) = i_{\text{св}}(t)$, $e_L(t) = u_r(t)$, $u_L(t)$ построены на рис. 3.4.

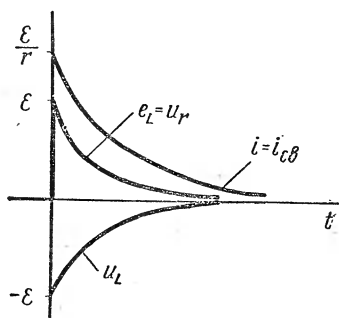


Рис. 3.4

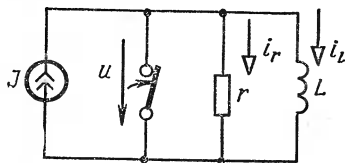


Рис. 3.5

Начальный запас энергии магнитного поля, связанной с индуктивностью,

$$W_L(0) = \frac{Li^2(0)}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

Энергия, рассеиваемая в сопротивлении,

$$W_r = \int_0^{\infty} i^2 r \, dt = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} d\tau = \frac{\mathcal{E}^2 \tau}{2r} = \frac{L \mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

Таким образом,

$$W_r = W_L(0),$$

т. е. вся энергия магнитного поля выделяется в сопротивлении r в виде тепла.

Параллельная цепь. На рис. 3.5 изображена схема электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивления r и индуктивности L , подключаемых при размыкании ключа к источнику постоянного тока J .

По первому закону Кирхгофа (ключ разомкнут),

$$i_r + i_L = J,$$

где i_r , i_L — соответственно токи в сопротивлении r и индуктивности L .

Ток в сопротивлении можно выразить через ток в индуктивности:

$$i_r = \frac{1}{r} u = \frac{1}{r} L \frac{di_L}{dt} = \tau \frac{di_L}{dt},$$

где u — напряжение между узлами схемы; $\tau = L/r$ — постоянная времени. Таким образом, ток определяется из дифференциального уравнения

$$\tau \frac{di_L}{dt} + i_L = J, \quad (3.9)$$

аналогичного уравнению (3.1).

По аналогии, решение уравнения (3.9) можно записать сразу:

$$i_L = J + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.10)$$

Если момент $t=0$ соответствует моменту включения источника тока и $i_L(0)=0$, то $A = -J$ и

$$i_L = J \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (3.11)$$

Решение (3.10) содержит принужденную составляющую

$$i_{L \text{ пр}} = J$$

и свободную составляющую

$$i_{L \text{ св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Принужденная составляющая тока представляет собой ток через индуктивность при установившемся режиме и может быть найдена из условия $di_L/dt=0$, $u=0$, т. е. индуктивность является короткозамкнутой ветвью, ток которой равен току источника.

Ток в сопротивлении r изменяется по закону,

$$i_r = J - i_L = J e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.12)$$

Напряжение между узлами

$$u = r i_r = J r e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.13)$$

Графики функций (3.11) ÷ (3.13) показаны на рис. 3.6. Ток i_L в индуктивности изменяется непрерывно, что связано с невозможностью скачкообразного изменения энергии магнитного поля.

Вся энергия, отданная источником,

$$W_{\text{ист}} = \int_0^{\infty} J u dt = J^2 r \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = J^2 L.$$

Энергия, рассеянная в сопротивлении,

$$W_r = r \int_0^{\infty} i_r^2 dt = J^2 r \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{J^2 L}{2}.$$

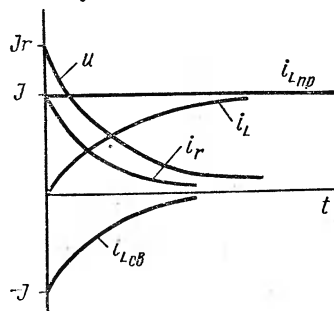


Рис. 3.6

Энергия, запасенная в магнитном поле,

$$W_L = \frac{L i_{L\text{нр}}^2}{2} = \frac{L J^2}{2}.$$

Таким образом, $W_{\text{ист}} = W_r + W_L$.

Если после достижения установившегося режима в цепи на рис. 3.5 мгновенно отключить источник, то ток в индуктивности уменьшается по экспоненциальному закону от начального значения $i_L(0) = J$ до нуля (аналогично току i , показанному на рис. 3.4); при этом $i_r = -i_L$.

§ 3.3. Цепи с сопротивлением r и емкостью C

Последовательная цепь. На рис. 3.7 показана схема цепи, содержащей последовательно соединенные сопротивление r и емкость C , подключаемые при замыкании ключа к источнику постоянной э. д. с. $\mathcal{E}$.

Для такой цепи справедливо уравнение (при замкнутом ключе)

$$u_r + u_C = \mathcal{E}.$$

Учитывая, что напряжение

$$u_r = r i = r C \frac{du_C}{dt} = \tau \frac{du_C}{dt},$$

где $\tau = rC$ — постоянная времени цепи, получают дифференциальное уравнение

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = \mathcal{E}. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) аналогично (3.9), поэтому его решение аналогично (3.10), т. е.

$$u_C = \mathcal{E} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) содержит принужденную составляющую

$$u_{Cпр} = \mathcal{E}$$

и свободную составляющую

$$u_{св} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если момент времени $t=0$ соответствует моменту включения источника напряжения и $u_C(0)=0$, то постоянная $A = -\mathcal{E}$. В этом случае

$$u_C = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (3.16)$$

Закон изменения напряжения (3.16) аналогичен закону изменения тока (3.11).

Напряжение на сопротивлении

$$u_r = \mathcal{E} - u_C = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (3.17)$$

ток в цепи

$$i = \frac{u_r}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.18)$$

Выражения (3.17) и (3.18) аналогичны (3.12) и (3.13). Графики функций $u_C(t)$, $u_r(t)$, $i(t)$ приведены на рис. 3.8.

Напряжение на емкости возрастает от нуля до значения $u_{Cпр} = \mathcal{E}$ по экспоненциальному закону. Конденсатор заряжается; ток, заряжающий его, имеет наибольшее значение в начальный момент времени. При установившемся режиме, когда конденсатор заряжен до напряжения $\mathcal{E}$, ток равен нулю, т. е. при установившемся режиме конденсатор с совершенной изоляцией эквивалентен разомкнутой ветви.

Запас энергии W_C , связанной с электрическим полем конденсатора, не может измениться скачкообразно. Такое изменение энергии привело бы к бесконечной мощности

$$p_C = \frac{dW_C}{dt} = u_C i$$

и бесконечно большому току i , что не имеет физического смысла для рассматриваемой цепи. Таким образом, в данной цепи воз-

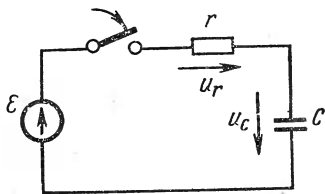


Рис. 3.7

можно лишь непрерывное изменение напряжения u_C , соответствующее непрерывному изменению энергии в электрическом поле конденсатора.

Энергетические соотношения в цепи на рис. 3.7 полностью аналогичны соотношениям, полученным для цепи на рис. 3.5.

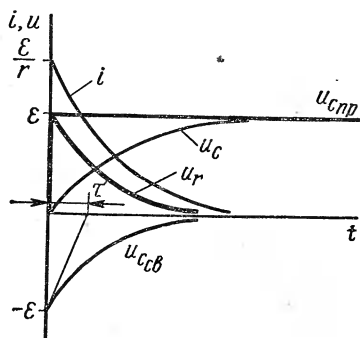


Рис. 3.8

Пусть конденсатор, заряженный до напряжения $\mathcal{E}$, в момент $t=0$ подключают к сопротивлению r (рис. 3.9). После

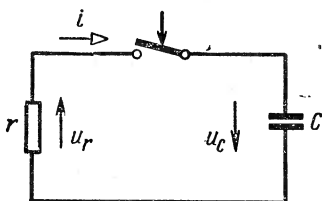


Рис. 3.9

замыкания ключа конденсатор разряжается. Для этой цепи справедливо уравнение

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad (3.19)$$

откуда

$$u_C = u_{Ccb} = A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

По условию, $u_C(0) = \mathcal{E}$, следовательно,

$$u_C = u_{Ccb} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Кривые изменения напряжения u_C и тока i при разряде конденсатора показаны на рис. 3.10. Вся энергия, запасенная в емкости, рассеивается в сопротивлении r .

Параллельная цепь. Для цепи на рис. 3.11 справедливо уравнение (при разомкнутом ключе)

$$i_C + i_r = J.$$

Учитывая, что

$$i_C = C \frac{du}{dt}, \quad i_r = \frac{u}{r},$$

получают дифференциальное уравнение

$$\tau \frac{du}{dt} + u = Jr. \quad (3.20)$$

Если момент времени $t=0$ соответствует моменту включения источника постоянного тока и $u_C(0)=0$ (конденсатор не заряжен),

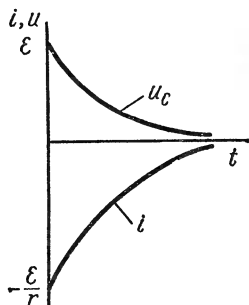


Рис. 3.10

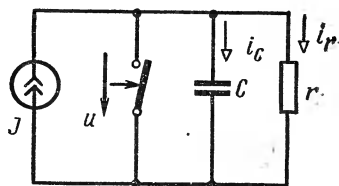


Рис. 3.11

то по аналогии с решением (3.5) уравнения (3.1) записывают решение уравнения (3.20):

$$u = Jr \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (3.21)$$

Ток в емкости

$$i_C = C \frac{du}{dt} = J e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (3.22)$$

ток в сопротивлении

$$i_r = \frac{u}{r} = J \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (3.23)$$

Графики зависимостей (3.21) ÷ (3.23) показаны на рис. 3.12. При установившемся режиме емкость эквивалентна разомкнутой ветви и весь ток источника замыкается через сопротивление r . Энергетические соотношения в цепи на рис. 3.11 аналогичны энергетическим соотношениям в цепи на рис. 3.1.

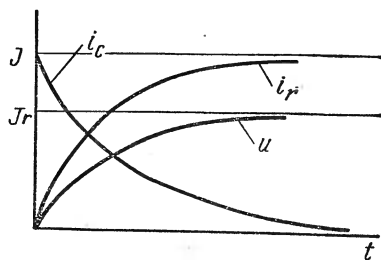


Рис. 3.12

При равенстве численных значений соответствующих параметров цепи на рис. 3.1 и 3.11 являются дуальными. Такое утверждение справедливо и для цепей на рис. 3.5 и 3.7.

§ 3.4. Цепи с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C

Последовательная цепь. Для последовательно соединенных сопротивления r , индуктивности L и емкости C , подключаемых к источнику постоянной э. д. с. (рис. 3.13), справедливо уравне-

ние (при замкнутом ключе)

$$u_L + u_r + u_C = \mathcal{E},$$

или

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}. \quad (3.24)$$

Дифференцируя по времени обе части равенства (3.24), легко получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0, \quad (3.25)$$

где $2\alpha = r/L$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Уравнение (3.25) — однородное; это означает, что ток в дан-

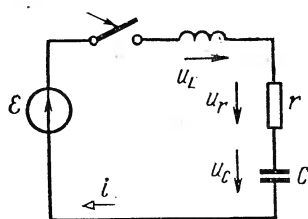


Рис. 3.13

ной цепи имеет только свободную составляющую. Действительно, при установившемся режиме, когда ток и напряжения на всех элементах постоянны, ветвь с емкостью эквивалентна разомкнутой ветви.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка определяется корнями характеристического уравнения, которое получается из дифференциального уравнения заменой производной k -го порядка ($k=0, 1, \dots, n$) множителем p^k . Для уравнения (3.25) характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0. \quad (3.26)$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (3.27)$$

Возможны три случая.

1-й случай. Если $\alpha > \omega_0$, то корни p_1 и p_2 вещественны и различны. При этом общее решение уравнения (3.25) записывают в виде суммы двух экспонент:

$$i = i_{cb} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (3.28)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Пусть в момент включения источника $t=0$ ток $i(0)=0$ и напряжение $u_C(0)=0$. Тогда из равенства (3.28)

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (3.29)$$

Из уравнения (3.24) находят значение производной в начальный момент времени, учитывая, что $i(0)=0$, $u_C(0)=0$:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L}.$$

Дифференцируя (3.28) и подставляя $t=0$, получаем

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = \mathcal{E}/L. \quad (3.30)$$

Совместное решение уравнений (3.29) и (3.30) дает значения постоянных

$$A_1 = -A_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(p_1 - p_2)}.$$

Таким образом, ток в цепи изменяется по закону

$$i = i_{\text{св}} = \frac{\mathcal{E}}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (3.31)$$

Зная ток, можно определить напряжение на каждом элементе цепи. Например, напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{\mathcal{E}}{LC(p_1 - p_2)} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) + \frac{\mathcal{E}}{LC p_1 p_2}.$$

Учитывая, что произведение корней квадратного уравнения равно свободному члену:

$$p_1 p_2 = \frac{1}{LC},$$

выражение для u_C преобразуется к виду

$$u_C = \frac{\mathcal{E}}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + \mathcal{E}. \quad (3.32)$$

Постоянная составляющая в этом выражении соответствует установившемуся (принужденному) режиму, когда $u_{C\text{св}} = 0$ и все напряжение источника оказывается приложенным к емкости.

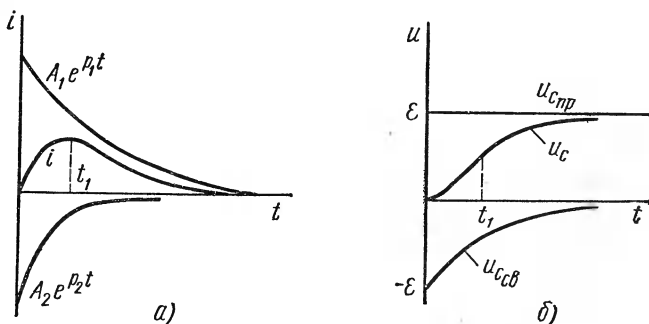


Рис. 3.14

Графики зависимостей (3.31) и (3.32) показаны соответственно на рис. 3.14, а, б при $|p_1| < |p_2|$.

Момент времени t_1 , в который ток достигает максимума, находят из выражения $di/dt = 0$. Так как $i = C du_C/dt$, то в момент t_1 кривая изменения напряжения u_C имеет перегиб (вторая производная $d^2 u_C/dt^2 = 0$).

2-й случай. Если $\alpha = \omega_0$, то корни характеристического уравнения вещественны и одинаковы: $p_1 = p_2 = -\alpha$. Общее решение уравнения (3.25) в этом случае записывают в виде

$$i = i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}. \quad (3.33)$$

Постоянные A_1 и A_2 определяют, как и в предыдущем случае, из начальных условий.

Выражение для тока получается непосредственно как предел функции (3.31) при $p_2 \rightarrow p_1$ (правило Лопиталья):

$$i = \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{\mathcal{E}}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{\mathcal{E}}{L} \lim_{p_2 \rightarrow p_1 = -\alpha} \frac{-te^{p_2 t}}{-1} = \frac{\mathcal{E}}{L} te^{-\alpha t}. \quad (3.34)$$

Предел функции (3.32) дает выражение для напряжения на емкости:

$$u_C = -\mathcal{E} (1 + \alpha t) e^{-\alpha t} + \mathcal{E}. \quad (3.35)$$

Кривые тока i и напряжения u_C аналогичны кривым, приведенным на рис. 3.14.

3-й случай. Если $\alpha < \omega_0$, то корни p_1 и p_2 комплексно-сопряженные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega,$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Подставляя значения корней в выражения (3.31) и (3.32), находим

$$i = i_{\text{св}} = \frac{\mathcal{E}}{L\omega} e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad (3.36)$$

$$u_C = \frac{\mathcal{E}}{\omega} e^{-\alpha t} \left(\alpha \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + \omega \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + \mathcal{E}. \quad (3.37)$$

Поскольку

$$\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \sin \omega t; \quad \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos \omega t,$$

формулы (3.36) и (3.37) переписываем следующим образом:

$$i = i_{\text{св}} = \frac{\mathcal{E}}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t; \quad (3.38)$$

$$u_C = -\frac{\mathcal{E}}{\omega} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) + \mathcal{E}. \quad (3.39)$$

Легко убедиться в справедливости равенства

$$\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t = \omega_0 \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$.

С учетом этого равенства соотношение (3.39) приводится к виду *

$$u_C = -\mathcal{E} \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right) + \mathcal{E}. \quad (3.40)$$

* Угол $0 < \arctg \frac{\omega}{\alpha} \leq \frac{\pi}{2}$, так как $\omega > 0$, $\alpha > 0$.

Графики зависимостей (3.38) и (3.40) показаны на рис. 3.15, а, б.

Во всех трех рассмотренных случаях под действием источника постоянной э. д. с. $\mathcal{E}$ происходит зарядка конденсатора. В первых двух случаях зарядный ток не изменяет направления, что

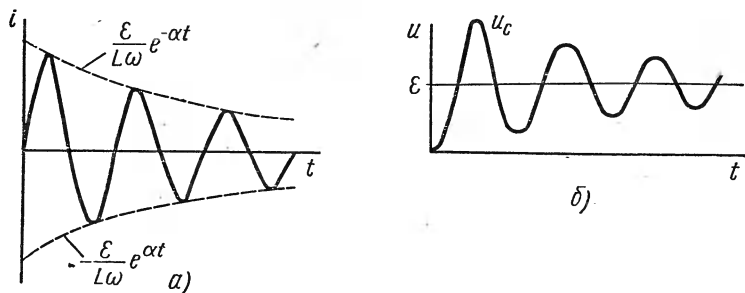


Рис. 3.15

характеризует аperiodический процесс. В последнем случае ток представляет собой затухающую синусоидальную функцию, что характеризует колебательный процесс. Колебания в цепи возникают вследствие периодического взаимного преобразования энергии электрического поля, связанного с емкостью, и энергии магнитного поля, связанного с индуктивностью. Наличие сопротивления в цепи приводит к затуханию колебаний из-за рассеивания энергии в сопротивлении.

Характер процесса зависит от вида корней характеристического уравнения, который, в свою очередь, определяется соотношениями параметров элементов цепи.

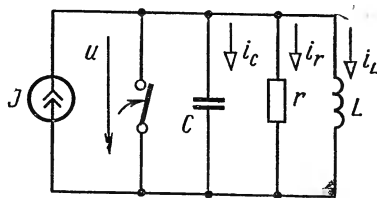


Рис. 3.16

Параллельная цепь. Для цепи с источником постоянного тока на рис. 3.19 справедливо уравнение (при разомкнутом ключе)

$$i_c + i_r + i_L = J,$$

или

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{r} + \frac{1}{L} \int u dt = J. \quad (3.41)$$

Уравнение (3.41) аналогично (3.24), поэтому можно воспользоваться результатами, полученными в § 3.5.

Напряжение u между узлами цепи на рис. 3.16 изменяется аналогично току i в схеме на рис. 3.13. Ток в индуктивности i_L (рис. 3.16) изменяется аналогично напряжению u_C (рис. 3.13).

При равенстве соответствующих параметров цепи на рис. 3.13 и 3.16 являются дуальными. Кривые зависимостей i , u_C (рис. 3.14 и 3.15) совпадают соответственно с кривыми дуальных величин u , i_L . При этом момент времени $t=0$ следует рассматривать как момент включения источника тока.

§ 3.5. Разряд конденсатора в цепи с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C

Пусть заряженный до напряжения $u_C(0) = \mathcal{E}$ конденсатор подключают в момент времени $t=0$ к rL -цепи (рис. 3.17).

Под действием напряжения на конденсаторе в цепи возникает ток, дифференциальное уравнение для которого совпадает с (3.25). В зависимости от вида корней характеристического уравнения возможен апериодический или колебательный разряд конденсатора.

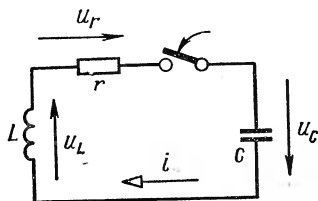


Рис. 3.17

Выражения тока i и напряжения на емкости u_C определяются как в цепи на рис. 3.13 (см. § 3.5). При разряде конденсатора $i(0)=0$, $u_C(0)=\mathcal{E}$. Производная

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{C} i(0) = 0.$$

Производную $(di/dt)_{t=0}$ получают из уравнения

$$u_C(0) + ri(0) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

откуда

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{\mathcal{E}}{L}.$$

При разряде конденсатора выражения для тока i отличаются от выражений (3.31), (3.34), (3.38) только знаком.

Для напряжения на емкости при $u_{C\text{пр}}=0$ получают соотношения

$$u_C = \frac{\mathcal{E}}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

(в случае вещественных различных корней);

$$u_C = \mathcal{E} (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}$$

(в случае вещественных равных корней);

$$u_C = \mathcal{E} \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right)$$

(в случае комплексно-сопряженных корней).

На рис. 3.18, а, б показаны зависимости i , u_C соответственно при апериодическом и колебательном разрядах конденсаторов.

Колебательный процесс при разряде конденсатора характеризуется периодом собственных колебаний, декрементом затухания и логарифмическим декрементом затухания.

Период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (3.42)$$

Декремент затухания Δ характеризует отношение амплитуд, разделенных во времени периодом:

$$\Delta = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T}. \quad (3.43)$$

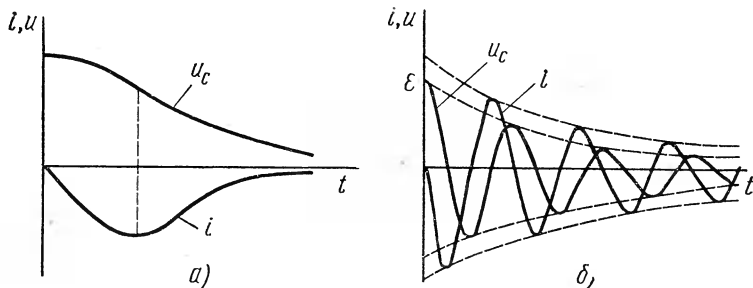


Рис. 3.18

Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln \Delta = \alpha T. \quad (3.44)$$

Если потери в контуре отсутствуют ($r=0$, $\alpha=0$), то колебания не затухают. При этом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC};$$

$$u_c = \mathcal{E} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E} \cos \omega_0 t;$$

$$i = -\frac{\mathcal{E}}{L\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Кривые $u_c(t)$ и $i(t)$ для случая незатухающих колебаний показаны на рис. 3.19.

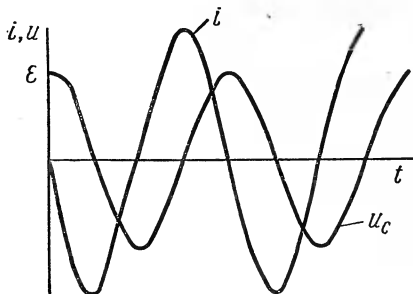


Рис. 3.19

Таким образом, LC-контур, в котором каким-либо образом скомпенсированы потери (например, введением в контур отрицательного сопротивления), может служить генератором незатухающих гармонических колебаний.

§ 3.6. Общие замечания об анализе цепей с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C

Как уже отмечалось, при включении источников постоянной э. д. с. и постоянного тока в цепях, содержащих резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы, токи в ветвях и напряжения на зажимах элементов изменяются во времени от начальных до установившихся значений. Практически длительность переходных режимов можно считать конечной, измеряемой, как правило, долями секунд. В цепях, не содержащих индуктивных катушек и конденсаторов, установившийся режим наступает практически очень быстро (мгновенно).

Дифференциальное уравнение для искомой величины может быть получено на основании системы уравнений Кирхгофа, описывающих цепь, путем последовательного исключения неизвестных.

Принужденная составляющая искомой величины также может быть найдена в общем случае путем совместного решения уравнений, составленных по законам Кирхгофа.

Начальные значения любых токов и напряжений вычисляют из уравнений, составленных по законам Кирхгофа, при известных начальных значениях токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Токи в индуктивностях и напряжения на емкостях изменяются только непрерывно, поэтому их начальные значения равны значениям в предшествующем режиме цепи. Если, например, цепь ранее не была подключена к источникам, то токи в индуктивностях и напряжения на емкостях имеют нулевые начальные значения.

Значения производных токов и напряжений при $t=0$ находят на основании уравнений Кирхгофа и уравнений, получаемых путем дифференцирования уравнений Кирхгофа.

Расчет начальных и установившихся значений токов и напряжений в rLC -цепи с источниками постоянной э. д. с. и постоянного тока сводится к расчету чисто резистивных схем. Действительно, для начального момента индуктивность можно заменить источником тока $i_L(0)$ [если $i_L(0)=0$, то ветвь с индуктивностью эквивалентна разрыву], а емкость — источником напряжения $u_C(0)$ [если $u_C(0)=0$, то емкость эквивалентна короткозамкнутому участку]. В установившемся режиме индуктивность (емкость) эквивалентна короткозамкнутому участку (разомкнутой ветви). Методы расчета сложных резистивных цепей рассматриваются в следующих главах.

§ 4.1. Применение уравнений Кирхгофа

Матричная форма закона Ома. Каждая ветвь цепи может содержать сопротивление r_k , идеальный источник э. д. с. $\mathcal{E}_k$ и идеальный источник тока J_k , где $k=1, 2, \dots, v$ (рис. 4.1, а). Иногда источники тока на схеме не изображают, а показывают только токи источников в соответствующих узлах (рис. 4.1, б).

Ток в сопротивлении r_k (рис. 4.1)

$$I_{r_k} = I_k + J_k, \text{ где } I_k - \text{ток } k\text{-й ветви.}$$

Потенциал φ_n узла n отличается от потенциала φ_m узла m на величину падения напряжения в сопротивлении r_k и на зна-

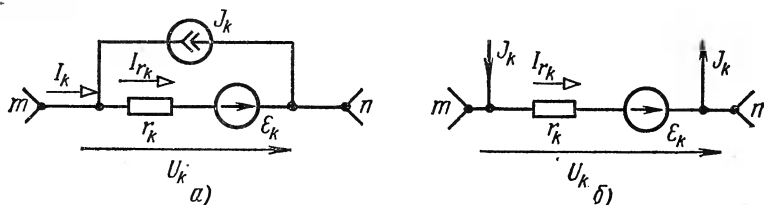


Рис. 4.1

чение э. д. с. $\mathcal{E}_k$, причем для указанных положительных направлений падение напряжения уменьшает, а э. д. с. увеличивает потенциал φ_m :

$$\varphi_n = \varphi_m - r_k I_{r_k} + \mathcal{E}_k = \varphi_m - r_k (I_k + J_k) + \mathcal{E}_k.$$

Напряжение на зажимах ветви

$$U_k = \varphi_m - \varphi_n,$$

откуда

$$U_k = r_k I_{r_k} - \mathcal{E}_k$$

или

$$U_k = r_k (I_k + J_k) - \mathcal{E}_k. \quad (4.1)$$

Соотношения для токов:

$$\begin{aligned} I_{r_k} &= g_k (U_k + \mathcal{E}_k); \\ I_k &= g_k (U_k - \mathcal{E}_k) - J_k, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $g_k = 1/r_k$ — проводимость ветви.

Формулы (4.1) и (4.2) представляют собой аналитические выражения закона Ома для участка цепи с источниками э. д. с. и тока.

В общем случае, если ветвь содержит ряд последовательно соединенных сопротивлений, источников э. д. с. и параллельно соединенных источников тока, то в формулах (4.1) и (4.2) вместо r_k следует учитывать суммарное сопротивление ветви, а вместо $\mathcal{E}_k$ и J_k — алгебраическую сумму соответственно э. д. с. источников э. д. с. и токов источников тока. При этом с положительным знаком записывают э. д. с. и токи источников, ориентированные относительно тока I_{r_k} так, как показано на рис. 4.1*; при противоположных направлениях э. д. с. и токи источников записывают с отрицательными знаками.

Пример 4.1. С помощью закона Ома определить токи на всех участках цепи на рис. 4.2, а и построить график распределения потенциала (потенциальную диаграмму) вдоль замкнутого контура. Параметры схемы: $r_1 = r_2 = 2$ Ом; $r_3 = 5$ Ом; $r_4 = 1$ Ом; $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 = 10$ В; $\mathcal{E}_2 = -20$ В; $J_1 = 10$ А.

Решение. Схему на рис. 4.2, а рассмотрим как параллельное соединение двух ветвей, присоединенных к узлам 1 и 3. Одна ветвь содержит элементы r_1 , $\mathcal{E}_1$ и J_1 , другая — r_2 , r_3 , r_4 , $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$. По закону Ома для первой ветви справедливо уравнение

$$U_1 = r_1(I_1 - J_1) + \mathcal{E}_1$$

или

$$U_1 = 2(I_1 - 10) + 10 = 2I_1 - 10.$$

Для второй ветви

$$U_2 = r_\Sigma I_2 - \mathcal{E}_\Sigma,$$

где $r_\Sigma = r_2 + r_3 + r_4$; $\mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$, или

$$U_2 = 8I_2 + 10.$$

Так как $U_1 = U_2$, $I_1 = -I_2$, то $I_1 = 2$ А; $I_2 = -2$ А; $I_{r_1} = I_1 - J_1 = -8$ А.

Для построения потенциальной диаграммы вычислим потенциалы точек контура, отмеченных цифрами 1 ÷ 7. Пусть $\varphi_1 = 0$, тогда

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \mathcal{E}_1 = 0 + 10 = 10 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + r_1 I_{r_1} = 10 - 8 = -6 \text{ В};$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 - r_2 I_2 = -6 + 2 \cdot 2 = -2 \text{ В};$$

$$\varphi_5 = \varphi_4 + \mathcal{E}_2 = -2 - 20 = -22 \text{ В};$$

$$\varphi_6 = \varphi_5 - r_3 I_2 = -22 + 5 \cdot 2 = -12 \text{ В};$$

$$\varphi_7 = \varphi_6 + \mathcal{E}_3 = -12 + 10 = -2 \text{ В}.$$

Обход контура заканчивается в узле 1, потенциал которого

$$\varphi_1 = \varphi_7 - r_4 I_2 = -2 + 1 \cdot 2 = 0,$$

как и было принято ранее.

При построении потенциальной диаграммы по оси абсцисс откладываем в определенной последовательности сопротивления участков, а по оси ординат — потенциалы соответствующих точек (рис. 4.2, б).

Пользуясь графиком распределения потенциала, определяем напряжения между любыми точками схемы. Например, напряжение $U_{25} = \varphi_2 - \varphi_5 = 32$ В; $U_{47} = \varphi_4 - \varphi_7 = 0$ и т. д.

* Положительные направления I_k , I_{r_k} и U_k принимают совпадающими и, как правило, указывают одной стрелкой на соответствующей ветви графа.

Отношение падения напряжения на сопротивлении к сопротивлению равно току участка и на графике определяется как тангенс угла наклона соответствующей прямой к оси абсцисс. Поэтому наклон прямых (3—4, 5—6, 7—1 на рис. 4.2, б), отображающих изменение потенциала вдоль сопротивлений с одним и тем же током I_2 , одинаков.

Соотношение (4.1) запишем для всех v ветвей в виде матричного равенства

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & r_2 & \\ & & \ddots \\ & & & r_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 + J_1 \\ I_2 + J_2 \\ \vdots \\ I_B + J_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_B \end{bmatrix}$$

или

$$\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{R}^{(B)} [\mathbf{I}^{(B)} + \mathbf{J}^{(B)}] - \mathcal{E}^{(B)}, \quad (4.3)$$

где

$$\mathbf{R}^{(B)} = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & r_2 & \\ & & \ddots \\ & & & r_B \end{bmatrix}$$

— диагональная матрица сопротивлений ветвей (все элементы этой матрицы, за исключением элементов главной диагонали, равны нулю; элемент, находящийся на пересечении k -й строки и k -го столбца, равен сопротивлению k -й ветви r_k);

$$\mathbf{U}^{(B)} = [U_1 U_2 \dots U_B]^T,$$

$$\mathbf{I}^{(B)} = [I_1 I_2 \dots I_B]^T,$$

$$\mathbf{J}^{(B)} = [J_1 J_2 \dots J_B]^T,$$

$$\mathcal{E}^{(B)} = [\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_B]^T$$

— соответственно векторы напряжений и токов ветвей, токов источников тока и э. д. с. источников э. д. с. ветвей.

На основании выражения (4.2) запишем матричное соотношение

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{G}^{(B)} [\mathbf{U}^{(B)} + \mathcal{E}^{(B)}] - \mathbf{J}^{(B)}, \quad (4.4)$$

где

$$\mathbf{G}^{(B)} = \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & g_2 & \\ & & \ddots \\ & & & g_B \end{bmatrix}$$

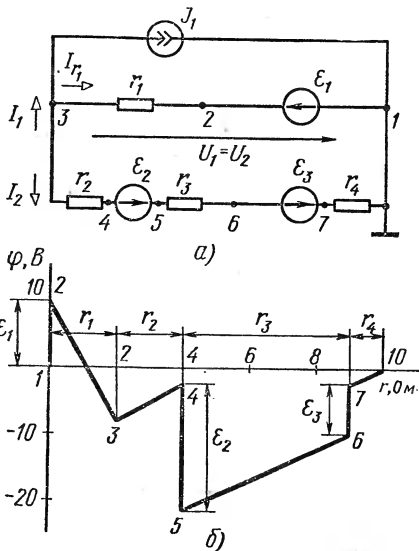


Рис. 4.2

— диагональная матрица проводимостей ветвей. В этой матрице элемент $g_k = 1/r_k$, поэтому матрицы $\mathbf{R}^{(B)}$ и $\mathbf{G}^{(B)}$ — взаимно обратны,

т. е.

$$G^{(B)} = [R^{(B)}]^{-1}; \quad R^{(B)} = [G^{(B)}]^{-1}.$$

Формулы (4.3) и (4.4) представляют собой аналитические выражения закона Ома в матричной форме.

Система уравнений для токов и напряжений ветвей. Для цепи с источниками постоянной э. д. с. и тока в установившемся режиме, по первому закону Кирхгофа,

$$AI^{(B)} = 0 \quad (4.5a)$$

или

$$QI^{(B)} = 0; \quad (4.5b)$$

по второму закону Кирхгофа,

$$BU^{(B)} = 0. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.5a) или (4.5b), (4.6) совместно с (4.3) или (4.4) полностью определяют режим цепи и позволяют решать задачи ее анализа.

Целесообразно несколько видоизменить уравнения, записываемые по законам Кирхгофа. Если обозначить столбцовую матрицу в сопротивлениях (т. е. матрицу, в k -й строке которой записывается I_{r_k}):

$$I_r = I^{(B)} + J^{(B)},$$

то из равенства (4.5a) следует

$$AI_r = AJ^{(B)}. \quad (4.7)$$

Произведение AI_r определяет матрицу, элементы которой равны алгебраическим суммам токов в сопротивлениях r_k (т. е. токов I_{r_k}), присоединенных к соответствующим узлам; при этом с положительным знаком записывают токи, направленные от узла, и наоборот. Произведение $AJ^{(B)}$ дает матрицу, элементы которой равны алгебраическим суммам токов источников тока, присоединенных к соответствующим узлам; при этом с положительным знаком записывают токи, направленные к узлу, и наоборот.

Таким образом, равенство (4.7) представляет собой матричную запись первого закона Кирхгофа в форме (1.13).

Аналогично формулируют уравнения для сечений:

$$QI_r = QJ^{(B)}. \quad (4.8)$$

Если обе части равенства (4.3) умножить слева на матрицу B и учесть равенство (4.6), то

$$BR^{(B)} [I^{(B)} + J^{(B)}] = B\mathcal{E}^{(B)} \quad (4.9)$$

или

$$BR^{(B)} I_r = B\mathcal{E}^{(B)}. \quad (4.10)$$

Произведение диагональной матрицы сопротивлений ветвей $R^{(B)}$ на матрицу токов I_r дает вектор напряжений на сопротив-

лениях, т. е. вектор, элементы которого представляют собой произведения $r_k I_{r_k}$. Произведение матрицы $\mathbf{B}$ на матрицу э. д. с. $\mathcal{E}^{(b)}$ определяет столбцовую матрицу, элементы которой равны алгебраической сумме э. д. с. контуров. Таким образом, уравнение (4.10) представляет собой матричную запись второго закона Кирхгофа в форме (1.17).

Расчет цепи с помощью уравнений Кирхгофа сводится к совместному решению уравнений (4.7) или (4.8) и (4.10). Как правило, искомыми являются токи в сопротивлениях I_{r_k} при известных r_k , $\mathcal{E}_k$, J_k . Элементы матриц $\mathcal{E}^{(b)}$ и $\mathbf{J}^{(b)}$ записывают с положительным или отрицательным знаком в зависимости от взаимной ориентации $\mathcal{E}_k$, J_k и I_{r_k} .

Вместо уравнений (4.7) или (4.8) и (4.10) можно составить дуальные уравнения для напряжений на сопротивлениях U_{r_k} . Действительно, умножив обе части равенства (4.4) на матрицу $\mathbf{A}$ с учетом (4.5а), получаем

$$\mathbf{A}\mathbf{G}^{(b)}[\mathbf{U}^{(b)} + \mathcal{E}^{(b)}] = \mathbf{A}\mathbf{J}^{(b)} \quad (4.11)$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{G}^{(b)}\mathbf{U}_r = \mathbf{A}\mathbf{J}^{(b)}, \quad (4.12)$$

где $\mathbf{U}_r = \mathbf{U}^{(b)} + \mathcal{E}^{(b)}$ — матрица напряжений на сопротивлениях. Вместо уравнения (4.6) справедливо уравнение

$$\mathbf{B}\mathbf{U}_r = \mathbf{B}\mathcal{E}^{(b)}. \quad (4.13)$$

Совместное решение уравнений (4.12) и (4.13) позволяет вычислить все напряжения на сопротивлениях.

Следует подчеркнуть, что для относительно простых схем уравнения Кирхгофа могут быть составлены

по сформулированным здесь правилам без записи матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и вычисления необходимых матричных произведений.

Особенности составления матричных уравнений при наличии ветвей с идеальными источниками. В схеме цепи могут быть ветви, содержащие только идеальные источники тока или э. д. с. Если уравнения по законам Кирхгофа записываются непосредственно по схеме без применения равенств (4.10) или (4.12), то наличие ветвей с идеальными источниками не вносит никаких изменений.

Если при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа применяют матричное равенство (4.10), то ветвям, содержащим только идеальные источники тока, соответствуют диагональ-

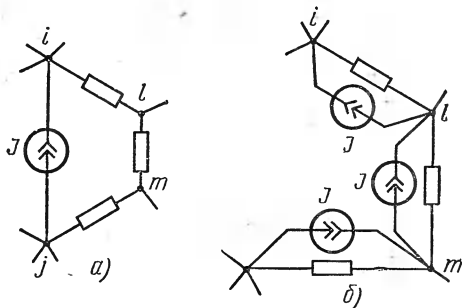


Рис. 4.3

ные элементы $r_k = \infty$ матрицы $\mathbf{R}^{(b)}$. В этом случае схему необходимо преобразовать (рис. 4.3). Ветвь с источником тока J включена между узлами i и j (рис. 4.3, а). Включая в узлах l и m два противоположно направленных источника тока J , что не влияет на режим цепи, переходят к эквивалентной схеме на рис. 4.3, б. После подобного преобразования всех ветвей с идеальными источниками тока записывают уравнение (4.10). Следует отметить, что такое преобразование уменьшает число ветвей и контуров схемы.

Если при составлении уравнений по первому закону Кирхгофа применяют матричное равенство (4.12), то ветвям, содержащим только идеальные источники э. д. с., соответствуют диагональные элементы $g_k = \infty$ матрицы $\mathbf{G}^{(b)}$. В таком случае схема должна быть преобразована (рис. 4.4).

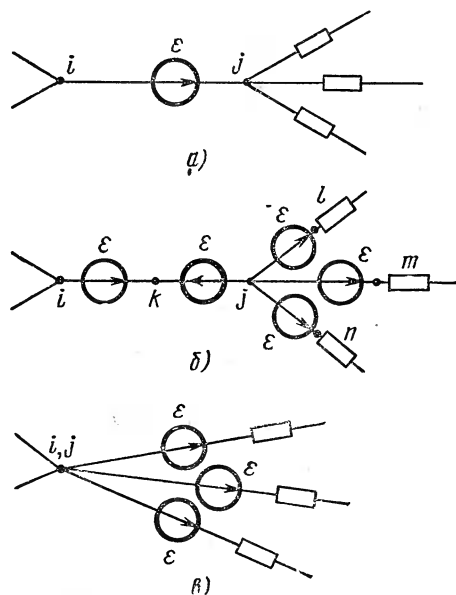


Рис. 4.4

Ветвь с идеальным источником э. д. с. $\mathcal{E}$ включена между узлами i и j (рис. 4.4, а). В каждую из ветвей, соединенных с узлом j (или i), включают по одному дополнительному источнику э. д. с. $\mathcal{E}$ (рис. 4.4, б). Добавление одинаковых источников не изменяет режима схемы, так как точки k, l, m, n имеют одинаковый потенциал относительно узла i , следовательно, их можно замкнуть.

В ветви между узлами i и j два одинаковых источника направлены противоположно,

поэтому напряжение на этой ветви равно нулю, т. е. такая ветвь эквивалентна короткозамкнутой ветви на рис. 4.4, в.

Таким образом, источник э. д. с. $\mathcal{E}$ (рис. 4.4, а) можно перенести за узел j , объединяя узлы i и j (рис. 4.4, в).

После подобного преобразования для всех ветвей с идеальными источниками э. д. с. записывают уравнение (4.12). Данное преобразование уменьшает число ветвей и узлов схемы.

Недостатком метода расчета цепи по уравнениям Кирхгофа является большое число совместно решаемых уравнений и соответственно повышенные требования к точности промежуточных вычислений.

§ 4.2. Применение узловых уравнений

Узловые уравнения. Число совместно решаемых уравнений можно уменьшить, если в качестве независимых переменных принять потенциалы узлов. Знание потенциалов позволяет найти все токи в схеме.

Уравнения с узловыми потенциалами (узловые уравнения) вытекают из первого закона Кирхгофа; их число равно числу независимых уравнений, составляемых для узлов, т. е. $y - 1$.

Выражение (4.11) перепишем в следующем виде:

$$\mathbf{AG}^{(B)}\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{AJ}^{(B)} - \mathbf{AG}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}.$$

Принимая потенциал одного из узлов равным нулю (а именно потенциал того узла, для которого отсутствует строка в матрице $\mathbf{A}$), напряжения на ветвях определяем через узловые потенциалы (см. гл. 2):

$$\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{A}^T \varphi. \quad (4.14)$$

Таким образом, получаются уравнения вида

$$\mathbf{AG}^{(B)}\mathbf{A}^T \varphi = \mathbf{AJ}^{(B)} - \mathbf{AG}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}, \quad (4.15)$$

которые называют узловыми уравнениями в матричной форме.

Если обозначить

$$\mathbf{G}^{(Y)} = \mathbf{AG}^{(B)}\mathbf{A}^T; \quad (4.16)$$

$$\mathbf{J}^{(Y)} = \mathbf{AJ}^{(B)} - \mathbf{AG}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}, \quad (4.17)$$

то узловые уравнения запишутся более кратко:

$$\mathbf{G}^{(Y)}\varphi = \mathbf{J}^{(Y)}. \quad (4.18)$$

Матрицу $\mathbf{G}^{(Y)}$ называют матрицей узловых проводимостей, матрицу $\mathbf{J}^{(Y)}$ — матрицей узловых токов. В развернутой форме уравнение (4.18) имеет вид

$$\begin{bmatrix} g_{11}g_{12} \dots g_{1, y-1} \\ g_{21}g_{22} \dots g_{2, y-1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ g_{y-1, 1}g_{y-2, 2} \dots g_{y-1, y-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{y-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^{(Y)} \\ J_2^{(Y)} \\ \vdots \\ J_{y-1}^{(Y)} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

В качестве примера можно составить узловые уравнения для цепи на рис. 4.5, а.

Данная схема имеет 3 узла и 4 ветви. Граф схемы показан на рис. 4.5, б; ориентация ветвей выбрана произвольно. Узел 3 принимаем за базисный ($\varphi_3 = 0$).

Узловая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

диагональная матрица проводимостей ветвей

$$\mathbf{G}^{(B)} = \begin{bmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & g_3 & \\ & & & g_4 \end{bmatrix},$$

где $g_k = 1/r_k$; $k = 1, 2, 3, 4$.

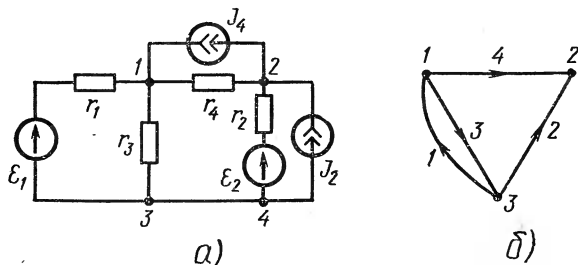


Рис. 4.5

Матрица узловых проводимостей

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(Y)} &= \mathbf{A}\mathbf{G}^{(B)}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & g_3 & g_4 \\ 0 & -g_2 & 0 & -g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_3 + g_4 & -g_4 \\ -g_4 & g_2 + g_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица токов источников тока ветвей

$$\mathbf{J}^{(B)} = [0 \quad -J_2 \quad 0 \quad J_4]^T;$$

матрица э. д. с. источников э. д. с.

$$\mathcal{E}^{(B)} = [\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{E}_2 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Матрица узловых токов

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(Y)} &= \mathbf{A}\mathbf{J}^{(B)} - \mathbf{A}\mathbf{G}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)} = \mathbf{A}[\mathbf{J}^{(B)} - \mathbf{G}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}] = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -g_1\mathcal{E}_1 \\ -J_2 & -g_2\mathcal{E}_2 \\ 0 & 0 \\ J_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_4 + g_1\mathcal{E}_1 \\ J_2 - J_4 + g_2\mathcal{E}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, узловые уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^{(Y)} \\ J_2^{(Y)} \end{bmatrix},$$

где

$$g_{11} = g_1 + g_3 + g_4; \quad g_{12} = g_{21} = -g_4; \quad g_{22} = g_2 + g_4;$$

$$J_1^{(y)} = J_4 + g_1 \mathcal{E}_1; \quad J_2^{(y)} = J_2 - J_4 + g_2 \mathcal{E}_2.$$

Анализ результатов рассмотренного примера позволяет сделать ряд важных общих выводов:

1. В матрице узловых проводимостей на главной диагонали записывают суммы проводимостей ветвей, присоединенных к соответствующему узлу, с положительным знаком. Диагональные элементы матрицы называют собственными узловыми проводимостями.

2. Элемент g_{ij} матрицы узловых проводимостей ($i \neq j$) равен сумме проводимостей ветвей, присоединенных между узлами i и j , взятой с отрицательным знаком. Внедиагональные элементы матрицы называют общими узловыми проводимостями.

3. Матрица $\mathbf{G}^{(y)}$ симметрична, т. е. $g_{ij} = g_{ji}$ и $\mathbf{G}^{(y)} = [\mathbf{G}^{(y)}]^T$.

4. Элемент $J^{(y)}$ матрицы узловых токов равен алгебраической сумме токов источников тока, присоединенных к j -му узлу, включая токи источников тока, эквивалентные источникам э. д. с. При этом с положительным (отрицательным) знаком записывают токи, направленные к узлу (от узла).

5. Знаки элементов всех матриц не зависят от ориентации ветвей графа.

Следовательно, узловые уравнения можно составить при непосредственном рассмотрении схемы.

Если в схеме имеются ветви с идеальными источниками э. д. с., то для записи уравнения (4.15) используют преобразование, показанное на рис. 4.4. Такое преобразование целесообразно и при непосредственном составлении узловых уравнений. Наличие в схеме ветвей с идеальными источниками тока не требует преобразования схемы: в матрице $\mathbf{G}^{(b)}$ ветвям с идеальными источниками тока соответствуют проводимости $g_k = 0$. Для уменьшения числа столбцов матрицы $\mathbf{A}$ возможно преобразование, показанное на рис. 4.3.

Пример 4.2. Рассчитать токи в схеме на рис. 4.6 методом узловых потенциалов. Параметры схемы: $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ Ом; $r_4 = r_5 = r_6 = 6$ Ом; $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_7 = 6$ В; $J_3 = 9$ А.

Решение. Между узлами 1 и 5 включен идеальный источник э. д. с. $\mathcal{E}_7$. Переместив этот источник через узел 1, получим схему на рис. 4.7, в которой

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_7 = 6 \text{ В}; \quad \mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_7 = 12 \text{ В}.$$

Пусть потенциал $\varphi_2 = 0$. Тогда для схемы на рис. 4.7 справедливы узловые уравнения:

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_2 + g_3 & -g_3 & -g_2 \\ -g_3 & g_3 + g_4 + g_5 & -g_5 \\ -g_2 & -g_5 & g_2 + g_5 + g_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_3 - g_1 \mathcal{E}_1' - g_2 \mathcal{E}_2' \\ J_3 \\ g_2 \mathcal{E}_2' \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} 3\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_4 &= -36; & -3\varphi_1 - \varphi_3 + 5\varphi_4 &= 36; \\ -3\varphi_1 + 5\varphi_3 - \varphi_4 &= 54. \end{aligned}$$

В результате совместного решения этих уравнений найдем искомые потенциалы узлов:

$$\varphi_1 = \varphi_5 = -9 \text{ В}; \quad \varphi_3 = 6 \text{ В}; \quad \varphi_4 = 3 \text{ В}.$$

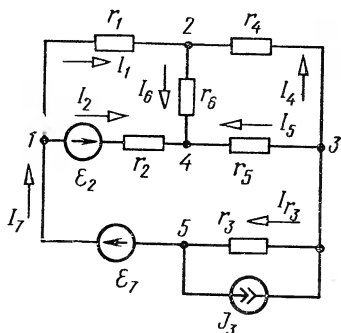


Рис. 4.6

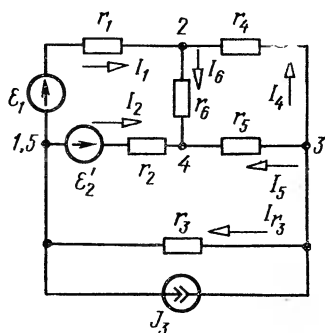


Рис. 4.7

Токи в ветвях определяют по формулам, вытекающим из равенства (4.2):

$$I_1 = g_1 (U_1 + \mathcal{E}_1) = g_1 (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1) = (-9 - 0 + 6) 1/2 = -1,5 \text{ А};$$

$$I_2 = g_2 (U_2 + \mathcal{E}_2) = g_2 (\varphi_1 - \varphi_4 + \mathcal{E}_2) = (-9 - 3 + 12) 1/2 = 0;$$

$$I_{r_3} = g_3 U_3 = g_3 (\varphi_3 - \varphi_1) = (6 + 9) 1/2 = 7,5 \text{ А};$$

$$I_4 = g_4 U_4 = g_4 (\varphi_3 - \varphi_2) = (6 - 0) 1/6 = 1 \text{ А};$$

$$I_5 = g_5 U_5 = g_5 (\varphi_3 - \varphi_4) = (6 - 3) 1/6 = 0,5 \text{ А};$$

$$I_6 = g_6 U_6 = g_6 (\varphi_2 - \varphi_4) = (0 - 3) 1/6 = -0,5 \text{ А}.$$

В исходной схеме ток

$$I_7 = I_{r_3} - J_3 = 7,5 - 9 = -1,5 \text{ А}.$$

Токи $I_1 \div I_6$ схемы рис. 4.6 совпадают с токами схемы рис. 4.7.

Неопределенная матрица узловых проводимостей. Узловые уравнения можно составить для всех y узлов схемы. Матрицу узловых проводимостей, соответствующую этим уравнениям, называют неопределенной. Неопределенная матрица узловых проводимостей

$$\mathbf{G}_n^{(y)} = \mathbf{A}_n \mathbf{G}^{(b)} \mathbf{A}_n^T, \quad (4.20)$$

где $\mathbf{A}_n$ — узловая матрица, число строк которой равно числу узлов y .

В неопределенной матрице узловых проводимостей проводимость каждой ветви учитывается два раза с положительным знаком на главной диагонали (как слагаемое собственных узловых проводимостей g_{ii} , g_{jj} узлов i и j , к которым присоединена ветвь) и два раза с отрицательным знаком вне главной диагонали (как слагаемое общих узловых проводимостей $g_{ij} = g_{ji}$). Поэтому сумма элементов любого столбца и любой строки неопределенной матрицы равна нулю.

Определитель неопределенной матрицы равен нулю. Для решения узловых уравнений необходимо перейти к определенной матрице $G^{(y)}$. Определенную матрицу получают вычеркиванием одного столбца и одной строки из неопределенной матрицы. Вычеркивание j -го столбца означает, что потенциал j -го узла принимают равным нулю: $\varphi_j = 0$. Вычеркивание j -й строки означает, что отбрасывается уравнение для j -го узла, поскольку оно является линейной комбинацией других уравнений. Из неопределенной матрицы можно вычеркивать столбец и строку с различными номерами. При этом определенная матрица несимметрична. Так как сумма элементов любого столбца и любой строки неопределенной матрицы равна нулю, то можно сказать, что при вычеркивании любой строки и любого столбца из такой матрицы получают определенные матрицы с одинаковым по величине определителем.

Пусть требуется составить неопределенную матрицу узловых проводимостей и записать узловые уравнения для узлов 1 и 3 при $\varphi_3 = 0$ для схемы на рис. 4.5, а.

Неопределенная матрица узловых проводимостей

$$G_n^{(y)} = \begin{bmatrix} g_1 + g_3 + g_4 & -g_4 & -(g_1 + g_3) \\ -g_4 & g_2 + g_4 & -g_2 \\ -(g_1 + g_3) & -g_2 & g_1 + g_2 + g_3 \end{bmatrix}.$$

Вычеркивая третий столбец и вторую строку, получаем определенную матрицу

$$G^{(y)} = \begin{bmatrix} g_1 + g_3 + g_4 & -g_4 \\ -(g_1 + g_3) & -g_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, узловые уравнения для узлов 1 и 3 при $\varphi_3 = 0$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_3 + g_4 & -g_4 \\ -(g_1 + g_3) & -g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_4 + \mathcal{E}_1 g_1 \\ J_2 - \mathcal{E}_1 g_1 - \mathcal{E}_2 g_2 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом примере определенная матрица несимметрична. Для схемы на рис. 4.5 записана симметричная матрица узловых проводимостей, получаемая из неопределенной матрицы вычеркиванием третьего столбца и третьей строки.

Определитель определенной матрицы, найденной в данном примере, совпадает с определителем матрицы, записанной ранее, с точностью до знака.

§ 4.3. Применение уравнений с напряжениями ветвей дерева

В качестве независимых переменных можно принять напряжения ветвей дерева (напряжения узловых пар). При этом цепь описывается, как и при выборе в качестве независимых переменных узловых потенциалов, $y - 1$ независимыми уравнениями.

Уравнения с напряжениями ветвей дерева получают на основании первого закона Кирхгофа для сечений (4.56) с учетом соотношения (см. гл. 2)

$$\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}^{(L)}, \quad (4.21)$$

где $\mathbf{U}^{(L)}$ — матрица напряжений ветвей дерева.

Учитывая аналогию выражений (4.5а) и (4.5б), (4.14) и (4.21), уравнения с напряжениями ветвей дерева в матричной форме определяют из уравнений (4.15) заменой матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{Q}$ и матрицы Φ на матрицу $\mathbf{U}^{(L)}$:

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}^{(B)}\mathbf{Q}^T\mathbf{U}^{(L)} = \mathbf{Q}\mathbf{J}^{(B)} - \mathbf{Q}\mathbf{G}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}. \quad (4.22)$$

Если обозначить

$$\mathbf{G}^{(C)} = \mathbf{Q}\mathbf{G}^{(B)}\mathbf{Q}^T; \quad (4.23)$$

$$\mathbf{J}^{(C)} = \mathbf{Q}\mathbf{J}^{(B)} - \mathbf{Q}\mathbf{G}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}, \quad (4.24)$$

то уравнение (4.22) принимает следующий вид:

$$\mathbf{G}^{(C)}\mathbf{U}^{(L)} = \mathbf{J}^{(C)}, \quad (4.25)$$

где $\mathbf{G}^{(C)}$ — матрица проводимостей сечений; $\mathbf{J}^{(C)}$ — матрица токов сечений.

В качестве примера можно составить уравнения с напряжениями ветвей дерева для цепи на рис. 4.8, а.

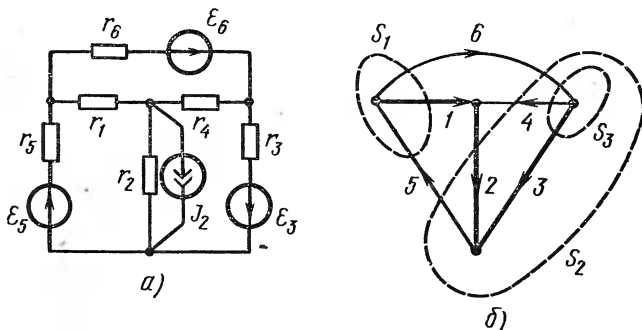


Рис. 4.8

Граф схемы с произвольно ориентированными ветвями дан на рис. 4.8, б. Выбирая дерево из ветвей 1—2—3 (сечения S_1 , S_2 , S_3), записываем матрицу сечений:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}^{(c)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & & & & & \\ & g_2 & & & & \\ & & g_3 & & & \\ & & & g_4 & & \\ & & & & g_5 & \\ & & & & & g_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & g_6 \\ 0 & g_2 & 0 & -g_4 & -g_5 & -g_6 \\ 0 & 0 & g_3 & g_4 & 0 & -g_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} g_1 + g_5 + g_6 & g_5 + g_6 & -g_6 \\ g_5 + g_6 & g_2 + g_4 + g_5 + g_6 & -(g_4 + g_6) \\ -g_6 & -(g_4 + g_6) & g_3 + g_4 + g_6 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

где $g_k = 1/r_k$; $k = 1, 2, \dots, 6$.

Матрица токов сечений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^{(c)} &= \mathbf{QJ}^{(B)} - \mathbf{QG}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)} = \mathbf{Q}[\mathbf{J}^{(B)} - \mathbf{G}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}] = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ -J_2 - 0 \\ 0 - g_3\mathcal{E}_3 \\ 0 - 0 \\ 0 - g_5\mathcal{E}_5 \\ 0 - g_6\mathcal{E}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_5\mathcal{E}_5 - g_6\mathcal{E}_6 \\ -J_2 + g_5\mathcal{E}_5 - g_6\mathcal{E}_6 \\ -g_3\mathcal{E}_3 + g_6\mathcal{E}_6 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для заданной схемы получаются уравнения с напряжениями ветвей дерева:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^{(c)} \\ J_2^{(c)} \\ J_3^{(c)} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= g_1 + g_5 + g_6; & g_{12} &= g_{21} = g_5 + g_6; & g_{13} &= g_{31} = -g_6; \\
 g_{22} &= g_2 + g_4 + g_5 + g_6; & g_{23} &= g_{32} = -(g_4 + g_6); & g_{33} &= g_3 + g_4 + g_6; \\
 J_1^{(c)} &= g_5\mathcal{E}_5 - g_6\mathcal{E}_6; & J_2^{(c)} &= -J_2 + g_5\mathcal{E}_5 - g_6\mathcal{E}_6; & J_3^{(c)} &= -g_3\mathcal{E}_3 + g_6\mathcal{E}_6.
 \end{aligned}$$

Анализ результатов примера позволяет сделать следующие выводы:

1. В матрице проводимостей сечений $\mathbf{G}^{(c)}$ элементы главной диагонали (собственные проводимости) равны взятым с положительным знаком суммам проводимостей ветвей, пересекаемых соответствующей поверхностью. Например, проводимость $g_{22}=g_2+g_4+g_5+g_6$, так как поверхность S_2 пересекает ветви 2, 4, 5, 6.

2. Недиагональный элемент g_{ij} ($i \neq j$) равен взятой с положительным (отрицательным) знаком сумме проводимостей ветвей, общих для i -й и j -й поверхностей. Эту сумму записывают с положительным (отрицательным) знаком, если ветви дерева, соответствующие поверхностям S_i и S_j , при переходе от одной поверхности к другой не меняют (меняют) направления. Например, проводимость $g_{12}=g_5+g_6$, так как для поверхностей S_1 и S_2 ветви 5 и 6 являются общими, а направление ветвей 1 и 2 дерева при переходе от поверхности S_1 к поверхности S_2 одинаково. Проводимость $g_{23}=- (g_4+g_6)$, поскольку ветви 4 и 6 являются общими для поверхностей S_2 и S_3 , а направление ветвей 2 и 3 дерева при переходе от поверхности S_2 к поверхности S_3 противоположно.

3. Элемент $g_{ij}=g_{ji}$, т. е. матрица $\mathbf{G}^{(c)}$ симметрична.

4. Элементы матрицы $\mathbf{J}^{(c)}$ равны алгебраической сумме токов источников тока (включая источники тока, эквивалентные источникам э. д. с.) ветвей, пересекаемых соответствующей поверхностью. При этом с положительным (отрицательным) знаком учитывают токи источников, направленные противоположно (согласно) направлению ветви дерева относительно соответствующей поверхности. Например, элемент $J_2^{(c)} = -J_2 + g_5 \mathcal{E}_5 - g_6 \mathcal{E}_6$, так как направление токов J_2 и $-g_6 \mathcal{E}_6$ совпадает с направлением ветви 2 дерева относительно поверхности S_2 , а направление тока $g_5 \mathcal{E}_5$ противоположно направлению ветви 2.

Таким образом, так же как и узловые уравнения, уравнения с напряжениями ветвей дерева могут быть составлены непосредственно из рассмотрения схемы.

Пример 4.3. Рассчитать токи в схеме на рис. 4.9, а с помощью уравнений с напряжениями ветвей дерева. Параметры схемы:

$$r_1=r_2=r_5=r_7=1 \text{ Ом}; \quad r_3=r_4=r_6=2 \text{ Ом};$$

$$\mathcal{E}_1=1 \text{ В}; \quad \mathcal{E}_4=12 \text{ В}; \quad J_5=3 \text{ А}; \quad J_6=4 \text{ А}.$$

Решение. Граф схемы и выбранное дерево (ветви 1, 2, 3, 4) приведены на рис. 4.9, б. Выбранному дереву соответствуют сечения S_1 , S_2 , S_3 и S_4 . Для схемы составим уравнения:

$$\begin{bmatrix} g_1+g_5 & -g_5 & 0 & 0 \\ -g_5 & g_2+g_5+g_7 & g_7 & 0 \\ 0 & g_7 & g_3+g_6+g_7 & -g_6 \\ 0 & 0 & -g_6 & g_4+g_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 \mathcal{E}_1 - J_5 \\ J_5 \\ -J_6 \\ J_6 - g_4 \mathcal{E}_4 \end{bmatrix}$$

или

$$2U_1 - U_2 = -4;$$

$$-U_1 + 3U_2 + U_3 = 3;$$

$$U_2 + 2U_3 - U_4 = -4;$$

$$-(1/2)U_3 + U_4 = -2.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем напряжения ветвей дерева:

$$U_1 = -1 \text{ В}; \quad U_2 = 2 \text{ В}; \quad U_3 = -4 \text{ В}; \quad U_4 = -4 \text{ В}.$$

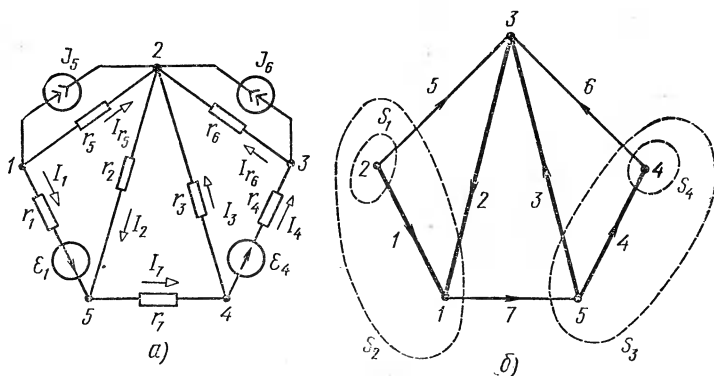


Рис. 4.9

Токи в схеме определим из соотношений:

$$I_1 = g_1 (U_1 + \mathcal{E}_1) = 1 (-1 + 1) = 0;$$

$$I_2 = g_2 U_2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ А};$$

$$I_3 = g_3 U_3 = 1/2 (-4) = -2 \text{ А};$$

$$I_4 = g_4 (U_4 + \mathcal{E}_4) = 1/2 (-4 + 12) = 4 \text{ А};$$

$$I_5 = g_5 U_5 = g_5 (U_1 - U_2) = 1 (-1 - 2) = -3 \text{ А};$$

$$I_6 = g_6 U_6 = g_6 (U_3 - U_4) = 1/2 (-4 + 4) = 0;$$

$$I_7 = g_7 U_7 = g_7 (-U_2 - U_3) = 1 (-2 + 4) = 2 \text{ А}.$$

При определении токов в ветвях связи сначала вычисляют напряжения ветвей связи через напряжения ветвей дерева (по второму закону Кирхгофа).

Необходимо отметить, что в качестве независимых напряжений не обязательно следует выбирать напряжения ветвей схемы, образующих дерево. Независимыми переменными являются напряжения между парами узлов, если при соединении этих пар линией получается граф, представляющий дерево с $y-1$ ветвями. При этом

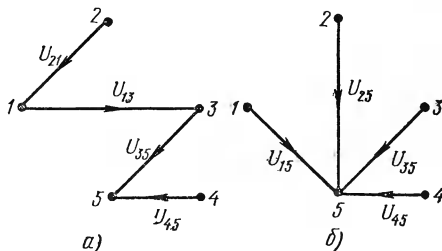


Рис. 4.10

ветви схемы между некоторыми узловыми парами могут отсутствовать. Например, для схемы рис. 4.9, а в качестве переменных можно выбрать напряжения U_{13} , U_{35} , U_{45} , U_{21} . Эти на-

пряжения независимы, так как соответствующий граф (рис. 4.10, а) представляет собой дерево. Уравнения с узловыми потенциалами являются частным случаем уравнений с напряжениями узловых пар, в случае когда у всех узловых пар имеется один общий узел. Например, для схемы рис. 4.9, а узловым уравнениям при $\varphi_b = 0$ соответствуют напряжения узловых пар, приведенные на рис. 4.10, б. Эти напряжения образуют дерево, все ветви которого имеют общий узел.

§ 4.4. Применение контурных уравнений

Контурные уравнения. В качестве независимых переменных можно принять токи ветвей связи, или так называемые контурные токи. Знание контурных токов позволяет найти все токи в схеме.

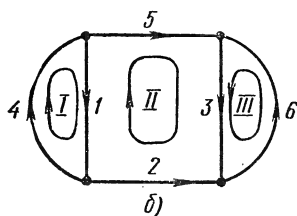
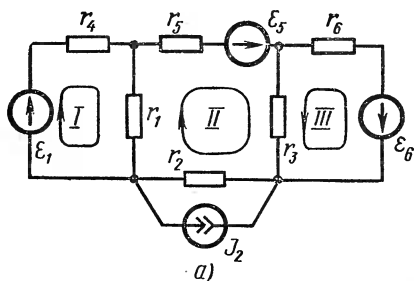


Рис. 4.11

Уравнения с контурными токами (контурные уравнения) получают на основании второго закона Кирхгофа; их число равно числу независимых уравнений, составляемых для контуров, т. е. $\nu - y + 1$.

Выражение (4.9) запишем следующим образом:

$$\mathbf{BR}^{(b)}\mathbf{I}^{(b)} = \mathbf{B}\mathcal{E}^{(b)} - \mathbf{BR}^{(b)}\mathbf{J}^{(b)}.$$

Токи в ветвях определим через контурные токи по формуле (см. гл. 2)

$$\mathbf{I}^{(b)} = \mathbf{B}^{(T)}\mathbf{I}^{(k)}. \quad (4.26)$$

Таким образом, получаются уравнения вида

$$\mathbf{BR}^{(b)}\mathbf{B}^{(T)}\mathbf{I}^{(k)} = \mathbf{B}\mathcal{E}^{(b)} - \mathbf{BR}^{(b)}\mathbf{J}^{(b)}, \quad (4.27)$$

которые называют контурными уравнениями в матричной форме.

Если обозначить

$$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{BR}^{(b)}\mathbf{B}^{(T)}, \quad (4.28)$$

$$\mathcal{E}^{(k)} = \mathbf{B}\mathcal{E}^{(b)} - \mathbf{BR}^{(b)}\mathbf{J}^{(b)}, \quad (4.29)$$

то контурные уравнения примут вид

$$\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{I}^{(k)} = \mathcal{E}^{(k)}. \quad (4.30)$$

Матрицу $\mathbf{R}^{(k)}$ называют матрицей контурных сопротивлений, матрицу $\mathcal{E}^{(k)}$ — матрицей контурных э. д. с.

В развернутой форме уравнение (4.30) имеет вид

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(K)} \\ I_2^{(K)} \\ \vdots \\ I_k^{(K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{(K)} \\ \mathcal{E}_2^{(K)} \\ \vdots \\ \mathcal{E}_k^{(K)} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Пусть требуется составить контурные уравнения для цепи на рис. 4.11, а.

Данная схема имеет четыре узла и шесть ветвей; число независимых контуров $v - y + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$. Граф схемы с выбранным деревом (ветви 1, 2, 3) приведен на рис. 4.11, б.

Матрица контуров

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица сопротивлений ветвей

$$\mathbf{R}^{(B)} = \begin{bmatrix} r_1 & & & & & \\ & r_2 & & & & \\ & & r_3 & & & \\ & & & r_4 & & \\ & & & & r_5 & \\ & & & & & r_6 \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений

$$\mathbf{R}^{(K)} = \mathbf{B} \mathbf{R}^{(B)} \mathbf{B}^T =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & & & & & \\ & r_2 & & & & \\ & & r_3 & & & \\ & & & r_4 & & \\ & & & & r_5 & \\ & & & & & r_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 \\ -r_1 - r_2 & r_3 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & r_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} r_1 + r_4 & -r_1 & 0 \\ -r_1 & r_1 + r_2 + r_3 + r_5 & r_3 \\ 0 & r_3 & r_3 + r_6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица э. д. с. источников э. д. с. ветвей

$$\mathcal{E}^{(B)} = [0 \ 0 \ 0 \ \mathcal{E}_4 \ \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_6]^T;$$

матрица токов источников тока ветвей

$$J^{(B)} = [0 \ -J_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Матрица контурных э. д. с.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(K)} &= B\mathcal{E}^{(B)} - BR^{(B)}J^{(B)} = B[\mathcal{E}^{(B)} - R^{(B)}J^{(B)}] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 + r_2 J_2 \\ 0 - 0 \\ \mathcal{E}_4 - 0 \\ \mathcal{E}_5 - 0 \\ -\mathcal{E}_6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_4 \\ \mathcal{E}_5 - r_2 J_2 \\ -\mathcal{E}_6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом примере контурные токи совпадают с токами ветвей 4, 5, 6, т. е. с токами ветвей связи. Матрица контурных токов

$$I^{(K)} = [I_1^{(K)} I_2^{(K)} I_3^{(K)}]^T = [I_4 I_5 I_6]^T.$$

Таким образом, контурные уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{(K)} \\ \mathcal{E}_2^{(K)} \\ \mathcal{E}_3^{(K)} \end{bmatrix},$$

где

$$r_{11} = r_1 + r_4; \quad r_{12} = r_{21} = -r_1; \quad r_{13} = r_{31} = 0;$$

$$r_{22} = r_1 + r_2 + r_3 + r_5; \quad r_{23} = r_{32} = r_3; \quad r_{33} = r_3 + r_6;$$

$$\mathcal{E}_1^{(K)} = \mathcal{E}_4; \quad \mathcal{E}_2^{(K)} = \mathcal{E}_5 - r_2 J_2; \quad \mathcal{E}_3^{(K)} = -\mathcal{E}_6.$$

Анализ результатов данного примера позволяет сделать следующие выводы:

1. В матрице контурных сопротивлений* на главной диагонали записываются суммы сопротивлений ветвей соответствующего контура с положительным знаком. Диагональные элементы матрицы называют собственными контурными сопротивлениями. Элемент r_{ij} матрицы контурных сопротивлений ($i \neq j$) равен сопротивлению ветви, общей для контуров i и j , с положительным (отрицательным) знаком; положительный (отрицательный) знак записывают при условии, что контурные токи $I_i^{(K)}$ и $I_j^{(K)}$ в общей ветви направлены одинаково (противоположно).

* Предполагается, что направление обхода контура совпадает с направлением соответствующего контурного тока.

Внедиагональные элементы матрицы называют общими контурными сопротивлениями.

2. Матрица $\mathbf{R}^{(k)}$ симметрична, т. е. $r_{ij} = r_{ji}$.

3. Элемент $\mathcal{E}_i^{(k)}$ матрицы контурных э. д. с. равен алгебраической сумме э. д. с. источников напряжения i -го контура, входящая э. д. с. источников, эквивалентных источникам тока. При этом с положительным (отрицательным) знаком записывают э. д. с., направление которых совпадает (противоположно) с направлением обхода контура.

Следовательно, контурные уравнения можно составить непосредственно из рассмотрения схемы.

Если в схеме имеются ветви с идеальными источниками тока, то сопротивления таких ветвей $r_k = \infty$. В этом случае для записи

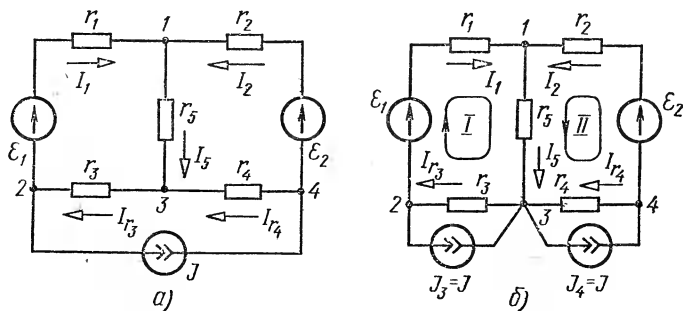


Рис. 4.12

матричного уравнения (4.27) необходимо использовать преобразование, показанное на рис. 4.3. Ветви с идеальными источниками э. д. с. не требуют преобразования схемы: в матрице ветвям с идеальными источниками э. д. с. соответствуют сопротивления $r_k = 0$. Преобразование, рассмотренное на рис. 4.4, приводит к уменьшению числа ветвей и, следовательно, столбцов матрицы $\mathbf{B}$.

При непосредственной записи контурных уравнений без применения матричного соотношения (4.27) ток каждого источника тока можно считать известным контурным током, замыкающимся по любым ветвям, образующим замкнутый контур с ветвью источника тока. Напряжения, вызванные такими контурными токами, учитывают в правой части контурных уравнений. Возможность образования любых контуров, по которым замыкаются известные контурные токи — токи источников тока, объясняется эквивалентностью схем, показанных на рис. 4.3, а, б.

Пример 4.4. Рассчитать токи в цепи рис. 4.12, а. Параметры схемы: $r_1 = 2$ Ом; $r_2 = 1$ Ом; $r_3 = 3$ Ом; $r_4 = 4$ Ом; $r_5 = 5$ Ом; $\mathcal{E}_1 = 40$ В; $\mathcal{E}_2 = 15$ В; $J = 5$ А.

Решение. Между узлами 2 и 4 схемы включен идеальный источник тока J . Включая в узле 3 два равных противоположно направленных источника тока J , получим эквивалентную схему, приведенную на рис. 4.12, б и содержащую два независимых контура. Для контурных токов I_1 и I_2 запишем

контурные уравнения

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_3 + r_5 & r_5 \\ r_5 & r_2 + r_4 + r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 - r_3 J_3 \\ \mathcal{E}_2 + r_4 J_4 \end{bmatrix},$$

где слагаемые, обусловленные токами источников тока ветвей ($-r_3 J_3$ и $r_4 J_4$), представим как напряжения от известного контурного тока, замыкающегося по сопротивлению r_3 и r_4 .

Подставляя числовые данные, получим

$$10I_1 + 5I_2 = 25;$$

$$5I_1 + 10I_2 = 35.$$

Решая два уравнения совместно, найдем $I_1 = 1$ А; $I_2 = 3$ А.

Остальные токи вычислим из соотношений:

$$I_{r_3} = I_1 + J = 1 + 5 = 6 \text{ А};$$

$$I_{r_4} = -I_2 + J = -3 + 5 = 2 \text{ А};$$

$$I_5 = I_1 + I_2 = 1 + 3 = 4 \text{ А}.$$

Неопределенная матрица контурных сопротивлений. Если цепь планарная, то в качестве контуров можно выбрать соседние «ячейки» схемы и добавить один избыточный контур по внешнему очертанию схемы (рис. 4.13). При условии, что в ячейках все контурные токи направлены по часовой стрелке, а ток внешнего контура — против часовой стрелки, сопротивление каждой ветви будет учитываться два раза с положительным знаком на главной диагонали и два раза с отрицательным знаком вне этой диагонали. С положительным знаком сопротивление записывают как слагаемое соб-

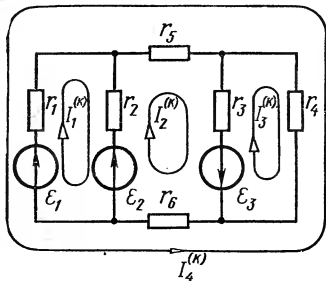


Рис. 4.13

ственных сопротивлений r_{ii} и r_{jj} контуров i и j ; с отрицательным знаком — как слагаемое общих сопротивлений $r_{ij} = r_{ji}$.

Сумма элементов любого столбца и любой строки матрицы контурных сопротивлений при сформулированных условиях равна нулю, и матрица называется неопределенной. Неопределенная матрица

$$\mathbf{R}_n^{(K)} = \mathbf{B}_n \mathbf{R}^{(B)} \mathbf{B}_n^T,$$

где $\mathbf{B}_n$ — контурная матрица, у которой число строк на единицу больше числа независимых контуров.

Неопределенной матрице $\mathbf{R}_n^{(K)}$ соответствует система контурных уравнений с одним зависимым уравнением. Определитель такой матрицы равен нулю, поэтому для решения контурных уравнений необходимо перейти к определенной матрице, получаемой вычеркиванием одного столбца и одной строки из неопределенной матрицы. Если номера вычеркиваемых строки и столбца одинаковы, то определенная матрица симметрична; в противном

случае получается несимметричная определенная матрица контурных сопротивлений.

В качестве примера можно составить неопределенную матрицу контурных сопротивлений для схемы, изображенной на рис. 4.13.

Неопределенная матрица в данном случае соответствует четырем контурам:

$$\mathbf{R}_n^{(K)} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_2 + r_3 + r_5 + r_6 & -r_3 & -(r_5 + r_6) \\ 0 & -r_3 & r_3 + r_4 & -r_4 \\ -r_1 & -(r_5 + r_6) & -r_4 & r_1 + r_4 + r_5 + r_6 \end{bmatrix}.$$

Если вычеркнуть четвертый столбец (принять $I_4^{(K)} = 0$) и третью строку (отбросить уравнение для третьего контура), то определенная матрица

$$\mathbf{R}^{(K)} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 & 0 \\ -r_2 & r_2 + r_3 + r_5 + r_6 & -r_3 \\ -r_1 & -(r_5 + r_6) & -r_4 \end{bmatrix}$$

несимметрична. В контурные уравнения с такой матрицей войдут в качестве неизвестных контурные токи $I_1^{(K)}$, $I_2^{(K)}$, $I_3^{(K)}$, однако третье уравнение будет составлено для внешнего контура, а не для контура, в котором замыкается ток $I_3^{(K)}$.

При вычеркивании четвертого столбца и четвертой строки определенная матрица

$$\mathbf{R}^{(K)} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 & 0 \\ -r_2 & r_2 + r_3 + r_5 + r_6 & -r_3 \\ 0 & -r_3 & r_3 + r_4 \end{bmatrix}$$

симметрична.

Контурные уравнения в этом случае соответствуют контурам, в которых как бы замыкаются токи $I_1^{(K)}$, $I_2^{(K)}$, $I_3^{(K)}$.

Контурные и узловые уравнения дуальных цепей. У двух дуальных резистивных цепей выполняются следующие численные равенства параметров: $g_{k1} = r_{k2}$; $r_{k1} = g_{k2}$; $\mathcal{E}_{k1} = J_{k2}$; $J_{k1} = \mathcal{E}_{k2}$, что следует из общих положений, рассмотренных в гл. 2. Поэтому для дуальных цепей справедливы матричные равенства:

$$\mathbf{G}_1^{(B)} = \mathbf{R}_2^{(B)}; \mathbf{R}_1^{(B)} = \mathbf{G}_2^{(B)}; \mathcal{E}_1^{(B)} = \mathbf{J}_2^{(B)}; \mathbf{J}_1^{(B)} = \mathcal{E}_2^{(B)}.$$

Дуальные цепи имеют также одинаковые узловые и контурные матрицы, т. е. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_2$; $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2$. Из сравнения уравнений (4.15) и (4.27) дуальных цепей можно сделать вывод: *узловые уравнения одной цепи совпадают с контурными уравнениями другой цепи и наоборот* (за исключением обозначений независимых переменных).

Идентичность узловых и контурных уравнений цепей часто служит определением их дуальности. Из такого определения легко вывести равенство узловых и контурных матриц, а также соответствующие равенства для параметров элементов дуальных цепей.

**ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

§ 5.1. Баланс мощностей

Пусть в электрической цепи произвольной конфигурации имеются источники и приемники электрической энергии. Сумма мощностей P_k всех b ветвей такой электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^b P_k = \sum_{k=1}^b U_k I_k = 0. \quad (5.1)$$

Действительно, сумму мощностей можно выразить как произведение транспонированной матрицы напряжений ветвей на матрицу токов ветвей:

$$\sum_{k=1}^b U_k I_k = [U^{(b)}]^T I^{(b)}.$$

Согласно равенству (4.14),

$$[U^{(b)}]^T = [A^T \Phi]^T = \Phi^T A.$$

С учетом первого закона Кирхгофа (4.5а)

$$\sum_{k=1}^b U_k I_k = \Phi^T A I^{(b)} = 0.$$

Следует отметить, что соотношение (5.1) определяется топологией схемы и не зависит от параметров элементов ветвей.

Для произвольной цепи с источниками постоянной э. д. с. и постоянного тока соотношению (5.1) можно придать другой вид. Так как

$$I^{(b)} = I_r - J^{(b)},$$

то

$$[U^{(b)}]^T I^{(b)} = [U^{(b)}]^T [I_r - J^{(b)}] = 0,$$

откуда

$$[U^{(b)}]^T I_r = [U^{(b)}]^T J^{(b)}. \quad (5.2)$$

Из равенства (4.3) получаем

$$[U^{(b)}]^T = [R^{(b)} I_r - \mathcal{E}^{(b)}]^T = I_r^T R^{(b)} - \mathcal{E}^{(b)T} \quad (5.3)$$

(матрица $R^{(b)}$ при транспонировании не изменяется, так как представляет собой диагональную матрицу).

Подставляя соотношение (5.3) в формулу (5.2), находим

$$I_r^T R^{(b)} I_r = [\mathcal{E}^{(b)}]^T I_r + [U^{(b)}]^T J^{(b)}. \quad (5.4)$$

Произведение

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_r^T \mathbf{R}^{(B)} \mathbf{I}_r &= [I_{r_1} I_{r_2} \dots I_{r_B}] \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & r_2 & \\ & & \ddots \\ & & & r_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r_1} \\ I_{r_2} \\ \vdots \\ I_{r_B} \end{bmatrix} = \\ &= r_1 I_{r_1}^2 + r_2 I_{r_2}^2 + \dots + r_B I_{r_B}^2 = \sum_{k=1}^B r_k I_{r_k}^2 \end{aligned}$$

выражает суммарную мощность, рассеиваемую в резисторах (потребляемую мощность). Эта мощность всегда положительна.

Произведение

$$[\mathcal{E}^{(B)}]^T \mathbf{I}_r = [\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_B] \begin{bmatrix} I_{r_1} \\ I_{r_2} \\ \vdots \\ I_{r_B} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^B \mathcal{E}_k I_{r_k}$$

определяет мощность, генерируемую источниками напряжения (см. рис. 4.1).

Произведение

$$[\mathbf{U}^{(B)}]^T \mathbf{J}^{(B)} = [U_1 U_2 \dots U_B] \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_B \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^B U_k J_k$$

выражает мощность, генерируемую источниками тока.

Мощность источника может быть положительной или отрицательной величиной; отрицательный знак мощности означает, что соответствующий источник работает в режиме потребления электрической энергии (например, при зарядке аккумуляторной батареи).

Таким образом, для любой цепи выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^B \mathcal{E}_k I_{r_k} + \sum_{k=1}^B U_k J_k = \sum_{k=1}^B r_k I_{r_k}^2. \quad (5.5)$$

Равенства (5.4) и (5.5) представляют собой математическую форму записи баланса мощностей: *суммарная мощность, генерируемая источниками электрической энергии, равна суммарной мощности, потребляемой в цепи.*

Условие баланса мощностей, являясь следствием закона сохранения энергии, отражается в уравнениях электрических цепей и относится к общим свойствам цепей.

Пример 5.1. Составить баланс мощностей для цепи на рис. 4.12, а (см пример 4.5).

Решение. Воспользовавшись результатами расчета схемы на рис. 4.12, а, вычислим потребляемую мощность:

$$\begin{aligned} \sum_k r_k I_k^2 &= r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2 + r_4 I_4^2 + r_5 I_5^2 = \\ &= 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 4^2 = 215 \text{ Вт}, \end{aligned}$$

Мощность, генерируемая источниками,

$$\sum_k \mathcal{E}_k I_k + \sum_k U_k J_k = \mathcal{E}_1 I_1 + \mathcal{E}_2 I_2 + (\Phi_4 - \Phi_2) J = \mathcal{E}_1 I_1 + \mathcal{E}_2 I_2 + (r_4 I_{r_4} + r_3 I_{r_3}) J,$$

где

$$\Phi_4 - \Phi_2 = r_4 I_{r_4} + r_3 I_{r_3}$$

— напряжение на зажимах источника тока.

При подстановке численных значений получим

$$\sum_k \mathcal{E}_k I_k + \sum_k U_k J_k = 40 \cdot 1 + 15 \cdot 3 + (4 \cdot 2 + 3 \cdot 6) 5 = 215 \text{ Вт},$$

что совпадает с величиной потребляемой мощности.

Мощность, генерируемая источником тока в схеме на рис. 4.12, а, равна сумме мощностей двух источников тока в схеме на рис. 4.12, б.

§ 5.2. Принцип наложения

Если из (4.30) выразить матрицу контурных токов, умножая обе части уравнения на матрицу $[\mathbf{R}^{(K)}]^{-1}$ и учитывая (4.29), то для матрицы токов ветвей $\mathbf{I}^{(B)}$ будет справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{B} \mathbf{I}^{(K)} = \mathbf{B}^T [\mathbf{R}^{(K)}]^{-1} \mathbf{B} \mathcal{E}^{(B)} - \mathbf{B}^T [\mathbf{R}^{(K)}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{(B)} \mathbf{J}^{(B)}. \quad (5.6)$$

Пусть

$$\mathbf{B}^T [\mathbf{R}^{(K)}]^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{G} = [g_{hl}], \quad (5.7)$$

$$-\mathbf{B}^T [\mathbf{R}^{(K)}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{(B)} = -\mathbf{G} \mathbf{R}^{(B)} = \mathbf{K}^{(I)} = [K_{hl}^{(I)}], \quad (5.8)$$

где $\mathbf{G}$ — матрица входных и взаимных проводимостей; $\mathbf{K}^{(I)}$ — матрица коэффициентов передачи тока.

Тогда равенство (5.6) принимает вид

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{G} \mathcal{E}^{(B)} + \mathbf{K}^{(I)} \mathbf{J}^{(B)}. \quad (5.9)$$

Матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{K}^{(I)}$ являются квадратными, имеют порядок, равный числу ветвей v . Матричное соотношение (5.9) эквивалентно v алгебраическим выражениям для токов ветвей:

$$I_h = \sum_{l=1}^v g_{hl} \mathcal{E}_l + \sum_{l=1}^v K_{hl}^{(I)} J_l; \quad h = 1, 2, \dots, v. \quad (5.10)$$

Соотношения (5.9) и (5.10) показывают, что ток любой ветви схемы может быть представлен как алгебраическая сумма составляющих, обусловленных действием каждого источника в отдельности. Другими словами, токи ветвей схемы удовлетворяют *принципу наложения*.

Элементы g_{hl} матрицы $\mathbf{G}$ имеют размерность проводимости, причем

$$g_{hl} = I_h / \mathcal{E}_l, \quad (5.11)$$

если в цепи действует только один источник э. д. с. $\mathcal{E}_l$, а остальные источники исключены (источники э. д. с. замкнуты, источ-

ники тока разомкнуты)*. При $l=h$ проводимость g_{hl} называют входной проводимостью ветви h (относительно зажимов источника э. д. с. $\mathcal{E}_h$). При $l \neq h$ проводимость g_{hl} называют взаимной проводимостью ветвей h и l . В данном случае $g_{hl} = g_{lh}$, т. е. матрица $\mathbf{G}$ симметрична. Действительно,

$$\mathbf{G}^T = \{\mathbf{B}^T [\mathbf{R}^{(k)}]^{-1} \mathbf{B}\}^T = \mathbf{B}^T [\mathbf{R}^{(k)}]^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{G}, \quad (5.12)$$

так как матрица контурных сопротивлений $\mathbf{R}^{(k)}$ и, следовательно, матрица $[\mathbf{R}^{(k)}]^{-1}$ симметричны.

Безразмерные элементы $K_{hl}^{(i)}$ матрицы $\mathbf{K}^{(i)}$ называют коэффициентами передачи тока или коэффициентами распределения тока источника тока, причем

$$K_{hl}^{(i)} = I_h / J_i, \quad (5.13)$$

если в цепи действует только один источник тока J_i , а все остальные источники исключены.

Между входными и взаимными проводимостями, а также между коэффициентами передачи тока существует связь, обусловленная первым законом Кирхгофа. Так как токи ветвей удовлетворяют соотношению $\mathbf{A}\mathbf{I}^{(b)} = \mathbf{0}$, элементы матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{K}^{(i)}$ должны удовлетворять соотношениям

$$\mathbf{A}\mathbf{G}^{(b)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{0},$$

т. е. алгебраическая сумма входной проводимости l -й ветви g_{ll} (коэффициента $K_{ll}^{(i)}$) и взаимных проводимостей g_{hl} всех ветвей, имеющих один и тот же общий узел с ветвью l (коэффициентов $K_{hl}^{(i)}$ таких ветвей), равна нулю.

Принцип наложения справедлив и для токов в сопротивлениях I_{r_k} , так как матрица токов в сопротивлениях

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{I}^{(b)} + \mathbf{J}^{(b)} = \mathbf{G}\mathcal{E}^{(b)} + [\mathbf{K}^{(i)} + \mathbf{1}] \mathbf{J}^{(b)} = \mathbf{G}\mathcal{E}^{(b)} + \bar{\mathbf{K}}^{(i)} \mathbf{J}^{(b)}, \quad (5.14)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица порядка v ; $\bar{\mathbf{K}}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} + \mathbf{1}$. Таким образом, для токов в сопротивлениях можно записать равенства, аналогичные (5.10).

Из соотношений (5.9) и (5.14) можно убедиться в применимости принципа наложения для напряжений ветвей U_k и падений напряжений на сопротивлениях U_{r_k} , а также получить выражения, дуальные (5.6) ÷ (5.9), основываясь на узловых уравнениях (4.18) и равенстве (4.17). Так, матрица напряжений ветвей

$$\mathbf{U}^{(b)} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}^T [\mathbf{G}^{(y)}]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{J}^{(b)} - \mathbf{A}^T [\mathbf{G}^{(y)}]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}^{(b)} \mathcal{E}^{(b)} \quad (5.15)$$

или

$$\mathbf{U}^{(b)} = \mathbf{R} \mathbf{J}^{(b)} + \mathbf{K}^{(u)} \mathcal{E}^{(b)}, \quad (5.16)$$

* Реальные источники энергии могут быть представлены схемами замещения в виде последовательного (параллельного) соединения идеального источника э. д. с. (тока) и внутреннего сопротивления. При исключении таких источников (для расчета токов и напряжений от одного источника) в схемах обязательно остаются внутренние сопротивления всех исключаемых источников.

где

$$\mathbf{R} = [r_{hl}] = \mathbf{A}^T [\mathbf{G}^{(y)}]^{-1} \mathbf{A} \quad (5.17)$$

— матрица входных и взаимных сопротивлений;

$$\mathbf{K}^{(u)} = [K_{hl}^{(u)}] = -\mathbf{A}^T [\mathbf{G}^{(y)}]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}^{(b)} = -\mathbf{R} \mathbf{G}^{(b)} \quad (5.18)$$

— матрица коэффициентов передачи напряжения.

Матричное равенство (5.16) эквивалентно в алгебраическом соотношениям:

$$U_h = \sum_{l=1}^B r_{hl} J_l + \sum_{l=1}^B K_{hl}^{(u)} \mathcal{E}_l; \quad h = 1, 2, \dots, v, \quad (5.19)$$

т. е. напряжение любой ветви может быть представлено как сумма составляющих, обусловленных действием каждого источника в отдельности.

Элементы r_{hl} матрицы $\mathbf{R}$ имеют размерность сопротивления, причем

$$r_{hl} = U_h / J_l, \quad (5.20)$$

если в цепи действует только один источник тока J_l , а все другие источники исключены. При $l=h$ сопротивление r_{hh} называют входным сопротивлением ветви h (относительно зажимов источника J_h). При $l \neq h$ сопротивление r_{hl} называют взаимным сопротивлением ветвей h и l . В данном случае $r_{hl} = r_{lh}$, т. е. матрица входных и взаимных сопротивлений симметрична.

Безразмерные элементы $K_{hl}^{(u)}$ матрицы $\mathbf{K}^{(u)}$ называют коэффициентами передачи напряжения или коэффициентами распределения напряжения, причем

$$K_{hl}^{(u)} = U_h / \mathcal{E}_l, \quad (5.21)$$

если в цепи действует лишь один источник э. д. с. $\mathcal{E}_l$, а все остальные источники исключены.

Между входными и взаимными сопротивлениями, а также между коэффициентами передачи напряжения имеется связь, обусловленная вторым законом Кирхгофа. Так как напряжения ветвей удовлетворяют уравнению $\mathbf{B} \mathbf{U}^{(b)} = 0$, элементы матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{K}^{(u)}$ должны удовлетворять соотношениям

$$\mathbf{B} \mathbf{R} = 0; \quad \mathbf{B} \mathbf{K}^{(u)} = 0,$$

т. е. алгебраическая сумма входного сопротивления l -й ветви r_{ll} (коэффициента $K_{ll}^{(u)}$) и взаимных сопротивлений r_{hl} всех ветвей, образующих с ветвью l один контур (коэффициентов $K_{hl}^{(u)}$), равна нулю.

Для падений напряжений U_{r_k} на сопротивлениях справедливы соотношения, аналогичные (5.19).

Принцип наложения применим также для контурных токов и узловых потенциалов. Этот принцип обусловлен линейностью

уравнений, описывающих цепь, и справедлив для любых величин, связанных линейной зависимостью. Следовательно, им нельзя воспользоваться для расчета мощностей в общем случае, так как мощности являются нелинейными функциями тока или напряжения.

Пример 5.2. Вычислить входные и взаимные проводимости и сопротивления, а также коэффициенты передачи тока и напряжения для цепи рис. 5.1, а. Рассчитать по принципу наложения токи и напряжения ветвей. Параметры схемы: $r_3 = r_5 = 2 \text{ Ом}$; $r_4 = r_6 = 3 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$; $J_2 = 2 \text{ А}$.

Решение. На рис. 5.1, б, в показаны две схемы, каждая из которых содержит только один источник.

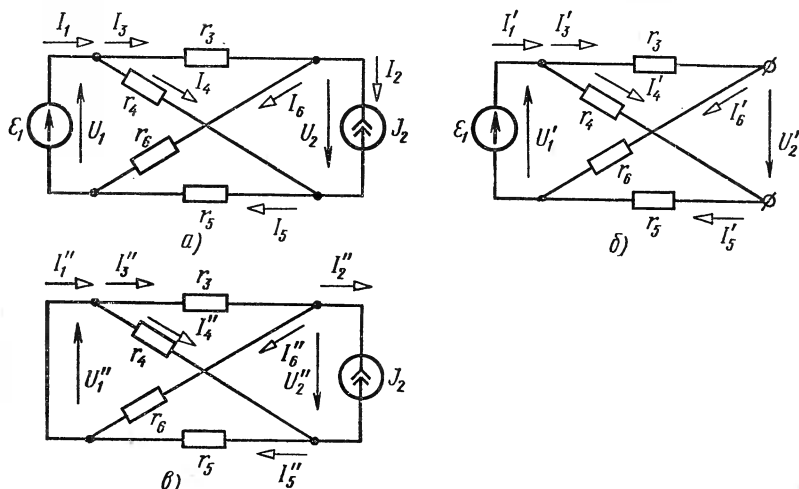


Рис. 5.1

В схеме с источником э. д. с. $\mathcal{E}_1$

$$I'_3 = I'_6 = \mathcal{E}_1 / (r_3 + r_6); \quad I'_4 = I'_5 = \mathcal{E}_1 / (r_4 + r_5);$$

$$I'_1 = I'_3 + I'_4 = \mathcal{E}_1 \left(\frac{1}{r_3 + r_6} + \frac{1}{r_4 + r_5} \right); \quad I'_2 = 0.$$

На основании формулы (5.11)

$$g_{11} = \frac{1}{r_3 + r_6} + \frac{1}{r_4 + r_5} = 0,4 \text{ См}; \quad g_{21} = 0;$$

$$g_{31} = g_{61} = \frac{1}{r_3 + r_6} = 0,2 \text{ См}; \quad g_{41} = g_{51} = \frac{1}{r_4 + r_5} = 0,2 \text{ См}.$$

Вычисляя напряжения на зажимах ветвей в схеме с источником $\mathcal{E}_1$ и применяя формулу (5.21), рассчитаем коэффициенты передачи напряжения:

$$K_{11}^{(u)} = \frac{U'_1}{\mathcal{E}_1} = -1; \quad K_{21}^{(u)} = \frac{U'_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{r_6}{r_3 + r_6} - \frac{r_5}{r_4 + r_5} = 0,2;$$

$$K_{31}^{(u)} = \frac{U'_3}{\mathcal{E}_1} = \frac{r_3}{r_3 + r_6} = 0,4; \quad K_{41}^{(u)} = \frac{U'_4}{\mathcal{E}_1} = \frac{r_4}{r_4 + r_5} = 0,6;$$

$$K_{51}^{(u)} = \frac{U'_5}{\mathcal{E}_1} = \frac{r_5}{r_4 + r_5} = 0,4; \quad K_{61}^{(u)} = \frac{U'_6}{\mathcal{E}_1} = \frac{r_6}{r_3 + r_6} = 0,6.$$

В схеме с источником тока J_2 (рис. 5.1, в)

$$U_1''=0; \quad U_3''=J_2 \left(\frac{r_3 r_6}{r_3+r_6} + \frac{r_4 r_5}{r_4+r_5} \right);$$

$$U_3''=-J_2 \frac{r_3 r_6}{r_3+r_6}; \quad U_4''=J_2 \frac{r_4 r_5}{r_4+r_5};$$

$$U_5''=-J_2 \frac{r_4 r_5}{r_4+r_5}; \quad U_6''=J_2 \frac{r_3 r_6}{r_3+r_6}.$$

В соответствии с формулой (5.20)

$$r_{22}=\frac{r_3 r_6}{r_3+r_6} + \frac{r_4 r_5}{r_4+r_5}=2,4 \text{ Ом};$$

$$r_{12}=0; \quad r_{32}=-r_{62}=-\frac{r_3 r_6}{r_3+r_6}=-1,2 \text{ Ом};$$

$$r_{42}=-r_{52}=\frac{r_4 r_5}{r_4+r_5}=1,2 \text{ Ом}.$$

Вычисляя токи ветвей в схеме с источником J_2 и применяя формулу (5.13), получим:

$$K_{12}^{(i)}=\frac{I_1''}{J_2}=\frac{r_5}{r_4+r_5}-\frac{r_6}{r_3+r_6}=-0,2;$$

$$K_{22}^{(i)}=\frac{I_2''}{J_2}=-1; \quad K_{32}^{(i)}=-\frac{r_6}{r_3+r_6}=-0,6;$$

$$K_{42}^{(i)}=\frac{r_5}{r_4+r_5}=0,4; \quad K_{52}^{(i)}=-0,6; \quad K_{62}^{(i)}=\frac{r_3}{r_3+r_6}=0,4.$$

По принципу наложения

$$I_1=0,4\mathcal{E}_1-0,2J_2; \quad I_2=-J_2;$$

$$I_3=0,2\mathcal{E}_1-0,6J_2; \quad I_4=0,2\mathcal{E}_1+0,4J_2;$$

$$I_5=0,2\mathcal{E}_1-0,6J_2; \quad I_6=0,2\mathcal{E}_1+0,4J_2.$$

После подстановки в эти выражения заданных значений $\mathcal{E}_1$ и J_2 найдем:

$$I_1=4-0,4=3,6 \text{ А}; \quad I_2=-2 \text{ А};$$

$$I_3=I_5=2-1,2=0,8 \text{ А}; \quad I_4=I_6=2+0,8=2,8 \text{ А}.$$

Определим напряжения на зажимах источников:

$$U_1=-\mathcal{E}_1=-10 \text{ В}; \quad U_2=2,4J_2+0,2\mathcal{E}_1=6,8 \text{ В}.$$

Выражения для напряжений U_h на зажимах ветвей при $h=3 \div 6$ отличаются от выражений для токов I_h множителем r_h .

При записи соотношений (5.6), (5.15) элементы матриц $\mathcal{G}^{(v)}$, $J^{(v)}$ могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от положительных направлений токов (напряжений) ветвей и э. д. с. (токов) источников (см. гл. 4). Знак элементов матриц G , R , $K^{(i)}$, $K^{(u)}$ при положительных значениях $\mathcal{E}_h$ и J_h соответствует знаку слагаемых в равенствах (5.10), (5.19). При непосредственной записи соотношений (5.10), (5.19) (без вычисления матриц) можно все э. д. с. $\mathcal{E}_i$ и токи источников J_i считать положительными; при этом знаки g_{hl} , r_{hl} , $K_{hl}^{(i)}$, $K_{hl}^{(u)}$ определяют для выбранных положительных направлений токов и

напряжений из формул (5.11), (5.13), (5.20) и (5.21). Кроме того, можно в соотношениях (5.10), (5.19) все $\mathcal{E}_i$, J_i , а также все коэффициенты считать положительными, а знак слагаемых устанавливать при рассмотрении схемы.

Если в цепи действует только один источник, то, как следует из соотношений (5.10), (5.19), ток и напряжение любой ветви пропорциональны э. д. с. источника э. д. с. или току источника тока. Поэтому для расчета схем с одним источником возможен пропорциональный пересчет искомых величин. Сочетание принципа наложения и пропорционального пересчета позволяет упростить расчет разветвленных схем (например, последовательно-параллельных).

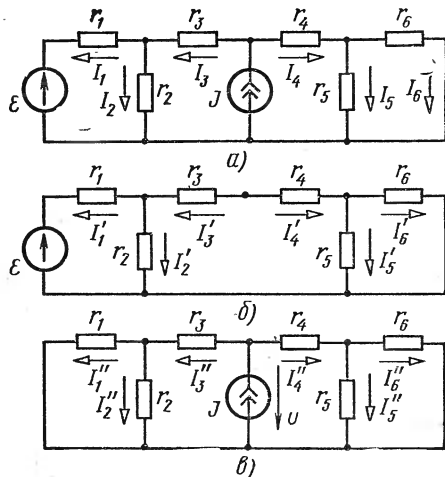


Рис. 5.2

Пример 5.3. Рассчитать токи в ветвях цепи на рис. 5.2, а. Параметры схемы: $r_1=6$ Ом; $r_2=r_4=3$ Ом; $r_3=r_5=r_6=2$ Ом; $\mathcal{E}=24$ В; $J=12$ А.

Решение. Токи в ветвях схемы определим путем алгебраического суммирования составляющих, обусловленных действием источника э. д. с. $\mathcal{E}$ и источника тока J в отдельности.

Схема с источником э. д. с. $\mathcal{E}$ показана на рис. 5.2, б. Зададимся значением тока $I'_6=1$ А. Тогда

$$I'_5 = \frac{r_6 I'_6}{r_5} = 1 \text{ А}; \quad I'_4 = I'_5 + I'_6 = 2 \text{ А};$$

$$I'_3 = -I'_4 = -2 \text{ А}; \quad U'_2 = r_6 I'_6 + (r_3 + r_4) I'_4 = 12 \text{ В}.$$

Ток

$$I'_2 = U'_2 / r_2 = 4 \text{ А},$$

поэтому

$$I'_1 = I'_3 - I'_2 = -6 \text{ А};$$

$$\mathcal{E}' = U'_2 - r_1 I'_1 = 48 \text{ В}.$$

Так как заданное значение э. д. с. $\mathcal{E}=24$ В, то значения токов в схеме на рис. 5.2, б меньше найденных в $\mathcal{E}'/\mathcal{E}=2$ раза:

$$I'_1 = -3 \text{ А}; \quad I'_2 = 2 \text{ А}; \quad I'_3 = -1 \text{ А}; \quad I'_4 = 1 \text{ А}; \quad I'_5 = 0,5 \text{ А}; \quad I'_6 = 0,5 \text{ А}.$$

Схема с источником тока J показана на рис. 5.2, в. Задаваясь током $I''_1=1$ А, аналогично предыдущему решению, получим:

$$I''_2 = \frac{r_1 I''_1}{r_2} = 2 \text{ А};$$

$$I''_3 = I''_1 + I''_2 = 3 \text{ А}.$$

Напряжение на зажимах источника

$$U = r_1 I''_1 + r_3 I''_3 = 12 \text{ В}.$$

Если задаться током $I_6'' = 1$ А, то

$$I_5'' = \frac{r_6 I_6''}{r_5} = 1 \text{ А}; \quad I_4'' = I_5'' + I_6'' = 2 \text{ А};$$

$$U = r_6 I_6'' + r_4 I_4'' = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8 \text{ В.}$$

Напряжение U из расчета правой половины схемы получилось в 1,5 раза меньше, чем из расчета левой половины, поэтому токи I_4'' , I_5'' , I_6'' следует увеличить в 1,5 раза или уменьшить в 1,5 раза токи I_1' , I_2' , I_3' .

Пусть

$$I_6'' = I_5'' = 1,5 \text{ А}; \quad I_4'' = 3 \text{ А.}$$

Тогда ток источника

$$J' = I_3'' + I_4'' = 6 \text{ А.}$$

Заданный ток J в $J/J' = 2$ раза больше тока J' . Определим значения токов в схеме на рис. 5.2, в:

$$I_1'' = 2 \text{ А}; \quad I_2'' = 4 \text{ А}; \quad I_3'' = 6 \text{ А}; \quad I_4'' = 6 \text{ А}; \quad I_5'' = I_6'' = 3 \text{ А.}$$

Теперь по принципу наложения вычислим токи в исходной схеме:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = -1 \text{ А}; \quad I_2 = I_2' + I_2'' = 8 \text{ А};$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 5 \text{ А}; \quad I_4 = I_4' + I_4'' = 7 \text{ А};$$

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 3,5 \text{ А}; \quad I_6 = I_6' + I_6'' = 3,5 \text{ А.}$$

§ 5.3. Свойство (принцип) взаимности

Пусть в схеме цепи все источники электрической энергии представлены в виде источников э. д. с. Тогда на основании соотношения (5.9) матрица токов ветвей схемы

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{G} \mathcal{E}^{(B)}.$$

Рассмотрим два режима цепи, отличающиеся только значениями э. д. с. Для первого режима матрица э. д. с.

$$\mathcal{E}_{(1)}^{(B)} = [\mathcal{E}'_1 \mathcal{E}'_2 \dots \mathcal{E}'_B]^T,$$

матрица токов

$$\mathbf{I}_{(1)}^{(B)} = \mathbf{G} \mathcal{E}_{(1)}^{(B)} = [I'_1 I'_2 \dots I'_B]^T.$$

Аналогично для второго режима:

$$\mathcal{E}_{(2)}^{(B)} = [\mathcal{E}''_1 \mathcal{E}''_2 \dots \mathcal{E}''_B]^T;$$

$$\mathbf{I}_{(2)}^{(B)} = [I''_1 I''_2 \dots I''_B]^T.$$

Произведения транспонированной матрицы э. д. с. одного режима на матрицу токов другого режима имеют вид

$$[\mathcal{E}_{(1)}^{(B)}]^T \mathbf{I}_{(2)}^{(B)} = [\mathcal{E}_{(1)}^{(B)}]^T \mathbf{G} \mathcal{E}_{(2)}^{(B)}, \quad (5.22)$$

$$[\mathcal{E}_{(2)}^{(B)}]^T \mathbf{I}_{(1)}^{(B)} = [\mathcal{E}_{(2)}^{(B)}]^T \mathbf{G} \mathcal{E}_{(1)}^{(B)}. \quad (5.23)$$

Левые части этих равенств при транспозиции не изменяются, поэтому

$$\begin{aligned} [\mathcal{E}_{(2)}^{(B)}]^T \mathbf{I}_{(1)}^{(B)} &= \{[\mathcal{E}_{(2)}^{(B)}]^T \mathbf{I}_{(1)}^{(B)}\}^T = \\ &= \{[\mathcal{E}_{(2)}^{(B)}]^T \mathbf{G} \mathcal{E}_{(1)}^{(B)}\}^T = [\mathcal{E}_{(1)}^{(B)}]^T \mathbf{G}^T \mathcal{E}_{(2)}^{(B)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ранее было показано, что матрица входных и взаимных проводимостей $\mathbf{G}$ симметрична, т. е. $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$. Учитывая симметрию этой матрицы, можно сделать вывод, что правые части выражений (5.22) и (5.24) одинаковы и, следовательно, справедливо равенство

$$[\mathcal{E}_{(1)}^{(B)}]^T \mathbf{I}_{(2)}^{(B)} = [\mathcal{E}_{(2)}^{(B)}]^T \mathbf{I}_{(1)}^{(B)} \quad (5.25)$$

или

$$\sum_{k=1}^B \mathcal{E}'_k I''_k = \sum_{k=1}^B \mathcal{E}''_k I'_k. \quad (5.26)$$

Равенства (5.25) и (5.26) в общей форме выражают свойство (принцип) взаимности для электрических цепей. Согласно этому принципу, *сумма произведений э. д. с. ветвей первого режима на токи ветвей второго равна сумме произведений э. д. с. второго режима на токи первого.*

Если в схеме цепи все источники энергии представлены в качестве источников тока, то из соотношения (5.16) следует, что

$$\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{R} \mathbf{J}^{(B)}.$$

В этом случае, аналогично предыдущему, справедливо равенство

$$[\mathbf{J}_{(1)}^{(B)}]^T \mathbf{U}_{(2)}^{(B)} = [\mathbf{J}_{(2)}^{(B)}]^T \mathbf{U}_{(1)}^{(B)} \quad (5.27)$$

или

$$\sum_{k=1}^B J'_k U''_k = \sum_{k=1}^B J''_k U'_k, \quad (5.28)$$

где

$$[\mathbf{J}_{(1)}^{(B)}] = [J'_1 J'_2 \dots J'_B]^T;$$

$$[\mathbf{J}_{(2)}^{(B)}] = [J''_1 J''_2 \dots J''_B]^T$$

— матрицы токов источников тока первого и второго режимов;

$$\mathbf{U}_{(1)}^{(B)} = \mathbf{R} \mathbf{J}_{(1)}^{(B)}; \quad \mathbf{U}_{(2)}^{(B)} = \mathbf{R} \mathbf{J}_{(2)}^{(B)}$$

— матрицы напряжений ветвей первого и второго режимов.

Доказательство равенств (5.27) и (5.28) основывается на симметрии матрицы входных и взаимных сопротивлений $\mathbf{R}$. Эти равенства также выражают свойство взаимности электрических цепей.

Из общих определений взаимности (5.26) и (5.28) получаются выражения для частных случаев.

Пусть первый режим цепи соответствует схеме на рис. 5.3, а. В этом режиме в цепи имеется только один источник э. д. с. $\mathcal{E}'_l$ в ветви l , который создает ток I'_m в ветви m . Часть схемы, кроме ветвей l и m , условно показана в виде прямоугольника

(буквой Π обозначена пассивная часть схемы). Второй режим цепи соответствует схеме на рис. 5.3, б. В этом режиме имеется только один источник э. д. с. $\mathcal{E}_m''$ в ветви m , который создает ток I_l'' в ветви l .

Поскольку все элементы матриц $\mathcal{E}_{(1)}^{(B)}$ и $\mathcal{E}_{(2)}^{(B)}$, кроме соответственно элементов $\mathcal{E}_l'$ и $\mathcal{E}_m''$, равны нулю, то из равенства (5.26) следует, что

$$\mathcal{E}_l' I_l'' = \mathcal{E}_m'' I_m'. \quad (5.29)$$

Если $\mathcal{E}_l' = \mathcal{E}_m''$, то $I_m' = I_l''$, т. е. если э. д. с. $\mathcal{E}_l'$, действующая в ветви l , создает ток I_m' в ветви m , то равная ей э. д. с. $\mathcal{E}_m''$, действующая в ветви m , создает ток $I_l'' = I_m'$. При этом направление э. д. с. и токов согласовано в соответствии с рис. 5.3.

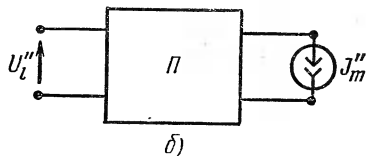
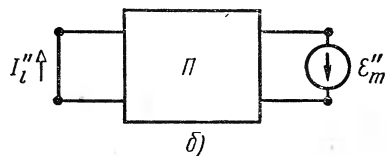
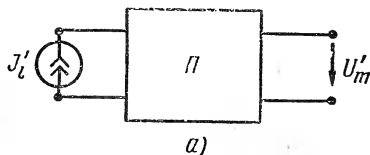
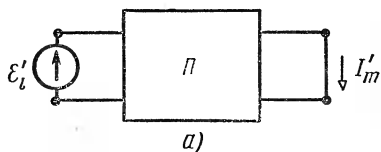


Рис. 5.3

Рис. 5.4

При рассмотрении режимов схем на рис. 5.4, а, б, содержащих по одному источнику тока, на основании соотношения (5.28) устанавливается равенство

$$J_l' U_l'' = J_m'' U_m'. \quad (5.30)$$

При $J_l' = J_m''$ получаем $U_m' = U_l''$.

Равенства (5.25) ÷ (5.28), служащие общими определениями взаимности, вытекают, как уже отмечалось, из условия симметрии матриц входных и взаимных проводимостей и сопротивлений $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$. Симметрия этих матриц, в свою очередь, установлена из условия симметрии матриц узловых проводимостей $\mathbf{G}^{(y)}$ и контурных сопротивлений $\mathbf{R}^{(k)}$ (см. § 5.2). Таким образом, симметрию матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}^{(y)}$ и $\mathbf{R}^{(k)}$ можно рассматривать как определяющий признак цепей, удовлетворяющих свойству взаимности (взаимных цепей).

§ 5.4. Теорема о компенсации, линейные соотношения между напряжениями и токами

Любое сопротивление схемы r_h с током I_h можно заменить источником э. д. с. $\mathcal{E}_h = r_h I_h$, направление которой противоположно направлению тока (или источником э. д. с. $\mathcal{E}_h = -r_h I_h$,

направление которой совпадает с направлением тока). При этом токи и напряжения всех ветвей схемы не изменяются.

Действительно, если в схеме на рис. 5.5, а вместо сопротивления r_h включить источник э. д. с. $\mathcal{E}_h$, положительное направление которой противоположно положительному направлению тока (рис. 5.5, б) *, то топология исходной схемы не изменится. Поэтому уравнения для токов по первому закону Кирхгофа схем (на рис. 5.5, а, б) одинаковы. Уравнения по второму закону Кирхгофа также одинаковы, так как слагаемым $\pm r_h I_h$ в левой части уравнений одной схемы соответствуют слагаемые $\mp \mathcal{E}_h = \mp r_h I_h$ в правой части уравнений другой схемы. Следовательно, токи и напряжения ветвей схемы при замене сопротивления с напряжением $r_h I_h$ соответствующей э. д. с. не изменяются. В общем случае любую ветвь с напряжением U_h на ее зажимах можно заменить источником э. д. с. $\mathcal{E}_h = U_h$.

Кроме того, любую ветвь с током I_h можно заменить источником тока $J_h = I_h$, направление которого совпадает с направлением тока ветви (источником тока $J_h = -I_h$, направление которого противоположно направлению тока ветви) без изменения токов и напряжений всех ветвей схемы.

Сформулированные положения о возможности замены ветвей источниками э. д. с. и тока определяют теорему о компенсации.

Пусть в цепи, содержащей источники напряжения и тока, изменяется э. д. с. одного из источников, а э. д. с. и токи других источников остаются постоянными. В этом случае из соотношений (5.10) и (5.19) следует, что ток и напряжение любой ветви являются линейными функциями изменяемой э. д. с., поскольку входные и взаимные проводимости и сопротивления, коэффициенты передачи тока и напряжения неизменны:

$$I_h = I_{h0} + g_{hj} \mathcal{E}_j; \quad (5.31)$$

$$U_h = U_{h0} + K_{hj}^{(u)} \mathcal{E}_j, \quad (5.32)$$

где I_h , U_h — ток и напряжение h -й ветви ($h = 1, 2, \dots, e$); $\mathcal{E}_j$ — изменяемая э. д. с.; I_{h0} и U_{h0} — постоянные слагаемые в равен-

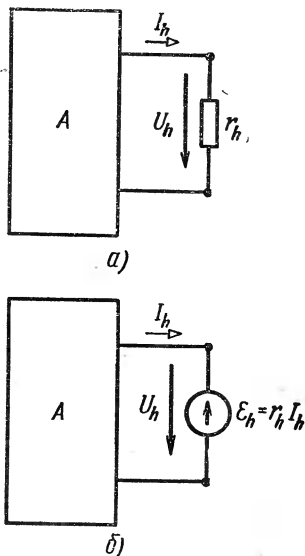


Рис. 5.5

* На рис. 5.5, а, б прямоугольником с буквой А обозначена активная часть схемы с источниками.

ствах (5.10) и (5.19):

$$I_{h0} = \sum_{l \neq j} g_{hl} \mathcal{E}_l + \sum_l K_{hl}^{(i)} J_l;$$

$$U_{h0} = \sum_l r_{hl} J_l + \sum_{l \neq j} K_{hl}^{(u)} \mathcal{E}_l.$$

Соотношения, аналогичные (5.31) и (5.32), можно записать и для случая, когда изменяется ток одного источника тока, а э. д. с. и токи других источников остаются постоянными:

$$I_h = I'_{h0} + K_{hj}^{(i)} J_j, \quad (5.33)$$

$$U_h = U'_{h0} + r_{hj} J_j, \quad (5.34)$$

где

$$I'_{h0} = \sum_l g_{hl} \mathcal{E}_l + \sum_{l \neq j} K_{hl}^{(i)} J_l;$$

$$U'_{h0} = \sum_{l \neq j} r_{hl} J_l + \sum_l K_{hl}^{(u)} \mathcal{E}_l.$$

Если в цепи изменяется сопротивление r_j одной ветви, то его, согласно принципу компенсации, можно заменить источником э. д. с., величина которой равна напряжению U_{r_j} на сопротивлении r_j .

Тогда вместо соотношений (5.31) и (5.32) получается

$$I_h = I_{h0} + g_{hj} U_{r_j}; \quad (5.35)$$

$$U_h = U_{h0} + K_{hj}^{(u)} U_{r_j}, \quad (5.36)$$

где

$$I_{h0} = \sum_l g_{hl} \mathcal{E}_l + \sum_l K_{hl}^{(i)} J_l;$$

$$U_{h0} = \sum_l r_{hl} J_l + \sum_l K_{hl}^{(u)} \mathcal{E}_l.$$

В соотношениях (5.35) и (5.36) в отличие от (5.31), (5.32) все входные и взаимные проводимости и сопротивления, коэффициенты передачи напряжения и тока определяются при $r_j = 0$.

Переменное сопротивление r_j с током I_{r_j} также можно заменить источником тока, величина которого равна этому току. Поэтому справедливы соотношения

$$I_h = I'_{h0} + K_{hj}^{(i)} I_{r_j}; \quad (5.37)$$

$$U_h = U'_{h0} + r_{hj} I_{r_j}, \quad (5.38)$$

где

$$I'_{h0} = \sum_l g_{hl} \mathcal{E}_l + \sum_l K_{hl}^{(i)} J_l;$$

$$U'_{h0} = \sum_l r_{hl} J_l + \sum_l K_{hl}^{(u)} \mathcal{E}_l.$$

В соотношениях (5.37), (5.38) в отличие от (5.33), (5.34) все входные и взаимные проводимости и сопротивления, коэффициенты передачи напряжения и тока определяются при $r_i = \infty$ ($g_i = 0$).

Из изложенного следует, что при изменении какого-либо параметра одной из ветвей (э. д. с., тока источника или сопротивления) напряжения или токи любых ветвей, напряжения на зажимах сопротивлений или токи в сопротивлениях связаны линейными соотношениями вида

$$y = a + bx, \quad (5.39)$$

где x , y — изменяющиеся токи или напряжения, a , b — постоянные коэффициенты.

Постоянные a , b определяют расчетным или опытным путем, если известны переменные x , y для двух режимов. Часто постоянные a и b находят из условий $x = 0$, $y = 0$, что соответствует разрыву или замыканию ветвей (сопротивлений).

Аналогично предыдущему можно показать, что при одновременном изменении двух параметров в схеме (например, двух сопротивлений) напряжения и токи любых ветвей связаны между собой линейными соотношениями вида

$$z = a + bx + cy, \quad (5.40)$$

где x , y , z — изменяющиеся напряжения или токи; a , b , c — постоянные, определяемые расчетным или опытным путем.

Пример 5.4. В схеме на рис. 5.6, a сопротивление r_4 изменяется от нуля до бесконечности. Найти зависимости $I_1(U_4)$, $U_3(U_4)$, $I_1(I_4)$, $U_2(I_4)$. Параметры схемы: $r_1 = r_3 = 4$ Ом; $r_2 = 2$ Ом; $\mathcal{E}_1 = 100$ В; $J_2 = 50$ А.

Решение. В соответствии с равенством (5.39) искомые зависимости имеют вид:

$$I_1 = a_1 + b_1 U_4;$$

$$U_2 = a_2 + b_2 U_4;$$

$$I_1 = a_3 + b_3 I_4;$$

$$U_2 = a_4 + b_4 I_4.$$

Рассмотрим два режима схемы, соответствующие короткозамкнутой и разомкнутой ветвям с сопротивлением r_4 .

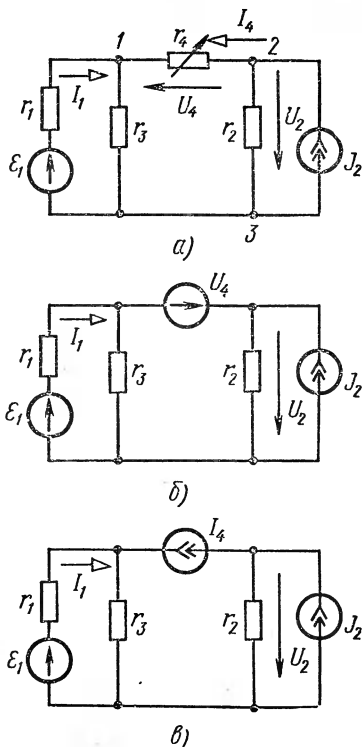


Рис. 5.6

При коротком замыкании сопротивления r_4 напряжение $U_4=0$, следовательно, $I_{1к}=a_1$; $U_{2к}=a_2$.

Если в схеме ветвь r_4 замкнута, то потенциалы узлов 1 и 2 $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_{1,2}$. Полагая $\varphi_3=0$, запишем уравнение

$$\varphi_{1,2} (1/r_1 + 1/r_3 + 1/r_2) = \mathcal{E}_1/r_1 + J_2,$$

откуда

$$\varphi_{1,2} = \frac{(100/4) + 50}{(1/4 + 1/4 + 1/2)} = 75 \text{ В.}$$

Напряжение $U_{2к}=\varphi_{1,2}=75 \text{ В}$. Токи

$$I_{1к} = (\mathcal{E}_1 - \varphi_{1,2}) \frac{1}{r_1} = 6,25 \text{ А,}$$

$$I_{4к} = J_2 - \frac{U_2}{r_2} = 12,5 \text{ А.}$$

Таким образом,

$$a_1 = I_{1к} = 6,25 \text{ А; } a_2 = U_{2к} = 75 \text{ В.}$$

При размыкании сопротивления r_4 ток $I_4=0$, следовательно, $I_{1р}=a_3$; $U_{2р}=a_4$.

Из исходной схемы находим:

$$I_{1р} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + r_3} = 12,5 \text{ А; } U_{2р} = r_2 J_2 = 100 \text{ В;}$$

$$U_{4р} = U_{2р} - r_3 J_2 = 50 \text{ В.}$$

Постоянные: $a_3 = I_{1р} = 12,5 \text{ А; } a_4 = U_{2р} = 100 \text{ В}$.

Для определения постоянных b_1 , b_2 , b_3 и b_4 составим уравнения:

$$I_{1р} = a_1 + b_1 U_{4р}; \quad U_{2р} = a_2 + b_2 U_{4р};$$

$$I_{1к} = a_3 + b_3 I_{4к}; \quad U_{2к} = a_4 + b_4 I_{4к},$$

или

$$12,5 = 6,25 + b_1 50; \quad 100 = 75 + b_2 50;$$

$$6,25 = 12,5 + b_3 12,5; \quad 75 = 100 + b_4 12,5,$$

откуда $b_1=0,125 \text{ См; } b_2=0,5; b_3=-0,5; b_4=-2 \text{ Ом}$.

Окончательно получим:

$$I_1 = 6,25 + 0,125 U_4;$$

$$U_2 = 75 + 0,5 U_4;$$

$$I_1 = 12,5 - 0,5 I_4;$$

$$U_2 = 100 - 2 I_4.$$

Убедимся, что применение выражений (5.35) ÷ (5.38) приводит к тем же результатам.

Чтобы установить зависимости $I_1(U_4)$ и $U_2(U_4)$, сопротивление r_4 заменим источником э. д. с. (рис. 5.6, б). По принципу наложения запишем равенства для тока I_1 и напряжения U_2 в этой схеме:

$$I_1 = g_{11} \mathcal{E}_1 + K_{12}^{(i)} J_2 + g_{14} U_4;$$

$$U_2 = K_{12}^{(u)} \mathcal{E}_1 + r_{22} J_2 + K_{24}^{(u)} U_4.$$

Анализируя полученную схему, найдем:

$$g_{11} = 0,1875 \text{ См; } K_{12}^{(i)} = -0,25; g_{14} = 0,125 \text{ См,}$$

$$K_{21}^{(u)} = 0,25; r_{22} = 1 \text{ Ом; } K_{24}^{(u)} = 0,5.$$

Подставляя числовые значения, определим:

$$I_1 = 0,1875 \cdot 100 - 0,25 \cdot 50 + 0,125 U_4 = 6,25 + 0,125 U_4;$$

$$U_2 = 0,25 \cdot 100 + 1 \cdot 50 + 0,5 U_4 = 75 + 0,5 U_4.$$

Чтобы установить зависимости $I_1(I_4)$ и $U_2(I_4)$, сопротивление r_4 заменим источником тока (рис. 5.6, в). По принципу наложения для этой схемы

$$I_1 = g'_{11} \mathcal{E}_1 + K'_{12} J_2 + K'_{14} I_4;$$

$$U_2 = K'_{21} \mathcal{E}_1 + r'_{22} J_2 + r'_{24} I_4.$$

Анализируя схему на рис. 5.6, в, вычислим:

$$g'_{11} = 0,125 \text{ См}; K'_{12} = 0; K'_{14} = -0,5;$$

$$K'_{21} = 0; r'_{22} = 2 \text{ Ом}; r'_{24} = -2 \text{ Ом}.$$

Таким образом,

$$I_1 = 0,125 \cdot 100 - 0,5 I_4 = 12,5 - 0,5 I_4,$$

$$U_2 = 2 \cdot 50 - 2 I_4 = 100 - 2 I_4.$$

Соотношения, полученные на основании выражений (5.35) ÷ (5.38), совпадают с найденными ранее.

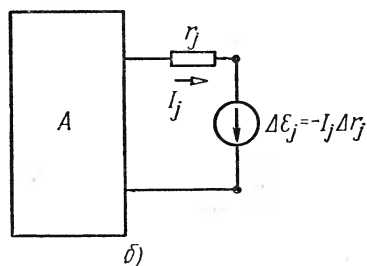
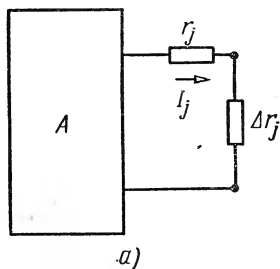


Рис. 5.7

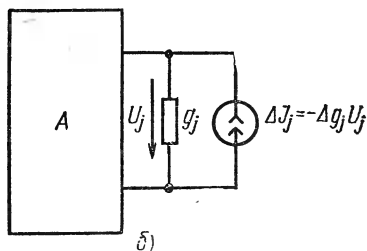
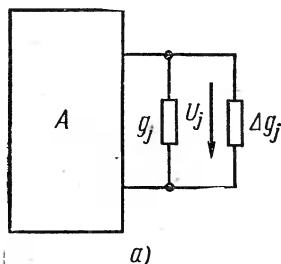


Рис. 5.8

С помощью линейных соотношений можно установить связь между приращением сопротивления Δr_j (проводимости Δg_j) в одной из ветвей и приращениями токов ΔI_k (напряжений ΔU_k) в других ветвях.

Пусть сопротивление r_j ветви j возросло на величину Δr_j (рис. 5.7, а). Приращение Δr_j , как следует из теоремы о компенсации, можно заменить источником э. д. с. $\Delta \mathcal{E}_j = -\Delta r_j I_j$, направление которой совпадает с направлением тока I_j (рис. 5.7, б).

Для токов I_j и I_h справедливы линейные соотношения, аналогичные (5.31):

$$I_j = I_{j0} + g_{jj}\Delta\mathcal{E}_j; \quad (5.41)$$

$$I_h = I_{h0} + g_{hj}\Delta\mathcal{E}_j, \quad (5.42)$$

где I_{j0} , I_{h0} — токи ветвей j и h при $\Delta r_j = 0$; g_{jj} , g_{hj} — входная и взаимная проводимости при $\Delta r_j = 0$. Из соотношений (5.41) и (5.42) с учетом равенства $\Delta\mathcal{E}_j = -\Delta r_j I_j$ получаем формулы для приращений токов:

$$\Delta I_j = I_j - I_{j0} = -\frac{\Delta r_j g_{jj}}{1 + \Delta r_j g_{jj}} I_{j0}; \quad (5.43)$$

$$\Delta I_h = I_h - I_{h0} = -\frac{\Delta r_j g_{hj}}{1 + \Delta r_j g_{jj}} I_{j0}. \quad (5.44)$$

Если проводимость g_j ветви j изменяется на величину Δg_j (рис. 5.8, а), то это приращение можно заменить источником тока $\Delta J_j = -\Delta g_j U_j$, направление которого противоположно направлению напряжения U_j (рис. 5.8, б). Напряжения ветвей U_j и U_h выражаются линейными соотношениями, аналогичными (5.34):

$$U_j = U_{j0} + r_{jj}\Delta J_j; \quad (5.45)$$

$$U_h = U_{h0} + r_{hj}\Delta J_j, \quad (5.46)$$

где U_{j0} , U_{h0} — напряжения ветвей j и h при $\Delta g_j = 0$; r_{jj} , r_{hj} — входное и взаимное сопротивления при $\Delta g_j = 0$. Формулы для приращений напряжений дуальны формулам (5.43) и (5.44):

$$\Delta U_j = U_j - U_{j0} = -\frac{\Delta g_j r_{jj}}{1 + \Delta g_j r_{jj}} U_{j0}; \quad (5.47)$$

$$\Delta U_h = U_h - U_{h0} = -\frac{\Delta g_j r_{hj}}{1 + \Delta g_j r_{jj}} U_{j0}. \quad (5.48)$$

Пример 5.5. В схеме цепи на рис. 5.6, а определить ток I_1 и напряжение U_2 при $r_4 = 6$ Ом.

Решение. В примере 5.4 вычислены значения токов I_1 , I_4 при $r_4 = 0$ ($I_{1к} = 6,25$ А; $I_{4к} = 12,5$ А). Приращение тока ΔI_1 найдем по формуле (5.44), полагая $\Delta r_4 = 6$ Ом; $I_{40} = I_{4к} = 12,5$ А. Анализируя схему на рис. 5.9, а, считаем проводимости g_{44} и g_{14} :

$g_{44} = 0,25$ См, $g_{14} = -0,125$ См. Приращение тока

$$\Delta I_1 = -\frac{6(-0,125)}{1 + 6 \cdot 0,25} \cdot 12,5 = 3,75 \text{ А.}$$

Следовательно, ток

$$I_1 = I_{10} + \Delta I_1 = I_{1к} + \Delta I_1 = 10 \text{ А.}$$

В примере 5.5 вычислены напряжения U_2 , U_4 при $r = \infty$ ($g_4 = 0$): $U_{2р} = 100$ В; $U_{4р} = 50$ В. Чтобы рассчитать приращение напряжения ΔU_2 , найдем сопротивления r_{44} , r_{24} из схемы на рис. 5.9, б:

$$r_{44} = 4 \text{ Ом; } r_{24} = 2 \text{ Ом.}$$

Подставляя в формулу (5.48) найденные значения сопротивлений, а также $\Delta g_1 = 1/6$ См, $U_{4p} = 50$ В, получим

$$\Delta U_2 = \frac{-\frac{1}{6} \cdot 2}{1 + \frac{1}{6} \cdot 4} \cdot 50 = -10 \text{ В.}$$

Следовательно, напряжение

$$U_2 = U_{20} + \Delta U_2 = U_{2p} + \Delta U_2 = 90 \text{ В.}$$

§ 5.5. Теорема об эквивалентном источнике (активном двухполюснике)

Пусть в схеме электрической цепи, имеющей источники э. д. с. и тока, выделена j -я ветвь, содержащая только сопротивление r_j с током I_j . Если сопротивление r_j заменить согласно теореме о компенсации источником тока $J_j = -I_j$, направление которого противоположно направлению тока I_j , то для напряжения U_j на зажимах ветви можно записать соотношение, аналогичное соотношению (5.34):

$$U_j = U_{j0} + r_{jj} J_j,$$

где слагаемое U_{j0} объединяет составляющие напряжения U_j , обусловленные всеми источниками, кроме J_j :

$$U_{j0} = \sum_{i \neq j} r_{ji} I_i + \sum_i K_{ji}^{(u)} \mathcal{E}_i;$$

r_{jj} — входное сопротивление относительно зажимов источника J_j , т. е. относительно зажимов выделенной ветви ($r_{jj} = r_{j\text{вх}}$). Это сопротивление (см. § 5.2) определяется при условии, что в схеме исключены все источники, кроме J_j .

Напряжение U_{j0} представляет собой напряжение U_j при $J_j = 0$, т. е. напряжение U_{jp} на зажимах разомкнутой j -й ветви. Учитывая $J_j = -I_j$ и опуская индекс j у напряжения, тока и сопротивления, выражение для напряжения на зажимах выделенной ветви записывают следующим образом:

$$U = U_p - r_{\text{вх}} I. \quad (5.49)$$

На рис. 5.10 показана схема, в которой выделена ветвь с сопротивлением r (активный двухполюсник, к зажимам которого присоединено сопротивление r). Напряжение U на зажимах сопротивления и ток I в сопротивлении связаны соотношением (5.49). Так как для напряжения U справедливо также равенство $U = rI$, то из (5.49) находим

$$I = \frac{U_p}{r_{\text{вх}} + r}. \quad (5.50)$$

Выражению (5.50) соответствует эквивалентная схема на рис. 5.11. В этой схеме э. д. с. равна напряжению U_p на зажимах разомкнутой ветви с сопротивлением r .

Если ветвь с сопротивлением r короткозамкнута, то напряжение $U=0$ и сопротивление

$$r_{\text{вх}} = U_p / I_{\text{к}}, \quad (5.51)$$

где $I_{\text{к}}$ — ток в короткозамкнутой выделенной ветви. Считая $r_{\text{вх}}$ внутренним сопротивлением источника напряжения U_p (рис. 5.11) и заменяя источник напряжения эквивалентным источником тока,

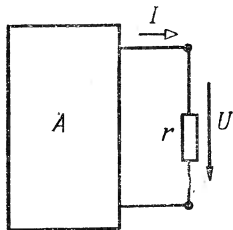


Рис. 5.10

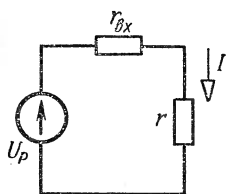


Рис. 5.11

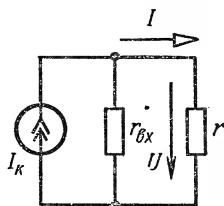


Рис. 5.12

получаем схему на рис. 5.12, в которой ток источника тока равен $I_{\text{к}}$. Для найденной схемы справедливы соотношения

$$U = I_{\text{к}} / (g_{\text{вх}} + g), \quad (5.52)$$

где

$$g_{\text{вх}} = 1/r_{\text{вх}}, \quad g = 1/r; \\ I = I_{\text{к}} - g_{\text{вх}} U. \quad (5.53)$$

Формулы (5.50) и (5.52) определяют теорему об эквивалентном источнике или об активном двухполюснике: если активную схему, к которой присоединена некоторая пассивная ветвь, заменить источником э. д. с. с э. д. с., равной напряжению на зажимах разомкнутой ветви (источником тока, величина которого равна току короткозамкнутой ветви), и сопротивлением, равным входному сопротивлению активной цепи (проводимостью, равной входной проводимости активной цепи), то ток в этой ветви (напряжение на ее зажимах) не изменится.

Эквивалентную схему с источником э. д. с. (рис. 5.11) называют схемой Тевенена, а эквивалентную схему с источником тока (рис. 5.12) — схемой Нортон.

В общем случае выделенная ветвь может содержать источник э. д. с. $\mathcal{E}$ (источник тока J). Если ветвь содержит источник э. д. с. с э. д. с. $\mathcal{E}$, то вместо выражения (5.50) записывают

$$I = \frac{U_p \pm \mathcal{E}}{r_{\text{вх}} + r}, \quad (5.54)$$

где знак плюс (минус) в числителе соответствует случаю, когда направление э. д. с. совпадает (противоположно) с направлением тока I . Если ветвь содержит источник тока J , то

$$I = \frac{I_{\text{к}} \pm J}{g_{\text{вх}} + g}. \quad (5.55)$$

Согласно теореме об активном двухполюснике, действительный режим выделенной ветви может быть представлен как результат наложения двух режимов: первого режима, при котором выделенная ветвь разомкнута, ток $I=0$, напряжение на зажимах ветви от действия всех источников активного двухполюсника равно U_p (выделенная ветвь короткозамкнута, напряжение $U=0$, ток $I=I_k$), и второго режима, при котором в схеме действует только один источник э. д. с. U_p (источник тока I_k). Ток I (напряжение U) выделенной ветви равен току (напряжению) этой ветви во втором режиме.

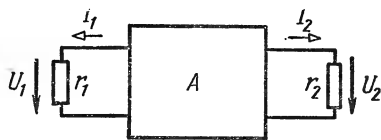


Рис. 5.13

Если в схеме с источниками выделить несколько ветвей (например, две, как показано на рис. 5.13), то действительный режим этих ветвей может быть аналогично представлен как результат наложения двух режимов: первого режима, при котором выделенные ветви одновременно разомкнуты (короткозамкнуты), и второго режима, при котором в схеме действуют источники напряжения с э. д. с., равными соответственно напряжениям на зажимах разомкнутых выделенных ветвей (источники тока, равные соответственно токам короткозамкнутых выделенных ветвей), а остальные источники исключены. Токи (напряжения) выделен-

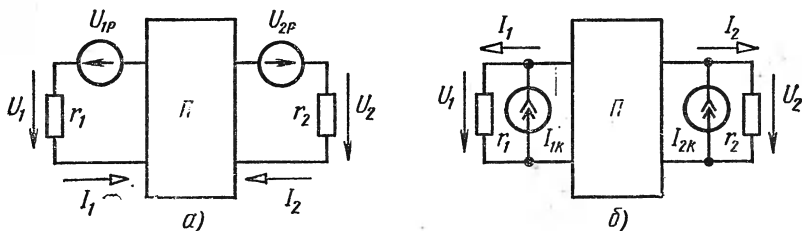


Рис. 5.14

ных ветвей определяют при расчете только второго режима. Например, токи и напряжения двух ветвей схемы на рис. 5.13 получаются в результате расчета схемы на рис. 5.14, а с двумя источниками э. д. с. или схемы на рис. 5.14, б с двумя источниками тока. При этом все источники исходной активной схемы исключаются.

Для нескольких выделенных ветвей схемы вместо выражений (5.49) и (5.53) можно записать матричные соотношения

$$U = U_p - RI; \quad (5.56)$$

$$I = I_k - GU, \quad (5.57)$$

где $U(I)$ — матрица напряжений (токов) выделенных ветвей; $U_p(I_k)$ — матрица напряжений на зажимах разомкнутых выделен-

ных ветвей (токов короткозамкнутых выделенных ветвей); $R(G)$ — матрица входных и взаимных сопротивлений (входных и взаимных проводимостей) выделенных ветвей.

Таким образом, теорема об эквивалентном источнике может быть обобщена для расчета токов и напряжений нескольких ветвей сложной схемы.

Пример 5.6. В цепи на рис. 5.6, а определить ток I_4 при $r_4 = 6$ Ом с помощью теоремы об эквивалентном источнике.

Решение. Если ветвь с сопротивлением r_4 разомкнуть, то напряжение $U_{4p} = 50$ В (см. пример 5.4). Входное сопротивление относительно зажимов ветви с сопротивлением

$$r_{вх} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + r_2 = 4 \text{ Ом}$$

(в примере 5.5 $r_{вх} = r_{44}$). Следовательно, ток

$$I_4 = U_{4p} / (r_{вх} + r_4) = 5 \text{ А.}$$

Пример 5.7. Определить ток I в сопротивлении r схемы на рис. 5.15, а с помощью теоремы об эквивалентном источнике. Параметры схемы: $r_1 = r_2 = 6$ Ом; $r_3 = r_4 = 3$ Ом; $r = 10$ Ом; $\mathcal{E} = 18$ В; $J = 10$ А.

Решение. При размыкании ветви с сопротивлением r получается схема, приведенная на рис. 5.15, б.

Рис. 5.15

По принципу наложения напряжения

$$U_p = \mathcal{E} \left(\frac{r_4}{r_1 + r_4} - \frac{r_2}{r_2 + r_3} \right) + J \left(\frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4} + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} \right) = 14 \text{ В.}$$

Входное сопротивление относительно зажимов ветви с сопротивлением r (рис. 5.15, в)

$$r_{вх} = \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4} + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} = 4 \text{ Ом.}$$

Искомый ток

$$I = U_p / (r_{вх} + r) = 1 \text{ А.}$$

§ 5.6. Простейшие эквивалентные преобразования схем

Анализ сложных электрических цепей можно упростить и сделать более наглядным путем различных преобразований схем. Целесообразное преобразование схемы приводит к уменьшению числа ее узлов, контуров и ветвей и, следовательно, числа уравнений, характеризующих электрическое состояние схемы.

Преобразования называют эквивалентными, если выполняется условие неизменности токов и напряжений ветвей в тех частях схемы, которые не затронуты преобразованиями.

Возможность элементарных эквивалентных преобразований была показана ранее. Так, в гл. 1 рассмотрено преобразование источника э. д. с. с внутренним сопротивлением в эквивалентный источник тока и наоборот; в гл. 4 производилась замена ветви, состоящей из ряда последовательно соединенных источников э. д. с. и сопротивлений, эквивалентной ветвью, содержащей один источник э. д. с., величина которой равна алгебраической сумме э. д. с. всех источников ветви, и одно сопротивление, равное сумме сопротивлений всех ветвей. Дуальное преобразование возможно по отношению к параллельному соединению проводимостей и источников тока.

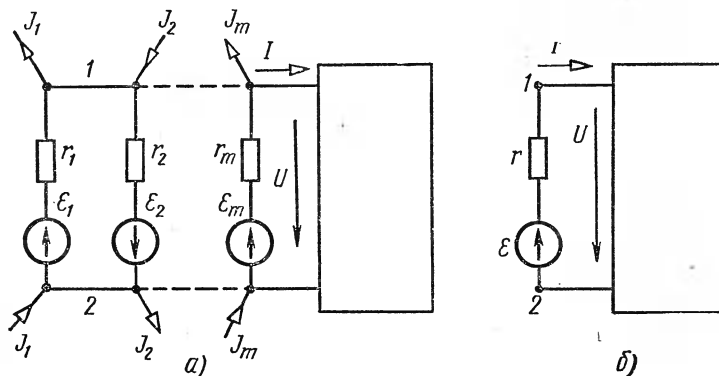


Рис. 5.16

На рис. 5.16, а показана схема, содержащая m параллельно соединенных ветвей с источниками э. д. с., источниками токов и сопротивлениями. Для этой схемы справедливо узловое уравнение

$$U \sum_{k=1}^m g_k = \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k g_k + \sum_{k=1}^m J_k - I,$$

где $g_k = 1/r_k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Из этого уравнения получаем соотношение

$$U = \mathcal{E} - rI,$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k g_k + \sum_{k=1}^m J_k}{\sum_{k=1}^m g_k}; \quad r = \frac{1}{\sum_{k=1}^m g_k},$$

которому соответствует эквивалентная схема на рис. 5.16, б.

Таким образом, ряд параллельных ветвей с источниками э. д. с. и сопротивлениями можно заменить эквивалентной ветвью с э. д. с. и сопротивлением r . При этом ток I и напряжение U в схемах

на рис. 5.16, а, б соответственно одинаковы. При определении эквивалентной э. д. с. $\mathcal{E}$ слагаемые $\mathcal{E}_k g_k$ и J_k суммируются: с положительным (отрицательным) знаком записывают э. д. с. и токи источников, направленные к узлу 1 (от узла 1). В числителе выражения для $\mathcal{E}$ некоторые слагаемые, соответствующие ветвям, не содержащим источников э. д. с. или тока, отсутствуют; в знаменателе выражений для $\mathcal{E}$ и r записывают сумму проводимостей всех ветвей.

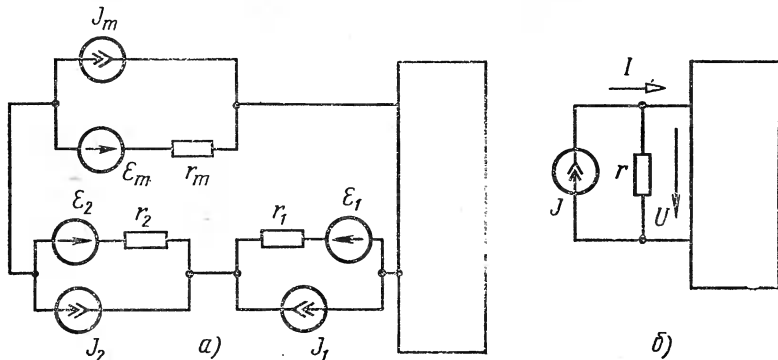


Рис. 5.17

Аналогично последовательное соединение ветвей, содержащих источники тока, э. д. с. и сопротивления (рис. 5.17, а), заменяют одной ветвью с источником J и сопротивлением r (рис. 5.17, б), причем

$$J = \frac{\sum_{k=1}^m J_k r_k + \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k}{\sum_{k=1}^m r_k}, \quad r = \sum_{k=1}^m r_k.$$

Если схема представляет собой смешанное (последовательно-параллельное) соединение ветвей, содержащих источники, то для ее расчета применяют рассмотренные простейшие преобразования.

Пример 5.8. Рассчитать токи в ветвях схемы (рис. 5.18, а). Параметры схемы: $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_6 = 20$ В; $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_5 = 10$ В; $\mathcal{E}_4 = 15$ В; $J_3 = 10$ А; $r_1 = 10$ Ом; $r_2 = 5$ Ом; $r_3 = 1$ Ом; $r_4 = 2$ Ом; $r_5 = r_6 = 4$ Ом.

Решение. Заменяем две параллельные ветви с э. д. с. $\mathcal{E}_5$ и $\mathcal{E}_6$ одной с эквивалентной э. д. с.

$$\mathcal{E}_{\text{экв1}} = \frac{(-\mathcal{E}_5/r_5) + (\mathcal{E}_6/r_6)}{(1/r_5) + (1/r_6)} = 5 \text{ В}$$

и эквивалентным сопротивлением

$$r_{\text{экв1}} = \frac{1}{(1/r_5) + (1/r_6)} = 2 \text{ Ом.}$$

Далее три последовательные ветви (с источниками J_3 , $\mathcal{E}_4$ и $\mathcal{E}_{\text{экв1}}$) заменяем одной с э. д. с.

$$\mathcal{E}_{\text{экв}} = J_3 r_3 - \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_{\text{экв1}} = 0$$

и сопротивлением $r_{\text{экв}} = r_3 + r_4 + r_{\text{экв}1} = 5 \text{ Ом}$. В результате получим схему на рис. 5.18, б. Если $\varphi_3 = 0$, то

$$\varphi_1 = \frac{(\mathcal{E}_1/r_1) + (\mathcal{E}_2/r_2)}{(1/r_1) + (1/r_2) + (1/r_{\text{экв}})} = 8 \text{ В.}$$

Токи:

$$I_1 = (\mathcal{E}_1 - \varphi_1) \frac{1}{r_1} = 1,2 \text{ А}; \quad I_2 = (\mathcal{E}_2 - \varphi_1) \frac{1}{r_2} = 0,4 \text{ А};$$

$$I_4 = \varphi_1 \frac{1}{r_{\text{экв}}} = 1,6 \text{ А}; \quad I_3 = I_4 + I_2 = 2,0 \text{ А}.$$

Потенциал

$$\varphi_2 = \varphi_1 - r_3 I_3 - r_2 I_4 + \mathcal{E}_4 = 8,2 \text{ В};$$

токи:

$$I_5 = (\varphi_2 + \mathcal{E}_5) \frac{1}{r_5} = 4,55 \text{ А}; \quad I_6 = (\mathcal{E}_6 - \varphi_2) \frac{1}{r_6} = 2,95 \text{ А}.$$

Любую схему, содержащую источники э. д. с. и тока, можно преобразовать в схему, имеющую только источники тока или

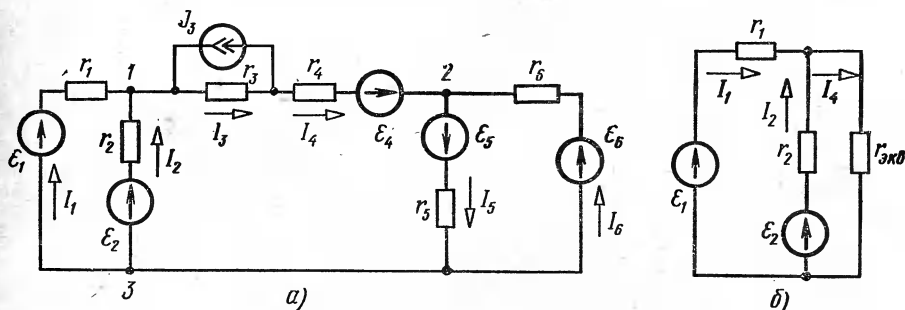


Рис. 5.18

только источники э. д. с. Для этого каждый источник э. д. с. (тока) заменяют источником тока (э. д. с.). Если схема содержит ветви с источниками э. д. с. без последовательного сопротивления или с источниками тока без параллельного сопротивления, то предварительно применяют преобразование источников (см. гл. 4). В таких случаях для одной заданной схемы можно получить несколько эквивалентных схем.

Следует подчеркнуть, что при преобразовании схем с источниками энергии суммарные мощности источников и приемников в исходных схемах не равны в общем случае соответствующим мощностям в эквивалентных схемах.

§ 5.7. Преобразования схем при исключении узлов

Если решать систему узловых уравнений для схемы, имеющей число узлов $y > 2$, путем исключения неизвестных, то на каждом этапе решения исключение одной переменной (потенциала узла) будет соответствовать исключению одного узла схемы. Системе

уравнений с меньшим числом неизвестных можно поставить в соответствие схеме с меньшим числом узлов.

Пусть матричное узловое уравнение (4.18) записано в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{(y)} \\ \mathbf{J}_2^{(y)} \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

где $\mathbf{G}_{11}$ ($\mathbf{G}_{22}$) — квадратная неособенная подматрица. Выражение (5.58) соответствует разбиению матрицы коэффициентов уравнения на блоки.

Если $\mathbf{G}_{11}$ — квадратная неособенная подматрица, то из равенства (5.58) получаем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_1 &= -\mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{12} \boldsymbol{\varphi}_2 + \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{J}_1^{(y)}, \\ \mathbf{G}_{21} \boldsymbol{\varphi}_1 + \mathbf{G}_{22} \boldsymbol{\varphi}_2 &= \mathbf{J}_2^{(y)}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

откуда

$$\bar{\mathbf{G}}^{(y)} \boldsymbol{\varphi}_2 = \bar{\mathbf{J}}^{(y)},$$

где

$$\bar{\mathbf{G}}^{(y)} = \mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{12}; \quad (5.60)$$

$$\bar{\mathbf{J}}^{(y)} = -\mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{J}_1^{(y)} + \mathbf{J}_2^{(y)}. \quad (5.61)$$

Уравнение (5.59) можно считать матричным узловым уравнением схемы, полученной путем исключения узлов, потенциалы которых образуют матрицу $\boldsymbol{\varphi}_1$.

Если $\mathbf{G}_{22}$ — квадратная неособенная подматрица, то аналогично записывают

$$\bar{\mathbf{G}}^{(y)} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \bar{\mathbf{J}}^{(y)}, \quad (5.62)$$

где

$$\bar{\mathbf{G}}^{(y)} = \mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12} \mathbf{G}_{22}^{-1} \mathbf{G}_{21}; \quad (5.63)$$

$$\bar{\mathbf{J}}^{(y)} = -\mathbf{G}_{12} \mathbf{G}_{22}^{-1} \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_1^{(y)}. \quad (5.64)$$

Уравнение (5.62) соответствует матричному узловому уравнению схемы, полученной путем исключения узлов, потенциалы которых образуют матрицу $\boldsymbol{\varphi}_2$.

Схемы, отвечающие уравнениям (5.59) или (5.62), могут быть построены на основании выражений (5.60), (5.61) или (5.63), (5.64). Эти схемы эквивалентны исходной схеме в том смысле, что имеют одинаковые с ней потенциалы узлов, образующие матрицу $\boldsymbol{\varphi}_2$ или $\boldsymbol{\varphi}_1$.

Следует отметить, что матрица $\bar{\mathbf{G}}^{(y)}$ эквивалентной схемы, как видно из выражений (5.60), (5.63), не зависит от параметров активных элементов (матрицы $\mathbf{J}^{(y)}$). Преобразование активных цепей отличается от преобразования пассивных цепей дополнительной операцией преобразования активных элементов по выражениям (5.61) или (5.64).

Последовательное исключение узлов схемы может быть выполнено путем многократного применения преобразований звезды

в многоугольник. На рис. 5.19, а приведена схема m -лучевой активной звезды. Для этой схемы справедливо узловое уравнение

$$\mathbf{G}_n^{(y)} \Phi = \mathbf{J}^{(y)},$$

где

$$\mathbf{G}_n^{(y)} = \begin{bmatrix} g_1 & & & -g_1 \\ & g_2 & & -g_2 \\ & & \ddots & \\ & & & g_m & -g_m \\ -g_1 & -g_2 & \dots & -g_m & \sum_k g_k \end{bmatrix}$$

— неопределенная матрица узловых проводимостей;

$\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_m \Phi_0]^T$ — матрица узловых потенциалов всех узлов;

$$\mathbf{J}^{(y)} = \left[\mathcal{E}_1 g_1 + I_1 \quad \mathcal{E}_2 g_2 + I_2 \dots \mathcal{E}_m g_m + I_m \quad - \sum_k \mathcal{E}_k g_k \right]^T$$

— матрица узловых токов.

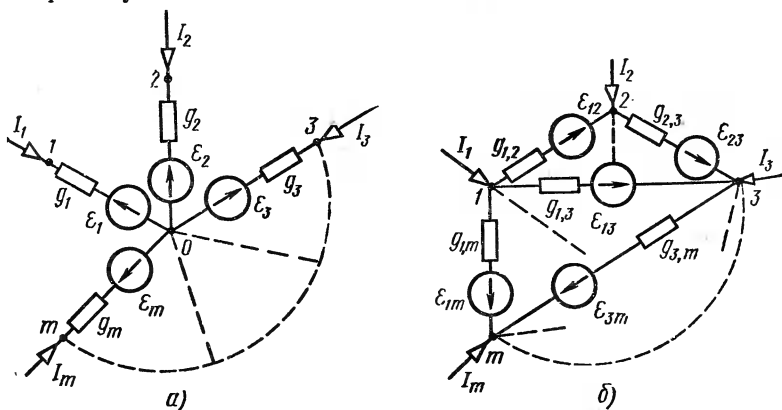


Рис. 5.19

Из вывода уравнений (5.59) или (5.62) очевидно, что выражения (5.60), (5.61) или (5.63), (5.64) могут быть применены и в случае неопределенных матриц узловых проводимостей.

Если исключают узел 0 в схеме звезды, то

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & g_2 & \\ & & \ddots \\ & & & g_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ \vdots \\ -g_m \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{21} = \mathbf{G}_{12}^T; \quad \mathbf{G}_{22} = \sum_k g_k; \quad \mathbf{G}_{22}^{-1} = 1 / \sum_k g_k;$$

$$\mathbf{J}_1^{(y)} = [\mathcal{E}_1 g_1 + I_1 \dots \mathcal{E}_m g_m + I_m]^T; \quad \mathbf{J}_2^{(y)} = - \sum_k \mathcal{E}_k g_k.$$

В соответствии с выражением (5.63) (5.64)

$$\mathbf{G}_B^{(y)} = \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & g_2 & \\ & & \ddots \\ & & & g_m \end{bmatrix} - \frac{1}{\sum_k g_k} \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ \vdots \\ -g_m \end{bmatrix} [-g_1 - g_2 \dots - g_m] =$$

$$= \begin{bmatrix} g_1 - \frac{g_1^2}{\sum_k g_k} & -\frac{g_1 g_2}{\sum_k g_k} & \dots & -\frac{g_1 g_m}{\sum_k g_k} \\ -\frac{g_1 g_2}{\sum_k g_k} & g_2 - \frac{g_2^2}{\sum_k g_k} & \dots & -\frac{g_2 g_m}{\sum_k g_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{g_1 g_m}{\sum_k g_k} & -\frac{g_2 g_m}{\sum_k g_k} & \dots & g_m - \frac{g_m^2}{\sum_k g_k} \end{bmatrix}; \quad (5.65)$$

$$\mathbf{J}^{(y)} = -\frac{1}{\sum_k g_k} \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ \vdots \\ -g_m \end{bmatrix} \left(-\sum_k \mathcal{E}_k g_k \right) + \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 g_1 + I_1 \\ \mathcal{E}_2 g_2 + I_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_m g_m + I_m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 g_1 - \frac{g_1}{\sum_k g_k} \sum_k \mathcal{E}_k g_k + I_1 \\ \mathcal{E}_2 g_2 - \frac{g_2}{\sum_k g_k} \sum_k \mathcal{E}_k g_k + I_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_m g_m - \frac{g_m}{\sum_k g_k} \sum_k \mathcal{E}_k g_k + I_m \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

По матрицам (5.65) и (5.66) можно построить схему, эквивалентную звезде. Эта схема имеет вид полного многоугольника (рис. 5.19, б). Проводимость ветви $g_{j,l}$, соединяющей узлы j, l многоугольника, равна элементу (j, l) матрицы (5.65), взятому с противоположным (положительным) знаком:

$$g_{j,l} = g_{l,j} = \frac{g_j g_l}{\sum_k g_k}; \quad j, l = 1, 2, \dots, m. \quad (5.67)$$

Собственная проводимость каждого узла многоугольника (рис. 5.19, б) равна соответствующему диагональному элементу матрицы (5.65).

Пассивные параметры $g_{j,l}$ эквивалентного многоугольника определяют однозначно. Активные параметры (э. д. с. ветвей) не могут быть найдены единственным образом, так как число ветвей полного многоугольника $m(m-1)/2$ больше числа условий для

определения э. д. с., т. е. числа независимых элементов матрицы узловых токов (5.66). Сумма всех m элементов матрицы $\bar{J}^{(y)}$ равна нулю, следовательно, матрица $\bar{J}^{(y)}$ имеет $m-1$ независимых элементов.

Чтобы активный многоугольник с проводимостями ветвей (5.67) был эквивалентен активной звезде, в общем случае достаточно включить по одному соответствующему источнику э. д. с. в любые из $m-1$ ветвей многоугольника. Если, например, включить источники э. д. с. в каждую из $m-1$ ветвей многоугольника, имеющих общий j -й узел, то э. д. с. определяется на основании равенства (5.66):

$$\mathcal{E}_{jl} = \left(\mathcal{E}_{lj} - \frac{g_l}{\sum_k g_k} \sum_k \mathcal{E}_{lk} g_k \right) \frac{1}{g_{jl}}.$$

Учитывая соотношение (5.67), получаем

$$\mathcal{E}_{jl} = \mathcal{E}_l \frac{\sum_k g_k}{g_j} - \frac{1}{g_j} \sum_k \mathcal{E}_k g_k = \sum_{k=1}^m (\mathcal{E}_l - \mathcal{E}_k) \frac{g_k}{g_j} \quad (5.68)$$

$$(l = 1, 2, \dots, m; l \neq j).$$

Во всех ветвях, которые не соединены с узлом j , источники э. д. с. отсутствуют.

Аналогично решают задачу определения э. д. с. $m-1$ источников, включенных в другие ветви многоугольника. Можно включить по одному источнику э. д. с. в каждую ветвь многоугольника. Чтобы определить величину э. д. с. в этом случае, ток j -го узла необходимо представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{J}_j^{(y)} &= \mathcal{E}_j g_j - \sum_k g_k \sum_k \mathcal{E}_k g_k + I_j = (\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_1) \frac{g_j g_1}{\sum_k g_k} + \\ &+ (\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_2) \frac{g_j g_2}{\sum_k g_k} + \dots + (\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_m) \frac{g_j g_m}{\sum_k g_k} + I_j = \\ &= \sum_l \left[(\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_l) \frac{g_j g_l}{\sum_k g_k} \right] + I_j = \sum_l (\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_l) g_{l,j} + I_j. \end{aligned}$$

Непосредственно из схемы на рис. 5.19, б находим

$$\bar{J}_j^{(y)} = \sum_l \mathcal{E}_{lj} g_{l,j} + I_j,$$

где $\mathcal{E}_{lj} = -\mathcal{E}_{jl}$. Таким образом, э. д. с. источника в ветви многоугольника, соединяющей узлы l и j ,

$$\mathcal{E}_{lj} = \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_l; \quad j, l = 1, 2, \dots, m. \quad (5.69)$$

При наличии во всех ветвях многоугольника э. д. с., определяемых соотношением (5.69), сумма э. д. с. в любом контуре многоугольника равна нулю. Следовательно, если многоугольник

не присоединен к внешней активной цепи, токи в его ветвях отсутствуют. В случае, когда многоугольник содержит $m - 1$ источников, э. д. с. которых выражаются, например, равенством (5.68), в его ветвях возникают токи, даже если многоугольник не присоединен к внешней цепи.

Аналогично решается задача преобразования звезды, ветви которой содержат источники тока (источник тока можно заменить эквивалентным источником э. д. с.).

Если звезда пассивная (в ветвях нет источников), то формула (5.67) для проводимостей ветвей эквивалентного многоугольника остается справедливой. В частном случае пассивной трехлучевой звезды (рис. 5.20, а) проводимости эквивалентного треугольника (рис. 5.20, б) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} g_{1,2} &= \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}; & g_{2,3} &= \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}; \\ g_{3,1} &= \frac{g_1 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \end{aligned} \quad (5.70)$$

или при замене проводимостей — сопротивлениями

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; & r_{2,3} &= r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \\ r_{3,1} &= r_3 + r_1 + \frac{r_1 r_3}{r_2}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

С помощью матричных выражений (5.59) ÷ (5.64) можно последовательно исключать по одному узлу или сразу исключить группу узлов; поочередное исключение узлов выполняют также с помощью формул (5.67) ÷ (5.71). Как уже отмечалось, исключение узлов эквивалентно исключению переменных узловых уравнений, однако преобразование схемы путем уменьшения числа узлов не требует применения операций вычитания, что позволяет выполнить расчеты с большей точностью по сравнению с методом последовательного исключения переменных системы уравнений.

Пример 5.9. Определить входное сопротивление между узлами 5, 6 схемы на рис. 5.21, а. Параметры схемы: $r_1 = r_6 = 2$ Ом; $r_2 = r_5 = 3$ Ом; $r_3 = r_4 = r_7 = r_9 = r_{11} = 6$ Ом; $r_8 = r_{10} = 18$ Ом.

Решение. Входное сопротивление между узлами 5, 6 найдем, преобразовав исходную схему следующим образом: трехлучевые звезды с узлами 1 и 2 заменим эквивалентными треугольниками. В результате получим схему на рис. 5.21, б, параметры которой вычислим по (5.71):

$$\begin{aligned} r_{5,3} &= r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3} = 6 \text{ Ом}; & r_{3,6} &= r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1} = 18 \text{ Ом}; \\ r'_{5,6} &= r_1 + r_3 + \frac{r_1 r_3}{r_2} = 12 \text{ Ом}; & r_{5,4} &= r_{3,6} = 18 \text{ Ом}; \\ r_{4,6} &= r_{5,3} = 6 \text{ Ом}; & r''_{5,6} &= r'_{5,6} = 12 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

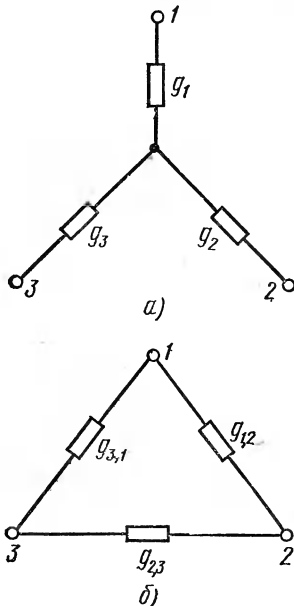


Рис. 5.20

Заменяя параллельно включенные сопротивления схемы на рис. 5.21, б эквивалентными, получим схему на рис. 5.21, в, в которой

$$r_{\partial 1} = r_{\partial 2} = r_{\partial 5} = 3 \text{ Ом}; \quad r_{\partial 3} = r_{\partial 4} = 9 \text{ Ом}.$$

Из этой схемы определим входное сопротивление между узлами 5, 6:

$$r_{\text{вх}} = \left(\frac{1}{r_{\partial 1}} + \frac{1}{r_{\partial 2} + r_{\partial 3}} + \frac{1}{r_{\partial 4} + r_{\partial 5}} \right)^{-1} = 2 \text{ Ом}.$$

Схему на рис. 5.21, в можно получить также с помощью одновременного исключения узлов 1, 2 на основании матричного соотношения (5.60). Опреде-

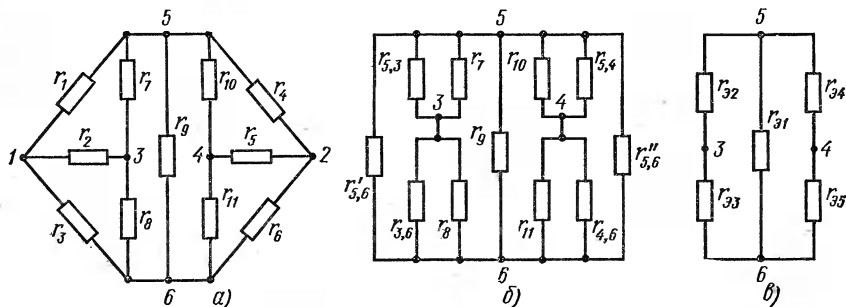


Рис. 5.21

ленная матрица узловых проводимостей исходной схемы при $\varphi_6 = 0$ имеет вид

$$\mathbf{G}^{(y)} = \begin{bmatrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{9} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{19}{18} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица разбивается на блоки в соответствии с штриховыми линиями:

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{19}{18} \end{bmatrix}.$$

Так как

$$G_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

из равенства (5.60)

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(y)} &= G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица $\bar{G}^{(y)}$ представляет собой определенную матрицу узловых проводимостей эквивалентной схемы. Эту схему легко построить, если записать неопределенную матрицу

$$\bar{G}_n^{(y)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{9} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Элементы последней строки и последнего столбца матрицы $\bar{G}_n^{(y)}$ находятся из условия равенства нулю суммы элементов любой строки и любого столбца неопределенной матрицы.

Если каждую пару узлов j, l ($j, l = 3, 4, 5, 6$) соединить ветвью, проводимость которой равна элементу (j, l) неопределенной матрицы, взятому с противоположным (положительным) знаком, то получится эквивалентная схема, приведенная на рис. 5.21, а.

Аналогично решается задача определения входного сопротивления путем исключения узлов 3, 4.

§ 5.8. Преобразования схем при исключении контуров

Если матричное контурное уравнение (4.30) записано в виде

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(k)} \\ I_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{(k)} \\ \mathcal{E}_2^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (5.72)$$

то можно получить соотношения, аналогичные (5.59) — (5.64):

$$\bar{R}^{(k)} I_2^{(k)} = \bar{\mathcal{E}}^{(k)}, \quad (5.73)$$

где

$$\bar{R}^{(K)} = R_{22} - R_{21} R_{11}^{-1} R_{12}; \quad (5.74)$$

$$\bar{\mathcal{E}}^{(K)} = -R_{21} R_{11}^{-1} \mathcal{E}_1^{(K)} + \mathcal{E}_2^{(K)}, \quad (5.75)$$

или

$$\bar{R}^{(K)} I_1^{(K)} = \bar{\mathcal{E}}^{(K)}, \quad (5.76)$$

где

$$\bar{R}^{(K)} = R_{11} - R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}; \quad (5.77)$$

$$\bar{\mathcal{E}}^{(K)} = -R_{12} R_{22}^{-1} \mathcal{E}_2^{(K)} + \mathcal{E}_1^{(K)}. \quad (5.78)$$

Уравнения (5.73) или (5.76) можно рассматривать как контурные уравнения эквивалентных схем, полученных путем исключения контуров, контурные токи которых образуют матрицу $I_1^{(K)}$ или $I_2^{(K)}$. Эквивалентные схемы имеют контурные токи, совпадающие с токами матриц $I_2^{(K)}$ или $I_1^{(K)}$ исходной схемы.

Пусть схема имеет k независимых контуров и k -й контур исключается. Тогда матрицу контурных сопротивлений $R^{(K)}$ исходной схемы делят на блоки следующим образом:

$$R^{(K)} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,k-1} & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2,k-1} & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k-1,1} & r_{k-1,2} & \dots & r_{k-1,k-1} & r_{k-1,k} \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{k,k-1} & r_{kk} \end{bmatrix},$$

где

$$R_{11} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,k-1} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k-1,1} & r_{k-1,2} & \dots & r_{k-1,k-1} \end{bmatrix}; \quad R_{12} = \begin{bmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ \vdots \\ r_{k-1,k} \end{bmatrix};$$

$$R_{21} = [r_{k1} \ r_{k2} \ \dots \ r_{k,k-1}]; \quad R_{22} = r_{kk}.$$

Матрицу контурных сопротивлений схемы с исключенным контуром вычисляют по формуле (5.77) при $R_{22}^{-1} = 1/r_{kk}$:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{(K)} &= R_{11} - \frac{1}{r_{kk}} \begin{bmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ \vdots \\ r_{k-1,k} \end{bmatrix} [r_{k1} \ r_{k2} \ \dots \ r_{k,k-1}] = \\ &= R_{11} - \frac{1}{r_{kk}} \begin{bmatrix} r_{1k} \ r_{k1} & r_{1k} \ r_{k2} & \dots & r_{1k} \ r_{k,k-1} \\ r_{2k} \ r_{k1} & r_{2k} \ r_{k2} & \dots & r_{2k} \ r_{k,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k-1,k} \ r_{k1} & r_{k-1,k} \ r_{k2} & \dots & r_{k-1,k} \ r_{k,k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Согласно этому равенству, собственное сопротивление j -го контура ($j = 1, 2, \dots, k-1$)

$$\bar{r}_{jj} = r_{jj} - \frac{r_{jk}r_{kj}}{r_{kk}};$$

общее сопротивление i -го и j -го контуров ($i, j = 1, 2, \dots, k-1$)

$$\bar{r}_{ij} = r_{ij} - \frac{r_{ik}r_{kj}}{r_{kk}}.$$

Если i -й и j -й контуры не имеют общих сопротивлений с исключаемым контуром, то собственные сопротивления r_{ii} , r_{jj} и общее сопротивление $r_{ij} = r_{ji}$ при исключении k -го контура не изменяются.

Матрицу контурных э. д. с. исходной схемы $\mathcal{E}^{(k)}$ можно представить в виде

$$\mathcal{E}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{(k)} \\ \mathcal{E}_2^{(k)} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathcal{E}_1^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{(k)} \\ \mathcal{E}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{k-1}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_2^{(k)} = \mathcal{E}_k^{(k)}.$$

По соотношению (5.78) матрица контурных э. д. с. схемы с исключенным контуром

$$\mathcal{E}^{(k)} = -\frac{1}{r_{kk}} \begin{bmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ \vdots \\ r_{k-1, k} \end{bmatrix} \mathcal{E}_k^{(k)} + \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{(k)} \\ \mathcal{E}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{k-1}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{(k)} - \frac{r_{1k}}{r_{kk}} \mathcal{E}_k^{(k)} \\ \mathcal{E}_2^{(k)} - \frac{r_{2k}}{r_{kk}} \mathcal{E}_k^{(k)} \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{k-1}^{(k)} - \frac{r_{k-1, k}}{r_{kk}} \mathcal{E}_k^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (5.80)$$

Таким образом, при исключении k -го контура контурная э. д. с. j -го контура ($j = 1, 2, \dots, k-1$) принимает значение

$$\bar{\mathcal{E}}_j^{(k)} = \mathcal{E}_j^{(k)} - \frac{r_{jk}}{r_{kk}} \mathcal{E}_k^{(k)}.$$

В общем случае по матрице контурных сопротивлений (5.79) не удастся составить эквивалентную схему обычного вида, так как при числе контуров больше трех такая схема не имеет общих сопротивлений для каждой пары контуров.

Для иллюстрации преобразования схемы путем исключения контуров можно ввести условную эквивалентную схему, в которой каждый контур изображается отдельно как контур с сопротивлением $\bar{r}_{jj}$ и э. д. с. $\bar{\mathcal{E}}_j^{(k)}$, а общие сопротивления контуров r_{ij}

показываются аналогично тому, как показана взаимная индуктивность между катушками на рис. 1.36. Кроме того, в схеме обычного вида аналогично взаимной индуктивности изображают связи между контурами, не имеющими общих ветвей.

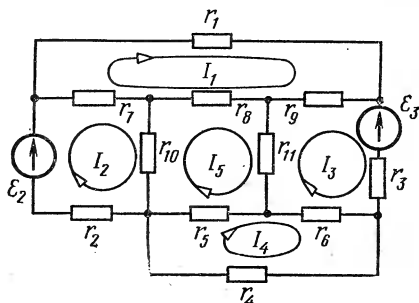


Рис. 5.22

Пример 5.10. Исключить контур с контурным током I_5 в схеме на рис. 5.22.

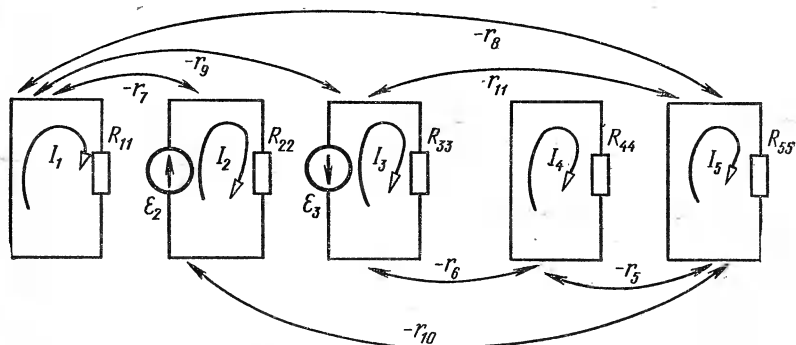


Рис. 5.23

Решение. Для заданной схемы составим условную эквивалентную схему, изображенную на рис. 5.23. Матрица контурных сопротивлений исходной схемы

$$R^{(K)} = \begin{bmatrix} R_{11} - r_7 & -r_9 & 0 & -r_8 \\ -r_7 & R_{22} & 0 & 0 & -r_{10} \\ -r_9 & 0 & R_{33} & -r_6 & -r_{11} \\ 0 & 0 & -r_6 & R_{44} & -r_5 \\ -r_8 & -r_{10} & -r_{11} & -r_5 & R_{55} \end{bmatrix},$$

где

$$R_{11} = r_1 + r_7 + r_8 + r_9; \quad R_{22} = r_2 + r_7 + r_{10}; \quad R_{33} = r_3 + r_6 + r_9 + r_{11};$$

$$R_{44} = r_4 + r_5 + r_6; \quad R_{55} = r_5 + r_8 + r_{10} + r_{11}.$$

Если исключается контур, то в соответствии с равенством (5.79) матрица контурных сопротивлений новой схемы

$$\bar{\mathbf{R}}^{(K)} = \begin{bmatrix} R_{11} & -r_7 & -r_9 & 0 \\ -r_7 & R_{22} & 0 & 0 \\ -r_9 & 0 & R_{33} & -r_6 \\ 0 & 0 & -r_6 & R_{44} \end{bmatrix} - \frac{1}{R_{55}} \begin{bmatrix} r_8^2 & r_8 r_{10} & r_8 r_{11} & r_8 r_5 \\ r_{10} r_8 & r_{10}^2 & r_{10} r_{11} & r_{10} r_5 \\ r_{11} r_8 & r_{11} r_{10} & r_{11}^2 & r_{11} r_5 \\ r_5 r_8 & r_5 r_{10} & r_5 r_{11} & r_5^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_{11} - \frac{r_8^2}{R_{55}} & -r_7 - \frac{r_8 r_{10}}{R_{55}} & -r_9 - \frac{r_8 r_{11}}{R_{55}} & -\frac{r_8 r_5}{R_{55}} \\ -r_7 - \frac{r_{10} r_8}{R_{55}} & R_{22} - \frac{r_{10}^2}{R_{55}} & -\frac{r_{10} r_{11}}{R_{55}} & -\frac{r_{10} r_5}{R_{55}} \\ -r_9 - \frac{r_{11} r_8}{R_{55}} & -\frac{r_{11} r_{10}}{R_{55}} & R_{33} - \frac{r_{11}^2}{R_{55}} & -r_6 - \frac{r_{11} r_5}{R_{55}} \\ -\frac{r_5 r_8}{R_{55}} & -\frac{r_5 r_{10}}{R_{55}} & -r_6 - \frac{r_5 r_{11}}{R_{55}} & R_{44} - \frac{r_5^2}{R_{55}} \end{bmatrix} \end{matrix} = [\bar{R}_{ij}].$$

Так как $\mathcal{E}_5^{(K)} = 0$, матрица контурных э. д. с. согласно равенству (5.80)

$$\mathcal{E}^{(K)} = [0 \ \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \ 0]^T.$$

Матрицам $\mathbf{R}^{(K)}$ и $\mathcal{E}^{(K)}$ соответствует условная эквивалентная схема на рис 5.24, а, где $\bar{R}_{ij} = \bar{R}_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) — элементы матрицы $\bar{\mathbf{R}}^{(K)}$, например $\bar{R}_{11} = R_{11} - r_8^2/R_{55}$, $\bar{R}_{12} = R_{21} = -r_7 - r_8 r_{10}/R_{55}$ и т. д.

Новое значение собственного сопротивления первого контура

$$\bar{R}_{11} = R_{11} - \frac{r_8^2}{R_{55}} = r_1 + r_7 + r_8 + r_9 - \frac{r_8^2}{r_5 + r_8 + r_{10} + r_{11}} =$$

$$= r_1 + r_7 + r_9 + \frac{r_8 r_{10}}{R_{55}} + \frac{r_8 r_{11}}{R_{55}} + \frac{r_8 r_5}{R_{55}} = r_1 + \left(r_7 + \frac{r_8 r_{10}}{R_{55}} \right) + \left(r_9 + \frac{r_8 r_{11}}{R_{55}} \right) + \frac{r_8 r_5}{R_{55}}.$$

Аналогично выразим собственные сопротивления других контуров:

$$\bar{R}_{22} = r_2 + \left(r_7 + \frac{r_{10} r_8}{R_{55}} \right) + \frac{r_{10} r_{11}}{R_{55}} + \frac{r_{10} r_5}{R_{55}};$$

$$\bar{R}_{33} = r_3 + \left(r_9 + \frac{r_{11} r_8}{R_{55}} \right) + \frac{r_{11} r_{10}}{R_{55}} + \left(r_6 + \frac{r_{11} r_5}{R_{55}} \right);$$

$$\bar{R}_{44} = r_4 + \frac{r_5 r_8}{R_{55}} + \frac{r_5 r_{10}}{R_{55}} + \left(r_6 + \frac{r_5 r_{11}}{R_{55}} \right).$$

Как видно из полученных значений для собственных сопротивлений контуров, сопротивление $\bar{R}_{ij}$ представляет собой сумму сопротивлений r_i и сопротивлений, равных внедиагональным элементам j -й строки матрицы $\bar{\mathbf{R}}^{(K)}$, взятым с противоположным (положительным) знаком. Поэтому матрице $\bar{\mathbf{R}}^{(K)}$ можно поставить в соответствие условную эквивалентную схему на рис. 5.24, б. В этой схеме пары контуров 1—2, 1—3, 3—4 и 2—4 имеют общие ветви; пары контуров 1—4 и 2—3 не имеют общих ветвей, поэтому связь между контурами этих пар изображена аналогично взаимной индуктивности.

Для заданной схемы (рис. 5.22) строим дуальную схему (рис. 5.25, а). Исключению контура с током I_5 исходной схемы соответствует исключение узла 5 дуальной схемы, осуществляемое путем преобразования четырехлучевой звезды в полный четырехугольник. После такого преобразования получим непланарную схему на рис. 5.25, б ($g_{55}^d = R_{55}$). Схема на рис. 5.25, б может быть построена также по матрицам узловых проводимостей и узловых токов,

если эти матрицы приравнять соответственно к матрицам контурных сопротивлений $\bar{R}^{(K)}$ и контурных э. д. с. $\bar{\mathcal{E}}^{(K)}$ схемы с исключенным контуром (рис. 5.24, б). Контурные уравнения схемы на рис. 5.24, б совпадают с узловыми уравнениями схемы на рис. 5.25, б, т. е. эти схемы можно рассматривать как дуальные.

Соотношения (5.79) и (5.80) для матрицы контурных сопротивлений и вектора контурных э. д. с. схемы с исключенным

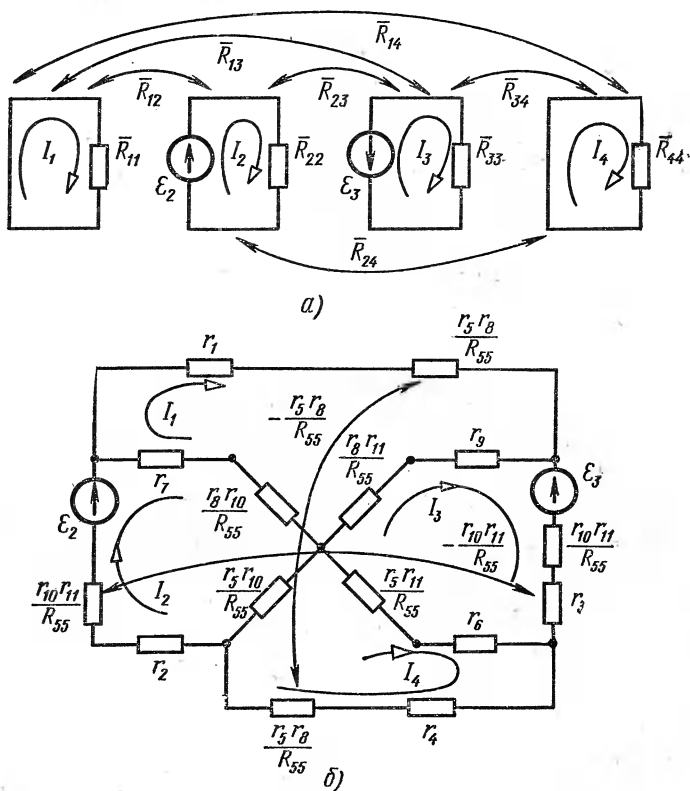


Рис. 5.24

контуром справедливы не только для планарных схем с контурами (ячейками), но и для любой системы независимых контуров как планарных, так и непланарных схем. Эти формулы применяют при поочередном исключении контуров; контурные токи исключенных контуров определяют непосредственно из уравнений для этих контуров.

Если схема планарная, то можно построить дуальную ей схему, которая имеет матрицу узловых проводимостей, равную матрице контурных сопротивлений исходной схемы (для конту-

ров — ячеек). Таким образом, исключению контуров планарной схемы можно поставить в соответствие исключение узлов дуальной схемы.

Частным случаем преобразования схемы при уменьшении числа контуров является преобразование треугольника сопротивлений (рис. 5.26, а) в эквивалентную звезду (рис. 5.26, б).

Для схемы на рис. 5.26, а справедливо уравнение

$$\mathbf{R}_H^{(K)} \mathbf{I}^{(K)} = \mathcal{E}^{(K)},$$

где

$$\mathbf{R}_H^{(K)} =$$

$$= \begin{bmatrix} r_{1,2} & -r_{1,2} \\ r_{2,3} & -r_{2,3} \\ r_{3,1} & -r_{3,1} \\ -r_{1,2} & -r_{2,3} & -r_{3,1} & \sum r \end{bmatrix}$$

— неопределенная матрица контурных сопротивлений ($\sum r = r_{1,2} + r_{2,3} + r_{3,1}$); $\mathbf{I}^{(K)} = [I_1 I_2 I_3 I_0]^T$ — матрица контурных токов; $\mathcal{E}^{(K)} = [-\mathcal{E}_{12} + U_{21}, -\mathcal{E}_{23} + U_{32}, -\mathcal{E}_{31} + U_{13}, \sum \mathcal{E}]^T$ — матрица контурных э. д. с. ($\sum \mathcal{E} = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{23} + \mathcal{E}_{31}$).

Матрица $\mathbf{R}_H^{(K)}$ треугольника дуальна матрице $\mathbf{G}_H^{(Y)}$ трехлучевой звезды, поэтому для

пассивных параметров звезды, эквивалентной треугольнику, справедливы формулы, дуальные (5.70) и (5.71):

$$r_1 = \frac{r_{1,2} r_{3,1}}{r_{1,2} + r_{2,3} + r_{3,1}}; \quad r_2 = \frac{r_{2,3} r_{1,2}}{r_{1,2} + r_{2,3} + r_{3,1}}; \quad r_3 = \frac{r_{3,1} r_{2,3}}{r_{1,2} + r_{2,3} + r_{3,1}}; \quad (5.81)$$

$$g_1 = g_{1,2} + g_{3,1} + \frac{g_{1,2} g_{3,1}}{g_{2,3}}; \quad g_2 = g_{2,3} + g_{1,2} + \frac{g_{2,3} g_{1,2}}{g_{3,1}}; \quad g_3 = g_{3,1} + g_{2,3} + \frac{g_{3,1} g_{2,3}}{g_{1,2}}. \quad (5.82)$$

Выражения (5.81) и (5.82) получаются также путем решения уравнений (5.70) или (5.71) относительно r_1, r_2, r_3 или g_1, g_2, g_3 .

При исключении контура с током I_0 в схеме (рис. 5.26, а) матрица $\mathcal{E}^{(K)}$ преобразуется к виду, аналогичному (5.66) при $m=3$:

$$\mathcal{E}^{(K)} = \begin{bmatrix} -\mathcal{E}_{12} + \frac{r_{1,2}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E} + U_{21} \\ -\mathcal{E}_{23} + \frac{r_{2,3}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E} + U_{32} \\ -\mathcal{E}_{31} + \frac{r_{3,1}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E} + U_{13} \end{bmatrix}.$$

Для определения активных параметров звезды (рис. 5.26, б) следует приравнять:

$$-\mathcal{E}_{12} + \frac{r_{1,2}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2;$$

$$-\mathcal{E}_{23} + \frac{r_{2,3}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3,$$

$$-\mathcal{E}_{31} + \frac{r_{3,1}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E} = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1.$$

Из записанных трех уравнений только два независимы, поэтому задача определения э. д. с. звезды решается неоднозначно.

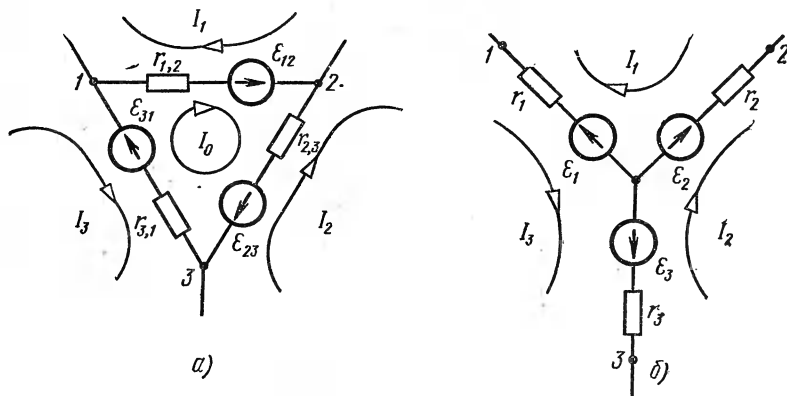


Рис. 5.26

Можно задаться произвольным значением одной э. д. с. и определить две другие; например, если $\mathcal{E}_3 = 0$, то

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{31} - \frac{r_{3,1}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E}; \quad \mathcal{E}_2 = -\mathcal{E}_{23} + \frac{r_{2,3}}{\Sigma r} \sum \mathcal{E}.$$

Преобразование полного многоугольника с числом узлов $m > 3$ в m -лучевую эквивалентную звезду в общем случае не может быть выполнено, так как число искоемых проводимостей ветвей звезды в системе уравнений (5.67) меньше числа условий, которым они должны удовлетворять (число условий равно числу ветвей многоугольника).

Пример 5.11. Определить входное сопротивление относительно зажимов источника э. д. с. $\mathcal{E}$ в схеме на рис. 5.27, а. Параметры схемы: $r_{1,2} = r_{4,5} = 1 \text{ Ом}$; $r_{3,1} = r_{5,6} = 2 \text{ Ом}$; $r_{3,2} = r_{6,4} = 3 \text{ Ом}$; $r_7 = 1 \text{ Ом}$; $r_8 = r_9 = 2/3 \text{ Ом}$.

Решение. Преобразуем два треугольника сопротивлений исходной схемы в эквивалентные звезды. В результате получим схему на рис. 5.27, б, параметры которой:

$$r_1 = r_4 = \frac{1 \cdot 3}{1 + 2 + 3} = \frac{1}{2} \text{ Ом}; \quad r_2 = r_5 = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2 + 3} = \frac{1}{3} \text{ Ом};$$

$$r_3 = r_6 = \frac{2 \cdot 3}{1 + 2 + 3} = 1 \text{ Ом}.$$

Последовательные сопротивления ветвей этой схемы заменим эквивалентными:

$$r_{\text{э}1} = r_1 + r_7 + r_4 = 2 \text{ Ом}; \quad r_{\text{э}2} = r_2 + r_6 + r_8 = 2 \text{ Ом};$$

$$r_{\text{э}3} = r_3 + r_5 + r_9 = 2 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление относительно зажимов источника э. д. с. $\mathcal{E}$

$$r_{\text{вх}} = \frac{r_{\text{э}1} r_{\text{э}3}}{r_{\text{э}1} + r_{\text{э}3}} + r_{\text{э}2} = 3 \text{ Ом}.$$

Треугольники сопротивлений в исходной схеме можно исключить одновременно как два контура с помощью матричного соотношения (5.74) или (5.77).

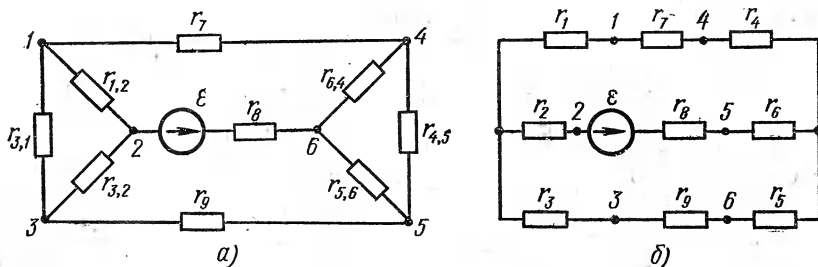


Рис. 5.27

Нетрудно убедиться, что матрица $\bar{R}^{(к)}$ будет соответствовать эквивалентная схема, изображенная на рис. 5.27, б.

§ 5.9. Преобразование симметричных схем

В ряде случаев электрические цепи и их схемы замещения обладают симметрией как по конфигурации, так и по значению параметров. Симметрия схемы приводит, как правило, к существенному упрощению ее расчета.

На рис. 5.28, а приведена схема, которая симметрична относительно линии, проходящей через ветви с сопротивлениями r_2 и r_4 . Контурные уравнения для этой схемы имеют вид

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_1 & 0 & r_2 \\ r_1 & r_{22} & r_4 & 0 \\ 0 & r_4 & r_{33} & r_1 \\ r_2 & 0 & r_1 & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_1 \end{bmatrix},$$

где

$$r_{11} = r + r_1 + r_2;$$

$$r_{22} = r_1 + r_3 + r_4;$$

$$r_{33} = r_1 + r_3 + r_4 = r_{22};$$

$$r_{44} = r + r_1 + r_2 = r_{11}.$$

В данном случае матрица контурных сопротивлений $R^{(k)}$ симметрична относительно обеих диагоналей.

Если в векторе контурных токов взаимно поменять местами контурные токи I_1 и I_4 , I_2 и I_3 , то контурные уравнения схемы не изменятся. Это означает, что $I_1 = I_4$ и $I_2 = I_3$. С учетом этих равенств контурные уравнения схемы записывают следующим образом:

$$\begin{bmatrix} r_{11} + r_2 & r_1 \\ r_1 & r_{22} + r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + r_1 + 2r_2 & r_1 \\ r_1 & r_1 + r_3 + 2r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вследствие симметрии схемы порядок контурной матрицы уменьшается в два раза. Полученным уравнениям соответствуют две одинаковые эквивалентные схемы на рис. 5.28, б.

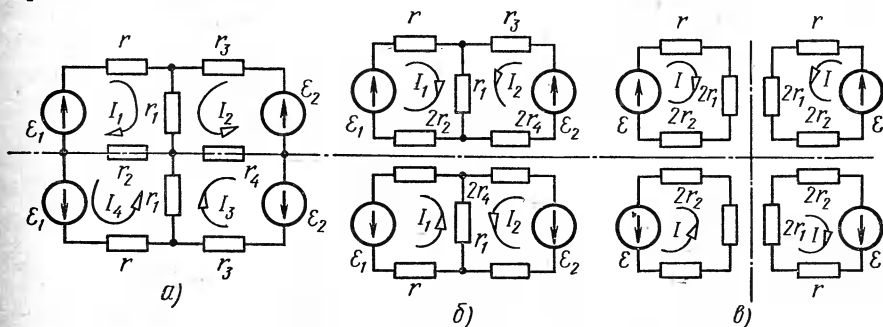


Рис. 5.28

Если дополнительно к ранее записанным условиям симметрии выполняются равенства $r_1 = r_3 = r$, $r_2 = r_4$ и $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$, то появляется вторая линия симметрии, проходящая через ветви с сопротивлением r_1 . Следовательно, возможно дальнейшее разделение схемы с соответствующим упрощением решения (рис. 5.28, в). Так как $I_1 = I_2 = I$, то получаем уравнение

$$(r + 2r_1 + 2r_2) I = \mathcal{E},$$

откуда

$$I = \mathcal{E} / (r + 2r_1 + 2r_2).$$

Как видно из изложенного, величины сопротивлений ветвей, по которым схема делится на симметричные части, удваиваются, а напряжения на зажимах ветвей эквивалентной схемы получаются равными соответствующим напряжениям исходной схемы.

Если линия симметрии пересекает какую-либо ветвь схемы, то ток этой ветви равен нулю. Например, в схеме на рис. 5.29, а ток $I_3 = 0$. Эквивалентная схема (рис. 5.29, б) получена из условия симметрии исходной схемы.

Свойством симметрии обладает также схема на рис. 5.30, а. Расчет этой схемы можно выполнить с помощью эквивалентной схемы на рис. 5.30, б, полученной делением исходной схемы по

линии симметрии. При $a=1$ эта схема непосредственно переходит в схему на рис. 5.29, б.

В общем случае если схема с k независимыми контурами симметрична, то каждому j -му контуру можно найти симметричный $(k-j)$ -й контур. При этом матрица контурных сопротивлений

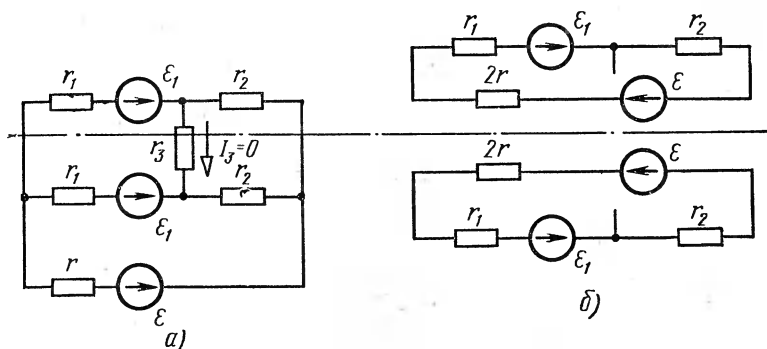


Рис. 5.29

будет симметричной относительно обеих диагоналей, а контурные токи j -го и $(k-j)$ -го контуров $I_j = I_{k-j}$. Если k — нечетное число, то $[(k+1)/2]$ -й контур не имеет симметричного контура, но он не нарушает симметрии матрицы контурных сопротивлений. Ток в $[(k+1)/2]$ -м контуре должен отсутствовать. Для расчета симметричной схемы ее делят по линии симметрии, удваивая сопро-

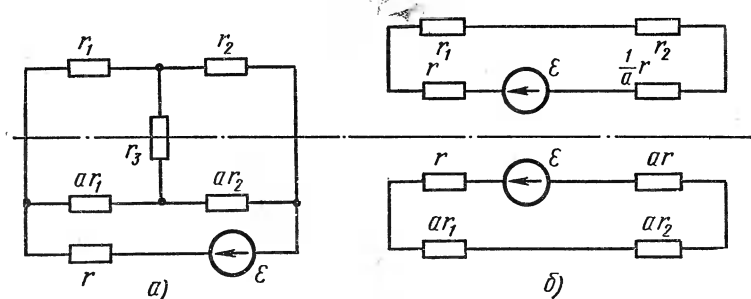


Рис. 5.30

тивления ветвей, по которым проходит эта линия. Э. д. с. этих ветвей остаются неизменными, а токи источников делят пополам.

Если линия симметрии разделяет симметричные контуры, то все точки, находящиеся на этой линии, имеют одинаковые потенциалы и могут быть соединены непосредственно. Такую линию называют иногда нейтралью схемы (линией равного потенциала).

Например, схема на рис. 5.31, а является симметричной. В данном случае линия симметрии (нейтраль) делит все поперечные ветви пополам. При этом в каждой из симметричных частей

схемы напряжение на зажимах поперечной ветви получают равным половине от действительного значения (рис. 5.31, б). Чтобы получить действительные значения напряжений, необходимо все сопротивления и э. д. с. увеличить в два раза (рис. 5.31, в).

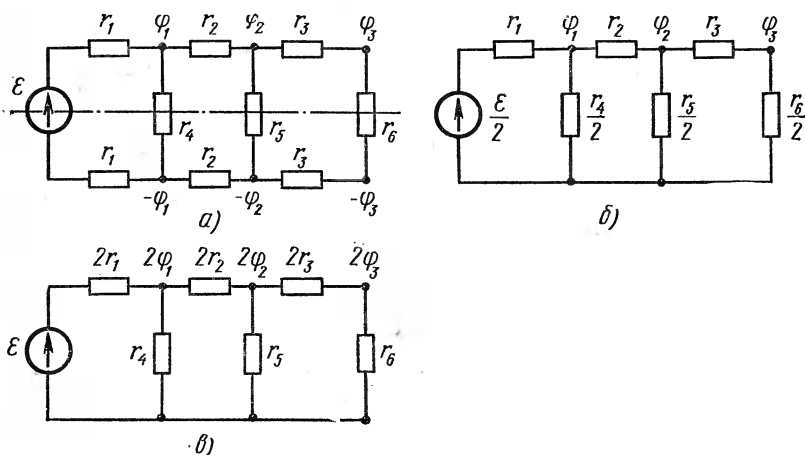


Рис. 5.31

На рис. 5.32, а показана мостовая схема с симметричными связями. Для этой схемы справедливы узловые уравнения

$$\begin{bmatrix} g_{11} & -g_1 & -g_2 & -g_3 \\ -g_1 & g_{22} & -g_4 & -g_2 \\ -g_2 & -g_4 & g_{33} & -g_1 \\ -g_3 & -g_2 & -g_1 & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \\ -J \end{bmatrix},$$

где

$$g_{11} = g_{44} = g_1 + g_2 + g_3; \quad g_{22} = g_{33} = g_1 + g_2 + g_4.$$

Неопределенная матрица узловых проводимостей данной схемы симметрична относительно обеих диагоналей.

Если в векторе узловых потенциалов заменить φ_1 на $-\varphi_4$, φ_4 на $-\varphi_1$, φ_2 на $-\varphi_3$ и φ_3 на $-\varphi_2$, то уравнения схемы не изменяются. Это означает, что в этой схеме $\varphi_1 = -\varphi_4$, $\varphi_2 = -\varphi_3$ и, следовательно, $I_1 = I'_1$, $I_2 = I'_2$. С учетом записанных соотношений получаются узловые уравнения:

$$\begin{bmatrix} g_{11} + g_3 & -g_1 + g_2 \\ -g_1 + g_2 & g_{22} + g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_2 + 2g_3 & -g_1 + g_2 \\ -g_1 + g_2 & g_1 + g_2 + 2g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если от найденной определенной матрицы узловых проводимостей

$$\bar{G}^{(y)} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + 2g_3 & -g_1 + g_2 \\ -g_1 + g_2 & g_1 + g_2 + 2g_4 \end{bmatrix}$$

перейти к неопределенной матрице

$$\bar{G}_n^{(y)} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + 2g_3 & -(g_1 - g_2) & -(2g_2 + 2g_3) \\ -(g_1 - g_2) & g_1 + g_2 + 2g_4 & -(2g_2 + 2g_4) \\ -(2g_2 + 2g_3) & -(2g_2 + 2g_4) & 4g_2 + 2g_3 + 2g_4 \end{bmatrix},$$

то легко построить эквивалентную схему, изображенную на рис. 5.32, б. Проводимость ветвей, соединяющих любую пару узлов

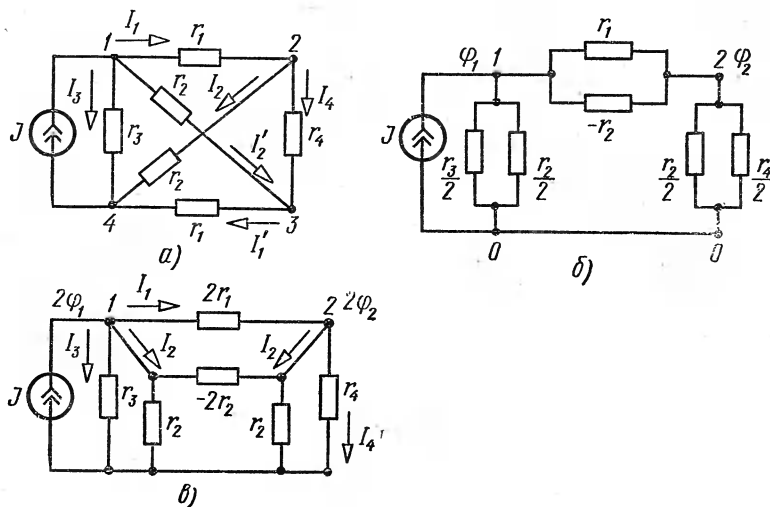


Рис. 5.32

схемы на рис. 5.32, б, равна слагаемым соответствующего внедиагонального элемента матрицы $\bar{G}_n^{(y)}$, взятого с противоположным знаком. Из эквивалентной схемы легко определить потенциалы узлов 1 и 2, которые равны потенциалам узлов 1 и 2 исходной схемы.

Если все сопротивления схемы на рис. 5.32, б увеличить в два раза, то напряжения на зажимах всех ветвей удвоятся (рис. 5.32, в). Токи в сопротивлениях $2r_1$, $2r_3$ и r_4 схемы на рис. 5.32, в равны соответствующим токам исходной схемы.

Для симметричной мостовой схемы можно построить и другие эквивалентные схемы.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ГАРМОНИЧЕСКИХ Э. Д. С. И ТОКОВ

ГЛАВА 6

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЯХ

§ 6.1. Синусоидальные (гармонические) напряжения и токи

Переменным током $i(t)$ называют ток, изменяющийся во времени.

Периодическим током называют ток $i = i(t)$, для которого справедливо равенство

$$i(t) = i(t + T),$$

где T — постоянный промежуток времени (период) переменного тока.

Простейшей периодической функцией является гармоническая или синусоидальная функция.

Гармоническим (синусоидальным) током называют ток, мгновенное значение которого $i(t)$ определяется равенством

$$i(t) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi_i\right), \quad (6.1)$$

где I_m — максимальное значение, или амплитуда, тока. Аргумент синуса $\frac{2\pi}{T}t + \psi_i$ называют фазой; величину ψ_i , равную фазе при $t=0$, называют начальной фазой. Фаза измеряется в радианах (рад) или градусах ($^\circ$). За промежуток времени $t = T$ фаза увеличивается на 2π (рад) или 360° .

Величину, обратную периоду, называют частотой $f = 1/T$. Частота f измеряется в герцах (Гц). В СССР и странах Европы принята стандартная частота переменного тока 50 Гц, которой соответствует период $T = 0,02$ с. В радиотехнике применяют гармонические колебания с частотами до $3 \cdot 10^{10}$ Гц.

Если $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, то гармонический ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Величину ω называют угловой (круговой) частотой. Угловая частота измеряется в радианах в секунду (рад/с). Если $f = 50$ Гц, то $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314$ рад/с.

Из равенства (6.1) видно, что для определения гармонически изменяющейся функции необходимо знать три величины: *амплитуду, частоту* (период) и *начальную фазу*.

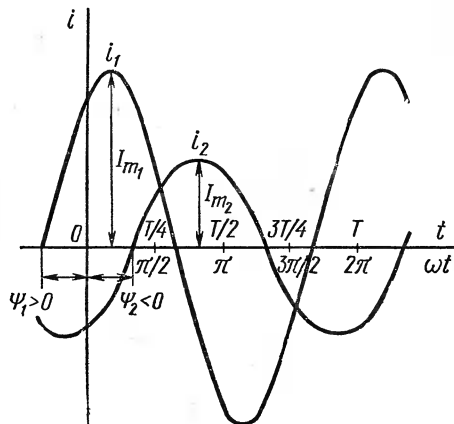


Рис. 6.1

На рис. 6.1 приведены графики двух гармонических токов одинаковой частоты, но с различными амплитудами и начальными фазами:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1);$$

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Начальная фаза отсчитывается от момента, соответствующего началу синусоиды (т. е. нулевому значению при переходе от отрицательных к положительным значениям), до момента $t=0$. При $\psi_1 > 0$ начало синусоиды сдвинуто влево, а при $\psi_2 < 0$ — вправо.

во от начала координат. Если у гармонических функций одинаковой частоты начальные фазы одинаковы (различны), то говорят, что функции совпадают (не совпадают, сдвинуты) по фазе. Сдвиг фаз двух гармонических функций измеряется разностью фаз, равной разности начальных фаз. Если сдвиг фаз гармонических функций равен $\pm \pi$ ($\pm \pi/2$), то говорят, что функции противоположны по фазе (находятся в квадратуре).

Гармонически изменяющуюся величину можно представить с помощью вектора на комплексной плоскости. Так, току $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ можно поставить в соответствие вектор на комплексной плоскости, длина которого равна I_m и который образует с действительной осью угол ψ_i (рис. 6.2). Этот вектор обозначен $\dot{I}_m$. Проекция вектора $\dot{I}_m$ на ось мнимых величин равна $i(0) = I_m \sin \psi_i$. Если этот вектор вращается против направления движения часовой стрелки с угловой скоростью ω , то для любого момента времени t проекция вектора на ось мнимых величин равна мгновенному значению тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Можно считать вектор $\dot{I}_m$ неподвижным, а оси мнимых и вещественных величин (оси координат) — вращающимися по направлению движения часовой стрелки.

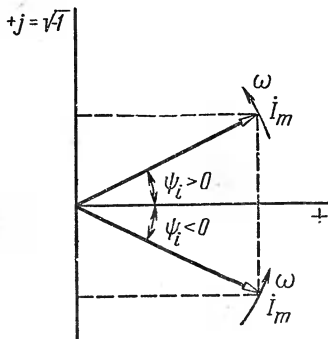


Рис. 6.2

Совокупность нескольких векторов на комплексной плоскости, соответствующих гармонически изменяющимся с одинаковой частотой параметрам режима электрической цепи, называют векторной диаграммой.

§ 6.2. Понятие о генераторах гармонической э. д. с.

Генераторы гармонической э. д. с. (гармонического напряжения), применяемые в электроэнергетике, состоят из неподвижной части — *статора* и подвижной, вращающейся, части — *ротора*.

На рис. 6.3 схематически изображен такой генератор. На роторе обычно располагают электромагниты, полюсные наконечники которых выполняются из электротехнической стали. Обмотка электромагнитов соединена с кольцами; с помощью щеток к кольцам подводится напряжение от источника постоянной э. д. с. Магнитную цепь статора также выполняют из электротехнической стали. В пазах статора находятся проводники статорной обмотки, соединенные между собой последовательно. Соединения проводников на переднем и заднем торцах статора показаны на рис. 6.3 соответственно сплошными и штриховыми линиями.

При вращении ротора в каждом проводнике статорной обмотки индуцируется э. д. с.

$$e = Blv,$$

где B — радиальная составляющая индукции магнитного поля, движущегося относительно проводника обмотки статора; l — активная длина проводника, в котором индуцируется э. д. с.; v — скорость перемещения магнитного поля относительно проводника обмотки статора.

При условии, что l и v — постоянные величины, закон изменения э. д. с. e определяется законом изменения B . Для получения гармонической э. д. с. радиальная составляющая индукции должна изменяться по гармоническому закону. Если воздушный зазор между статором и полюсными наконечниками ротора сделать переменным (увеличивающимся от середины полюсных наконечников к их краям), придавая полюсным наконечникам соответствующую форму, то можно получить закон распределения радиальной составляющей магнитной индукции по окружности статора, достаточно близкий к гармоническому.

За один оборот ротора, имеющего p пар полюсов, происходит p полных циклов изменения э. д. с. Если ротор вращается

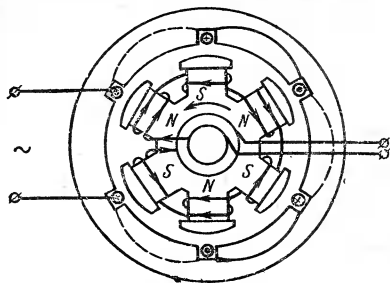


Рис. 6.3

со скоростью n оборотов в минуту, то частота индуцированной э. д. с. $f = pn/60$. Для получения частоты 50 Гц роторы генераторов с одной парой полюсов должны вращаться со скоростью $n = 3000$ об/мин, с двумя парами полюсов — $n = 1500$ об/мин. Чтобы обеспечить необходимую механическую прочность, при таких больших скоростях вращения роторы выполняют без выступающих полюсов. Роторы мощных генераторов приводятся во вращение с помощью турбин. Механическая энергия турбины в генераторе преобразуется в электрическую энергию.

Для получения э. д. с., изменяющихся с частотой $800 \div 10\,000$ Гц, применяют машинные генераторы специальных конструкций или электронные генераторы. Переменные напряжения более высоких частот, которые находят применение в радиотехнике и технике связи, получают,

как правило, от электронных — ламповых или транзисторных — генераторов.

Электронный генератор содержит усилительный элемент (лампу или транзистор), колебательный контур, устройство обратной связи и источник постоянного напряжения. Как было показано в гл. 3, в контуре, состоящем из индуктивной катушки и конденсатора, при разряде конденсатора возникают затухающие колебания (при условии, что сопротивление r , характеризующее потери энергии в контуре, достаточно мало). Если к контуру периодически подводить энергию от вспомо-

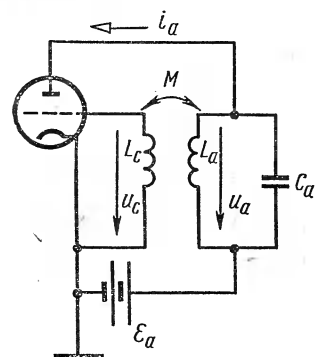


Рис. 6.4

гательного источника, компенсирующую потери энергии в сопротивлении r , то можно получить незатухающие гармонические колебания.

На рис. 6.4 показана упрощенная схема лампового генератора. В контуре $L_a C_a$, включенном в анодную цепь лампы, возникают гармонические колебания. Потери энергии в контуре (сопротивление потерь r не показано) восполняются за счет источника питания анодной цепи E_a . Чтобы периодичность поступления энергии в контур была согласована с колебаниями в контуре, анодный ток лампы i_a управляется сеточным напряжением u_c , которое, в свою очередь, пропорционально напряжению на контуре u_a . Пропорциональность напряжений u_a и u_c достигается тем, что катушки L_c и L_a , включенные в сеточную и анодную цепи лампы, имеют связь за счет общего магнитного потока, т. е. за счет взаимной индуктивности (аналогично катушкам совершенного трансформатора, рассмотренного в гл. 1). Таким образом, взаимная индуктивность M обеспечивает обратную связь между анодной и сеточной цепями лампы и необходимую периодичность поступления энергии в контур от источника постоянного напряжения.

Если к электронному генератору присоединяется нагрузка, то энергия, отбираемая в нагрузку, также восполняется за счет энергии источника $\mathcal{E}_a$. В электронном генераторе энергия источника постоянного напряжения преобразуется в энергию гармонических колебаний. Частота таких колебаний определяется параметрами L_a и C_a контура*.

§ 6.3. Гармонические токи в сопротивлении r , индуктивности L и емкости C

Гармонический ток в сопротивлении. Если к источнику гармонической э. д. с. $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi)$ присоединить сопротивление r (рис. 6.5, а), то ток в этом сопротивлении (после замыкания

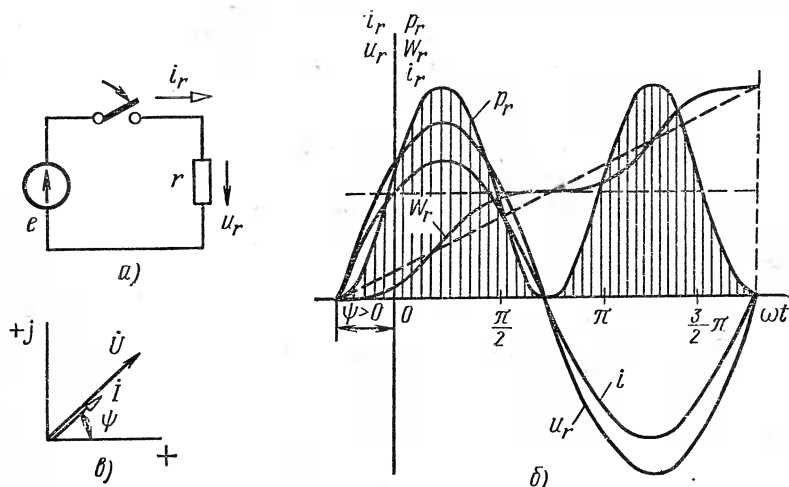


Рис. 6.5

ключа) можно определить по закону Ома: $i_r = u_r / r$. Так как напряжение на зажимах сопротивления равно э. д. с.

$$u_r = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = e,$$

где $U_m = \mathcal{E}_m$, $\psi_u = \psi$,
ток

$$i_r = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \psi_u).$$

Амплитуда тока

$$I_m = U_m / r, \quad (6.2)$$

начальная фаза

$$\psi_i = \psi_u = \psi \quad (6.3)$$

и сдвиг фаз между напряжением u_r и током i_r

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0. \quad (6.4)$$

* Более подробно работа электронного генератора рассмотрена в гл. 24.

Равенство (6.2) показывает, что амплитудные значения напряжения на сопротивлении и тока в нем связаны законом Ома. Из равенств (6.3) и (6.4) видно, что напряжение u_r и ток i_r совпадают по фазе.

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление,

$$p_r = u_r i_r = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{U_m I_m}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi)] \quad (6.5)$$

состоит из двух слагаемых: постоянной составляющей $U_m I_m / 2$ и гармонической составляющей двойной угловой частоты 2ω . Так как мгновенные значения u_r и i_r совпадают по фазе, мгновенная мощность p_r всегда положительна.

Среднее значение мощности p_r за период называют активной мощностью:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt. \quad (6.6)$$

Активную мощность можно выразить в виде

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt = \frac{1}{T} \int_0^T r i_r^2 dt = r \left(\frac{1}{T} \int_0^T i_r^2 dt \right).$$

Среднеквадратичное значение тока

$$I_r = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_r^2 dt} \quad (6.7)$$

называют действующим значением тока.

С учетом равенства (6.7) активная мощность

$$P = r I_r^2 \quad (6.8)$$

и, следовательно, действующее значение переменного тока равно значению постоянного тока, при котором в сопротивлении r выделяется такое же количество тепла за период T , как и при данном переменном токе:

$$r I_r^2 T = r \int_0^T i_r^2 dt.$$

Активную мощность можно также записать следующим образом:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt = \frac{1}{g} \left(\frac{1}{T} \int_0^T u_r^2 dt \right).$$

Среднеквадратичное значение напряжения

$$U_r = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_r^2 dt} \quad (6.9)$$

называют действующим значением напряжения. Так как

$$\frac{1}{g} U_r^2 T = \frac{1}{g} \int_0^T u_r^2 dt,$$

действующее значение переменного напряжения равно значению постоянного напряжения, при котором в проводимости g выделяется такое же количество тепла за время, равное периоду T , как и при данном переменном напряжении.

Определения активной мощности (6.6), действующих значений тока (6.7) и напряжения (6.9) справедливы для периодических напряжений и токов любой формы. Кроме того, определение (6.6) пригодно для любого двухполюсного элемента, а (6.7) и (6.9) используют соответственно для нахождения напряжения между любой парой узлов и тока любой ветви произвольной цепи с источниками переменных периодических напряжений и токов. Таким образом, в общем случае активная мощность двухполюсного элемента

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt, \quad (6.10)$$

действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \quad (6.11)$$

действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \quad (6.12)$$

Аналогично определению действующих значений тока и напряжения находят действующие значения периодических величин: э. д. с., заряда, магнитного потока и т. д.

Если ток и напряжение изменяются по гармоническому закону, то их действующие значения соответственно:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}};$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_u) dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, амплитудные значения гармонических токов и напряжений связаны с действующими значениями соотношениями $I_m = \sqrt{2} I$; $U_m = \sqrt{2} U$.

Для рассматриваемой цепи с сопротивлением r (рис. 6.5, а) активная мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt = \frac{U_m I_m}{2} = r I_r^2 = \frac{1}{g} U_r^2,$$

потребляемая энергия

$$W_r = \int_0^t p_r dt = r I_r^2 \int_0^t [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)] dt = \\ = P \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\psi_i - \frac{1}{2\omega} \sin (2\omega t + \psi_i) \right].$$

На рис. 6.5, б изображены графики величин u_r , i_r , p_r и W_r , на рис. 6.5, в построена векторная диаграмма рассматриваемой цепи — векторы $\dot{U}_r = \dot{U}_m / \sqrt{2}$ и $\dot{I}_r = I_m / \sqrt{2}$, соответствующие гар-

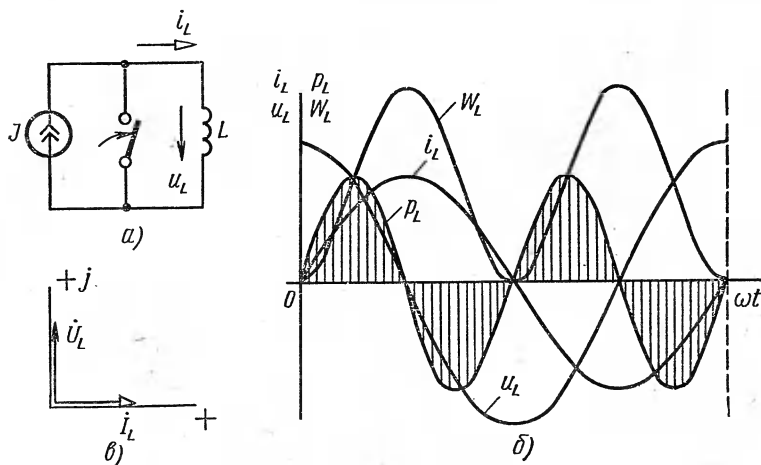


Рис. 6.6

моническим функциям u_r и i_r *. Аналогично можно проанализировать режим в цепи с сопротивлением и источником гармонического тока.

Гармонический ток в индуктивности. Пусть индуктивность L в момент времени $t=0$ присоединяется к источнику гармонического тока $J = J_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 6.6, а), причем начальная фаза тока источника $\psi=0$. При разомкнутом ключе ток в индуктивности равен току источника:

$$i_L = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где $I_m = J_m$, $\psi_i = \psi$; в момент включения $i_L(0) = I_m \sin \psi_i = 0$.

* Как правило, на векторных диаграммах изображаются не векторы $\dot{U}_m$ и $\dot{I}_m$, а пропорциональные им векторы $\dot{U}$ и $\dot{I}$; при этом для получения мгновенных значений u и i проекций векторов на мнимую ось умножаются на $\sqrt{2}$.

Поскольку напряжение u_L и ток i_L связаны соотношением $u_L = L di_L/dt$ (см. гл. 1), напряжение

$$u_L = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплитуда напряжения

$$U_m = x_L I_m, \quad (6.13)$$

где $x_L = \omega L$ — величина, называемая индуктивным сопротивлением и имеющая размерность сопротивления. Начальная фаза напряжения

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}, \quad (6.14)$$

сдвиг фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}. \quad (6.15)$$

Равенство (6.13) показывает, что амплитуды напряжения и тока связаны соотношением, аналогичным закону Ома. Из равенств (6.14) и (6.15) видно, что напряжение u_L опережает по фазе ток i_L на угол $\varphi = \pi/2$ (или, наоборот, ток i_L отстает по фазе от напряжения u_L на угол $\varphi = \pi/2$).

Мгновенная мощность

$$p_L = u_L i_L = U_m I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \sin \omega t = U_L I_L \sin 2\omega t = \omega L I_L^2 \sin 2\omega t,$$

где $U_L = U_m/\sqrt{2}$, $I_L = I_m/\sqrt{2}$, изменяется по гармоническому закону с двойной частотой 2ω . Активная мощность P равна нулю.

Энергия, связанная с магнитным полем индуктивности,

$$W_L = \int_0^t p_L dt = \frac{U_L I_L}{2\omega} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{L I_L^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{L I_L^2}{2}.$$

Энергия W_L имеет пульсирующий характер и через каждую половину периода основной частоты ω уменьшается до нуля. Это значит, что в цепи происходит обмен энергии между источником и индуктивностью: в течение каждого полупериода основной частоты энергия, запасенная в магнитном поле, связанном с индуктивностью, возвращается источнику.

Произведение действующих значений напряжения и тока

$$Q_L = U_L I_L$$

имеет размерность мощности и называется реактивной мощностью индуктивности. Реактивная мощность измеряется в вольт-амперах реактивных (вар). Нетрудно убедиться, что Q_L равна умноженному на 2ω среднему значению энергии, связанной с магнитным полем индуктивности, или максимальному значению мгновенной мощности p_L .

На рис. 6.6, б приведены графики величин u_L , i_L , p_L и W_L , на рис. 6.6, в построена векторная диаграмма рассматриваемой цепи. На рис. 6.7 изображены зависимости индуктивного сопротивления x_L и его обратной величины $b_L = 1/x_L$, называемой индуктивной проводимостью, от частоты. Индуктивное сопротивление пропорционально, а индуктивная проводимость обратно пропорциональна частоте ω .

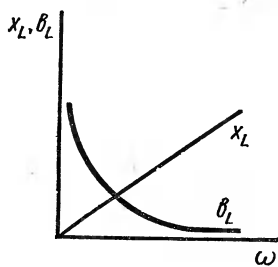
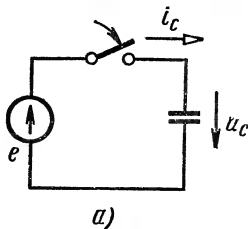


Рис. 6.7

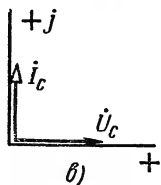
Гармонический ток в емкости. Пусть емкость C в момент времени $t=0$ присоединяется к источнику гармонической э. д. с. $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 6.8, а), причем начальная фаза э. д. с. $\psi = 0$. При замкнутом ключе напряжение на емкости

$$u_C = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

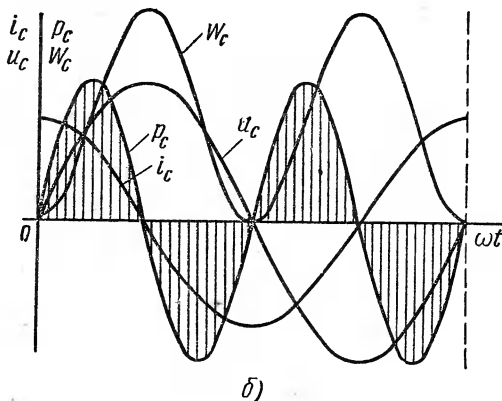
где $U_m = \mathcal{E}_m$, $\psi_u = \psi$;



а)



б)



в)

Рис. 6.8

в момент включения

$$u_C(0) = U_m \sin \psi_u = 0.$$

Поскольку ток i_C и напряжение u_C связаны соотношением $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ (см. гл. 1), ток

$$i_C = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплитуда тока

$$I_m = b_C U_m, \quad (6.16)$$

где $b_C = \omega C$ — величина, имеющая размерность проводимости и называемая емкостной проводимостью. Начальная фаза

тока

$$\psi_i = \psi_u + (\pi/2), \quad (6.17)$$

сдвиг фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2. \quad (6.18)$$

Равенство (6.16) показывает, что амплитуды тока и напряжения связаны соотношением, аналогичным закону Ома. Из равенств (6.17) и (6.18) очевидно, что ток i_c опережает напряжение u_c по фазе на угол $-\varphi = \pi/2$ (или, наоборот, напряжение u_c отстает от тока i_c на угол $-\varphi = \pi/2$).

Мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p_c &= u_c i_c = U_m I_m \sin \omega t \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= U_c I_c \sin 2\omega t = \omega C U_c^2 \sin 2\omega t, \end{aligned}$$

где

$$U_c = U_m / \sqrt{2}; \quad I_c = I_m / \sqrt{2},$$

изменяется по гармоническому закону с двойной частотой 2ω . Активная мощность P за период равна нулю.

Энергия, связанная с электрическим полем емкости,

$$W_c = \int_0^t p_c dt = \frac{U_c I_c}{2\omega} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{C U_c^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{C u_c^2}{2}.$$

Как и в цепи с индуктивностью, в цепи с емкостью происходит обмен энергии между источником и емкостью.

Произведение действующих значений напряжения и тока

$$Q_c = U_c I_c$$

определяет реактивную мощность емкости $Q = -Q_c$. Величина Q_c равна умноженному на 2ω среднему значению энергии, связанной с электрическим полем емкости, или максимальному значению мгновенной мощности p_c .

На рис. 6.8, б изображены графики величин u_c , i_c , p_c и W_c , на рис. 6.8, в построена векторная диаграмма рассматриваемой цепи. На рис. 6.9 приведены зависимости емкостной проводимости b_c и ее обратной величины $x_c = 1/b_c$, называемой емкостным сопротивлением.

Емкостная проводимость пропорциональна, а емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте ω .

Следует отметить, что цепи на рис. 6.6, а и 6.8, а являются дуальными. Временные зависимости дуальных величин i_L и u_c , а также u_L и i_c идентичны. Индуктивному сопротивлению $x_L = \omega L$ (индуктивной проводимости $b_L = 1/\omega L$) соответствует дуаль-

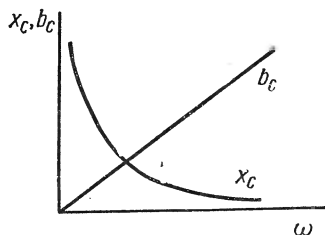


Рис. 6.9

ная величина — емкостная проводимость $b_C = \omega C$ (емкостное сопротивление $x_C = 1/\omega C$). Частотные характеристики дуальных величин x_L и b_C , а также b_L и x_C одинаковы.

§ 6.4. Цепь с сопротивлением r и индуктивностью L

Последовательная цепь. Пусть rL -цепь подключается к источнику гармонической э. д. с. $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 6.10). Для этой цепи справедливо дифференциальное уравнение

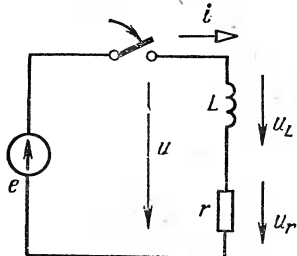


Рис. 6.10

$$L \frac{di}{dt} + ri = e$$

или

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{\mathcal{E}_m}{r} \sin(\omega t + \psi), \quad (6.19)$$

где $\tau = L/r$.

Уравнение (6.19) отличается от уравнения (3.1) только правой частью. Решение этого уравнения, так же как и уравнения (3.1), может быть записано в виде суммы свободной и принужденной составляющих: $i = i_{\text{св}} + i_{\text{пр}}$.

Так как $i_{\text{св}}$ представляет собой общее решение однородного уравнения, т. е. уравнения (3.2), то $i_{\text{св}} = Ae^{-t/\tau}$, как и при подключении rL -цепи к источнику постоянной э. д. с.

Принужденная составляющая тока $i_{\text{пр}}$ является частным решением уравнения

$$\tau \frac{di_{\text{пр}}}{dt} + i_{\text{пр}} = \frac{\mathcal{E}_m}{r} \sin(\omega t + \psi). \quad (6.20)$$

При гармоническом возмущающем воздействии частное решение следует искать в виде гармонической функции

$$i_{\text{пр}} = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (6.21)$$

Подставляя выражение (6.21) в уравнение (6.20), можно получить соотношение для определения неизвестной амплитуды I_m и начальной фазы ψ_i принужденной составляющей:

$$\omega \tau I_m \cos(\omega t + \psi_i) + I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{\mathcal{E}_m}{r} \sin(\omega t + \psi)$$

или

$$I_m [\omega L \cos(\omega t + \psi_i) + r \sin(\omega t + \psi_i)] = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi).$$

Сумму гармонических функций $\omega L \cos(\omega t + \psi_i)$ и $r \sin(\omega t + \psi_i)$, сдвинутых по фазе на четверть периода, можно заменить одной гармонической функцией:

$$\omega L \cos(\omega t + \psi_i) + r \sin(\omega t + \psi_i) = z \sin(\omega t + \psi_i + \varphi),$$

где

$$z = \sqrt{(\omega L)^2 + r^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}.$$

Таким образом,

$$zI_m \sin(\omega t + \psi_i + \varphi) = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi),$$

откуда $I_m = \mathcal{E}_m / z$, $\psi_i = \psi - \varphi$.

Выражение для тока i имеет вид

$$i = A e^{-t/\tau} + I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (6.22)$$

Постоянная интегрирования определяется из условия

$$i(0) = A + I_m \sin \psi_i = 0,$$

т. е.

$$A = -I_m \sin \psi_i = -(\mathcal{E}_m / z) \sin(\psi - \varphi).$$

Окончательно выражение для тока можно записать следующим образом:

$$i = -(\mathcal{E}_m / z) \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} + (\mathcal{E}_m / z) \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (6.23)$$

Первое слагаемое равенства (6.23) определяет экспоненциальную свободную составляющую, затухающую с течением времени, а второе — гармоническую принужденную составляющую. На рис. 6.11 показаны графики функций $i_{св}$, $i_{пр}$, i для случая $0 < \psi - \varphi < \pi/2$.

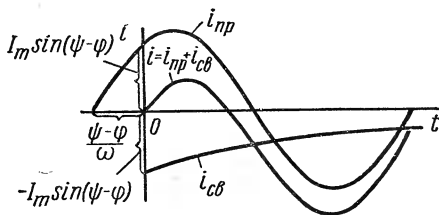


Рис. 6.11

Следует отметить, что величины ординат свободной составляющей зависят от начальной фазы э. д. с. ψ . Если $\psi = \varphi = \arctg(\omega L / r)$, то $i_{св} = 0$, т. е. в цепи сразу устанавливается принужденный режим. Если $\psi = \varphi \pm (\pi/2)$, то начальное значение свободной составляющей по величине равно амплитуде принужденной составляющей. В этом случае в цепи с большой постоянной времени максимальное значение тока переходного процесса может достигнуть значения, близкого $2I_m$.

Зная выражение для тока (6.23), можно получить выражения для напряжений:

$$u_r = ri = \frac{r}{z} \mathcal{E}_m [-\sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} + \sin(\omega t + \psi + \varphi)]; \quad (6.24)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}_m}{z} \left[r \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} + \omega L \sin\left(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (6.25)$$

Сумма напряжений u_r и u_L равна э. д. с. e . По истечении времени $t > (4 \div 5)\tau$ после замыкания ключа в цепи практически наступает принужденный (установившийся) режим. Этот режим необходимо рассмотреть более подробно. При установившемся

режиме

$$i = \frac{\mathcal{E}_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

$$u_r = \frac{r}{z} \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

$$u_L = \frac{x_L}{z} \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ток установившегося режима отстает по фазе от напряжения $u=e$ на угол φ . Напряжение на сопротивлении r совпадает по фазе с током, а напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\pi/2$. На рис. 6.12 построены кривые i , u_r , u_L , $u=e$ установившегося режима, а на рис. 6.13 дана векторная диаграмма для рассматриваемой цепи.

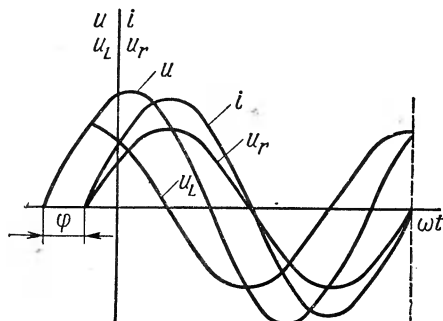


Рис. 6.12

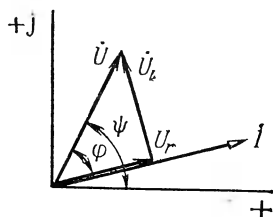


Рис. 6.13

мой цепи. Вектор $\dot{U} = \dot{E}$ равен сумме векторов $\dot{U}_r$ и $\dot{U}_L$, так как $u = u_r + u_L$. Из векторной диаграммы легко установить соотношения между действующими значениями напряжений: $U_r = U \cos \varphi$, $U_L = U \sin \varphi$.

Сдвиг фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi - \psi_i$ между током i и напряжением $u=e$ зависит от соотношения между активным сопротивлением r и индуктивным сопротивлением x_L :

$$0 \leq \varphi = \arctg \frac{x_L}{r} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Величину $z = \sqrt{r^2 + x_L^2}$ называют полным сопротивлением рассматриваемой цепи. С помощью сопротивления z связь между амплитудами напряжения $U_m = \mathcal{E}_m$ и тока I_m установившегося режима выражается аналогично закону Ома: $I_m = U_m/z$.

Так как $\varphi = \arctg \frac{x_L}{r}$, $r = z \cos \varphi$, $x_L = z \sin \varphi$.

При установившемся режиме активная мощность

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \sin(\omega t + \psi - \varphi) \, dt = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \end{aligned}$$

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi,$$

полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI.$$

Мощность, рассеиваемая в сопротивлении r ,

$$P_r = U_r I = r I^2 = UI \cos \varphi = P,$$

т. е. вся активная мощность, потребляемая цепью, рассеивается в сопротивлении. Реактивная мощность индуктивности

$$Q_L = U_L I = x_L I^2 = UI \sin \varphi = Q.$$

Параллельная цепь. Если к источнику гармонического тока $J(t) = J_m \sin(\omega t + \psi)$ подключается сопротивление r и индуктивность L (рис. 6.14), то при разомкнутом ключе справедливо уравнение

$$i_r + i_L = \frac{u}{r} + \frac{1}{L} \int u dt = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем

$$\tau \frac{du}{dt} + u = x_L J_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.26)$$

Уравнение (6.26) аналогично уравнению (6.19), поэтому для напряжения u можно сразу записать выражение, аналогичное (6.22):

$$u = A e^{-t/\tau} + U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (6.27)$$

где $U_m = \frac{r x_L}{z} J_m$; $\psi_u = \psi + \frac{\pi}{2} - \delta$ ($\delta = \arctg x_L/r$). Если сопротивления r и x_L заменить их обратными величинами g и b_L , то

$$U_m = J_m/y; \quad \psi_u = \psi + \varphi,$$

где $y = \sqrt{g^2 + b_L^2}$; $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta = \arctg b_L/g$.

Так как в момент размыкания ключа $i_L(0) = 0$, напряжение

$$u(0) = rJ(0) + rJ_m \sin \psi.$$

Следовательно, постоянная интегрирования A определяется из условия

$$u(0) = A + U_m \sin \psi_u = rJ_m \sin \psi,$$

откуда $A = rJ_m \sin \psi - U_m \sin \psi_u$. Окончательное выражение для напряжения имеет вид

$$u = \left[\frac{J_m}{g} \sin \psi - \frac{J_m}{y} \sin(\psi + \varphi) \right] e^{-t/\tau} + \frac{J_m}{y} \sin(\omega t + \psi + \varphi). \quad (6.28)$$

Экспоненциальная составляющая в правой части (6.28) представляет собой свободное напряжение $u_{св}$, а гармоническая — при-

нужденное напряжение u_{np} . На рис. 6.15 показаны графики функций $u_{св}$, u_{np} , u для случая $\psi = 0$, $0 < \varphi < \pi/2$.

Ток в сопротивлении

$$i_r = gu = \left[J_m \sin \psi - \frac{g}{y} J_m \sin(\psi + \varphi) \right] e^{-t/\tau} + \frac{g}{y} J_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad (6.29)$$

ТОК В ИНДУКТИВНОСТИ

$$i_L = \frac{1}{L} \int u dt = \left[\frac{g}{y} J_m \sin(\psi + \varphi) - J_m \sin \psi \right] e^{-t/\tau} + \frac{b_L}{y} \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.30)$$

При определении тока i_L постоянная интегрирования принята равной нулю, так как в данном случае ток i_L не может содержать постоянной составляющей. Выражение (6.30) удовлетворяет условию $i_L(0) = 0$ и $i_r + i_L = J(t)$. Ток i_L может быть найден и как разность $J(t) - i_r$.

При установившемся режиме токи i_r , i_L и напряжение u не

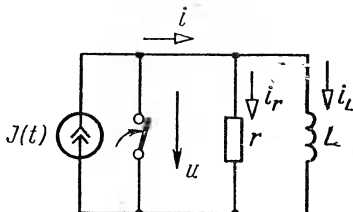


Рис. 6.14

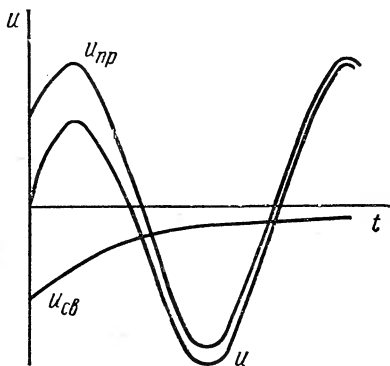


Рис. 6.15

содержат свободных составляющих. Для такого режима справедливы выражения:

$$u = \frac{J_m}{y} \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.31)$$

$$i_r = \frac{g}{y} J_m \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.32)$$

$$i_L = \frac{b_L}{y} J_m \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.33)$$

Напряжение при установившемся режиме u опережает ток в неразветвленной цепи $i = J(t)$ на угол $\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - \psi$, который зависит от соотношения между активной (g) и индуктивной (b_L) проводимостями:

$$0 \leq \varphi = \arctg b_L/g \leq \pi/2.$$

Ток i_r совпадает по фазе с напряжением u , а ток i_L отстает от напряжения u на угол $\pi/2$. На рис. 6.16 приведены зави-

симости u , i_r , i_L , $i = J$ от времени в принужденном режиме, а на рис. 6.17 показана векторная диаграмма рассматриваемой цепи. Вектор $\vec{I} = \vec{J}$ равен сумме векторов $\vec{I}_r$ и $\vec{I}_L$, так как $i = i_r + i_L$. Из векторной диаграммы легко установить соотношения между действующими значениями токов: $I_r = I \cos \varphi$; $I_L = I \sin \varphi$.

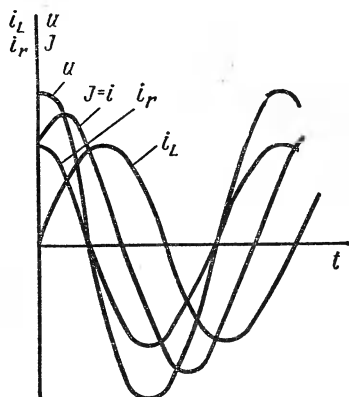


Рис. 6.16

Величину $y = \sqrt{g^2 + b_L^2}$ называют полной проводимостью рассматриваемой цепи. С помощью проводимости y

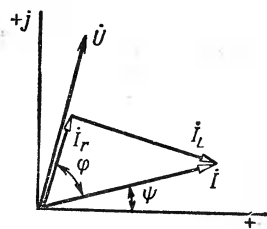


Рис. 6.17

связь между амплитудами напряжения U_m и тока $I_m = J_m$ выражается аналогично закону Ома: $U_m = I_m/y$. Так как $\varphi = \arctg \frac{b_L}{g}$; $g = y \cos \varphi$; $b_L = y \sin \varphi$.

При установившемся режиме активная мощность, потребляемая цепью:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \sin(\omega t + \psi + \varphi) \, dt = \\ = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi;$$

реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi;$$

полная мощность

$$S = UI.$$

Мощность, рассеиваемая в сопротивлении,

$$P_r = UI_r = gU^2 = UI \cos \varphi = P,$$

реактивная мощность индуктивности

$$Q_L = UI_L = b_L U^2 = UI \sin \varphi = Q.$$

§ 6.5. Цепи с сопротивлением r и емкостью C

Последовательная цепь. На рис. 6.18 изображена последовательная rC -цепь, подключаемая к источнику э. д. с. Эта цепь дуальна цепи на рис. 6.14, поэтому выражения для тока i , на-

пряжений u_r , u_c получаются соответственно из выражений (6.28)—(6.30), если величины J_m , g , L заменить дуальными величинами $\mathcal{E}_m$, r , C . При этом индуктивная проводимость $b_L = 1/\omega L$ заменяется емкостным сопротивлением $x_C = 1/\omega C$, полная проводимость $y = \sqrt{g^2 + b_L^2}$ — сопротивлением $z = \sqrt{r^2 + x_C^2}$, постоянная времени $\tau = L/r = gL$ — постоянной времени $\tau = rC$. Угол $\varphi = \arctg(b_L/g)$ в выражениях (6.28)—(6.30) должен быть заменен

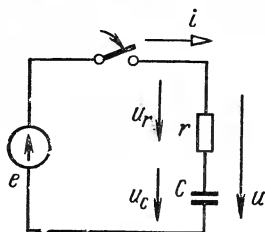


Рис. 6.18

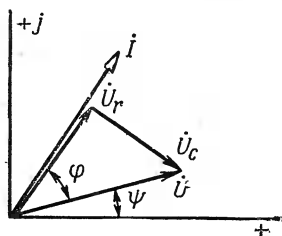


Рис. 6.19

углом $-\varphi = \arctg(x_C/r)$. Учитывая сказанное, для тока i , напряжений u_r и u_c схемы на рис. 6.18 при переходном режиме справедливы выражения *:

$$i = \left[\frac{\mathcal{E}_m}{r} \sin \psi - \frac{\mathcal{E}_m}{z} \sin(\psi - \varphi) \right] e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi); \quad (6.34)$$

$$u_r = \left[\mathcal{E}_m \sin \psi - \frac{r}{z} \mathcal{E}_m \sin(\psi - \varphi) \right] e^{-t/\tau} + \frac{r}{z} \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (6.35)$$

$$u_c = \left[\frac{r}{z} \mathcal{E}_m \sin(\psi - \varphi) - \mathcal{E}_m \sin \psi \right] e^{-t/\tau} + \frac{x_C}{z} \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.36)$$

Графики функций $i_{св}$, $i_{пр}$, i аналогичны соответствующим графикам на рис. 6.15.

При установившемся режиме выражения (6.34) ÷ (6.36) принимают вид:

$$i = \frac{\mathcal{E}_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi); \quad (6.37)$$

$$u_r = \frac{r}{z} \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi - \varphi); \quad (6.38)$$

$$u_c = \frac{x_C}{z} \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.39)$$

В данном случае ток i опережает напряжение $u = e$ на угол $-\varphi$. Угол φ , равный разности начальных фаз напряжения и тока ($\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi - \psi_i$), отрицателен и зависит от соотношения

* Выражение для u_c удовлетворяет начальному условию $u_c(0) = 0$.

между сопротивлением r и емкостным сопротивлением x_C :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi = -\arctg \frac{x_C}{r} \leq 0.$$

Напряжение u_r совпадает по фазе с током, а напряжение u_C отстает от тока на угол $\pi/2$. Зависимости i , u_r , u_C , $u = e$ от времени в установившемся режиме аналогичны соответственно зависимостям u , i_r , u_L , i , приведенным на рис. 6.16. На рис. 6.19 построена векторная диаграмма рассматриваемой цепи. Вектор $\dot{U} = \dot{E}$ равен сумме векторов $\dot{U}_r$ и $\dot{U}_C$. Из векторной диаграммы видно, что $U_r = U \cos \varphi$, $U_C = -U \sin \varphi$ ($\varphi < 0$).

Сравнивая векторные диаграммы двух дуальных цепей (рис. 6.17 и 6.19), необходимо отметить следующее. В rL -цепи ток i отстает по фазе от напряжения u на угол $\varphi = \psi_u - \psi_i > 0$, который на векторной диаграмме отсчитывается от вектора тока $\dot{I}$ к вектору напряжения $\dot{U}$ в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. В rC -цепи ток i опережает напряжение u на угол $-\varphi$; угол $\varphi = \psi_u - \psi_i$ отрицателен и на векторной диаграмме отсчитывается от вектора тока $\dot{I}$ к вектору напряжения $\dot{U}$ по направлению движения часовой стрелки. Таким образом, току, отстающему (опережающему) по фазе от напряжения, соответствует положительный (отрицательный) сдвиг фаз: $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Величину $z = \sqrt{r^2 + x_C^2}$ называют полным сопротивлением цепи. Амплитуда напряжения $U_m = \mathcal{E}_m$ связана с амплитудой тока I_m соотношением, аналогичным закону Ома: $U_m = z I_m$. Так как $\varphi = -\arctg x_C/r$, $r = z \cos \varphi$ и $x_C = -z \sin \varphi$. При установившемся режиме активная мощность, потребляемая цепью,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \sin(\omega t + \psi - \varphi) \, dt = \\ = U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi,$$

полная мощность

$$S = UI.$$

Мощность, рассеиваемая в сопротивлении,

$$P_r = IU_r = r I^2 = UI \cos \varphi = P,$$

реактивная мощность в емкости

$$Q_C = IU_C = x_C I^2 = -UI \sin \varphi = -Q.$$

Параллельная цепь. На рис. 6.20 показана параллельная rC -цепь, подключаемая к источнику тока $J(t) = J_m \sin(\omega t + \psi)$. Эта цепь дуальна последовательной rL -цепи (рис. 6.10), поэтому выражения для напряжения u , токов i_r и i_C (рис. 6.20) полу-

чаются соответственно из выражений (6.22) ÷ (6.25) путем замены $\mathcal{E}_m$, r , L на дуальные величины J_m , g , C . При этом индуктивное сопротивление $x_L = \omega L$ заменяют емкостной проводимостью $b_C = \omega C$, полное сопротивление $z = \sqrt{r^2 + x_L^2}$ — полной проводимостью $y = \sqrt{g^2 + b_C^2}$, постоянную времени $\tau = L/r$ — постоянной времени $\tau = Cr$, угол $\varphi = \arctg(x_L/r)$ — углом $-\varphi = \arctg(b_C/g)$. Таким образом, для напряжения u , токов i_r , i_C в переходном режиме справедливы выражения*:

$$u = -\frac{J_m}{y} \sin(\psi + \varphi) e^{-t/\tau} + \frac{J_m}{y} \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.40)$$

$$i_r = -\frac{g}{y} J_m \sin(\psi + \varphi) e^{-t/\tau} + \frac{g}{y} J_m \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.41)$$

$$i_C = \frac{g}{y} J_m \sin(\psi + \varphi) e^{-t/\tau} + \frac{b_C}{y} J_m \sin\left(\omega t + \psi + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.42)$$

Графики функций $u_{св}$, $u_{пр}$, u аналогичны соответственно графикам $i_{св}$, $i_{пр}$, i на рис. 6.11.

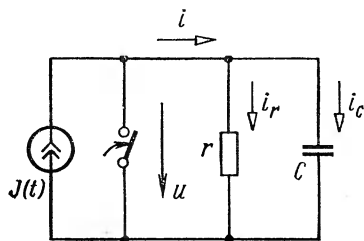


Рис. 6.20

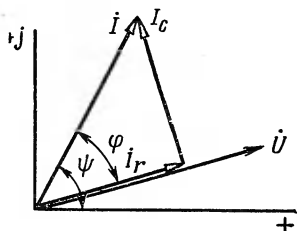


Рис. 6.21

При установившемся режиме выражения (6.40) ÷ (6.42) принимают вид:

$$u = \frac{J_m}{y} \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.43)$$

$$i_r = \frac{g}{y} J_m \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.44)$$

$$i_C = \frac{b_C}{y} J_m \sin\left(\omega t + \psi + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.45)$$

В данном случае сдвиг фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - \psi$ отрицателен и зависит от соотношения между активной проводимостью g и емкостной проводимостью b_C :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi = -\arctg \frac{b_C}{g} \leq 0.$$

Ток i_r совпадает по фазе с напряжением u , а ток i_C опережает напряжение u на угол $\pi/2$.

* Выражение для u удовлетворяет начальному условию $u(0) = 0$.

На рис. 6.21 построена векторная диаграмма рассматриваемой цепи. Вектор $\vec{I} = \vec{j}$ равен сумме векторов $\vec{I}_r$ и $\vec{I}_c$. Из векторной диаграммы видно, что $I_r = I \cos \varphi$, $I_c = -I \sin \varphi$ ($\varphi < 0$).

Величину $y = \sqrt{g^2 + b_c^2}$ называют полной проводимостью цепи (см. рис. 6.20). Амплитуды тока $I_m = J_m$ и напряжения U_m связаны соотношением, аналогичным закону Ома: $I_m = y U_m$. Так как $\varphi = -\arctg(b_c/g)$, $g = y \cos \varphi$, $b_c = -y \sin \varphi$.

При установившемся режиме активная мощность, потребляемая цепью,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi) \sin(\omega t + \psi) \, dt = \\ = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi,$$

полная мощность

$$S = UI.$$

Активная мощность, рассеиваемая в сопротивлении,

$$P_r = UI_r = g U^2 = UI \cos \varphi = P.$$

Реактивная мощность в емкости

$$Q_c = UI_c = b_c U^2 = -UI \sin \varphi = -Q.$$

§ 6.6. Цепь с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C

Последовательная цепь. Для цепи на рис. 6.22, подключаемой к источнику э. д. с. с $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi)$, справедливо уравнение, аналогичное (3.24):

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int i \, dt = e. \quad (6.46)$$

Дифференцируя обе части уравнения (6.46) по времени t , можно получить

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.47)$$

или

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.48)$$

где $2\alpha = r/L$; $\omega_0^2 = 1/LC$.

Решение уравнений (6.47) и (6.48) может быть представлено как сумма свободной и принужденной составляющих $i = i_{св} + i_{пр}$. В зависимости от значений корней характеристического уравнения выражение для свободной составляющей записывают по-раз-

ному (см. § 3.5; 3.8). При гармоническом возмущающем воздействии принужденную составляющую следует искать в виде гармонической функции (6.21). Подстановка выражения (6.21) в (6.47) приводит к соотношению

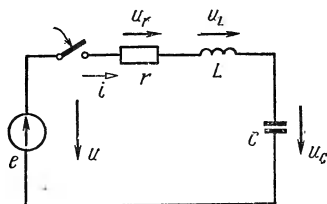


Рис. 6.22

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 L I_m \sin(\omega t + \psi_i) + r \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) + \frac{1}{C} I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\
 & = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \psi)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & I_m [x \sin(\omega t + \psi_i) - r \cos(\omega t + \psi_i)] = \\
 & = \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right),
 \end{aligned}$$

где $x = \omega L - 1/\omega C$. Заменяя сумму гармонических функций одной функцией:

$$x \sin(\omega t + \psi_i) - r \cos(\omega t + \psi_i) = z \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

где $z = \sqrt{r^2 + x^2}$, $\varphi = \arctg(x/r)$, можно получить равенство для определения амплитуды I_m и начальной фазы φ тока:

$$I_m z \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда $I_m = \mathcal{E}_m/z$; $\psi_i = \psi - \varphi$.

Таким образом,

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) = \frac{\mathcal{E}_m}{z} \sin\left(\omega t + \psi - \arctg \frac{x}{r}\right). \quad (6.49)$$

Пусть p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения (3.26). Тогда решение уравнения (6.48) имеет вид

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

производная тока

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + \omega I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi).$$

При нулевых начальных условиях $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$ для определения постоянных интегрирования следует использовать равенства

$$i(0) = i_{св}(0) + i_{np}(0) = 0;$$

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + r i(0) + u_C(0) = e(0)$$

или

$$A_1 + A_2 + I_m \sin(\psi - \varphi) = 0; \quad (6.50)$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 + \omega I_m \cos(\psi - \varphi) = (\mathcal{E}_m \sin \psi)/L. \quad (6.51)$$

Уравнение (6.51) целесообразно преобразовать. Так как $\varphi = \arctg(x/r)$ и $r = z \cos \varphi$, $x = z \sin \varphi$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}_m \sin \psi = I_m z \sin[(\psi - \varphi) + \varphi] = I_m z [\sin(\psi - \varphi) \cos \varphi + \\
 & + \cos(\psi - \varphi) \sin \varphi] = I_m [r \sin(\psi - \varphi) + x \cos(\psi - \varphi)].
 \end{aligned}$$

Подставляя вместо x разность $\omega L - \frac{1}{\omega C}$, можно найти

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_m \sin \psi}{L} &= I_m \left[\frac{r}{L} \sin(\psi - \varphi) + \omega \cos(\psi - \varphi) - \frac{1}{LC\omega} \cos(\psi - \varphi) \right] = \\ &= I_m \left[2\alpha \sin(\psi - \varphi) + \omega \cos(\psi - \varphi) - \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi) \right].\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (6.51) принимает вид

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = I_m \left[2\alpha \sin(\psi - \varphi) - \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi) \right]. \quad (6.52)$$

Совместное решение уравнений (6.50) и (6.52) с учетом равенства $p_1 + p_2 = -2\alpha$ дает значения постоянных:

$$A_1 = -\frac{I_m}{p_1 - p_2} \left[p_1 \sin(\psi - \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi) \right]; \quad (6.53)$$

$$A_2 = \frac{I_m}{p_1 - p_2} \left[p_2 \sin(\psi - \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi) \right]. \quad (6.54)$$

Общее выражение для тока i записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}i &= -\frac{I_m}{p_1 - p_2} \left[p_1 \sin(\psi - \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi) \right] e^{p_1 t} + \\ &+ \frac{I_m}{p_1 - p_2} \left[p_2 \sin(\psi - \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi) \right] e^{p_2 t} + \\ &+ I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)\end{aligned} \quad (6.55a)$$

или

$$\begin{aligned}i &= -I_m \frac{\sin(\psi - \varphi)}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) - I_m \frac{\omega_0^2 \cos(\psi - \varphi)}{\omega (p_1 - p_2)} \times \\ &\times (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) + I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).\end{aligned} \quad (6.55b)$$

Зная выражение для тока, нетрудно получить выражения для напряжений $u_r = ri$; $u_L = L \frac{di}{dt}$; $u_C = \int i dt / C$.

Апериодический свободный процесс. Если параметры цепи таковы, что корни характеристического уравнения отрицательны, вещественны и различны, то, согласно выражению (6.55a), свободная составляющая тока содержит две экспоненциальных функции, начальные значения которых зависят от начальной фазы ψ .

На рис. 6.23 показаны возможные графики тока i и его составляющих при $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ и $|p_1| > |p_2|$.

В частном случае, когда $p_1 = p_2 = -\alpha$, выражение для тока определяют как предел функции (6.55a) при $p_2 \rightarrow p_1$ (см. § 3.5):

$$\begin{aligned}i &= -I_m \left\{ \sin(\psi - \varphi) + \left[\frac{\omega_0^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi) - \alpha \sin(\psi - \varphi) \right] t \right\} e^{-\alpha t} + \\ &+ I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).\end{aligned} \quad (6.56)$$

Колебательный свободный процесс. Пусть корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{\text{св}},$$

где частота свободных колебаний $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота контура).

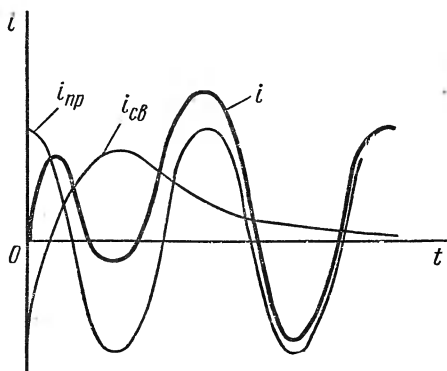


Рис. 6.23

При комплексно-сопряженных корнях справедливы выражения

$$\frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} = \frac{\omega_0}{\omega_{св}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t + \varphi_{св});$$

$$\frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} = \frac{1}{\omega_{св}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{св} t;$$

$$0 < \arctg \frac{\omega_{св}}{\alpha} \leq \frac{\pi}{2},$$

где $\varphi_{св} = \pi - \arctg \omega_{св}/\alpha$.

С учетом записанных равенств выражение (6.556) принимает вид

$$i = -I_m \frac{\omega_0}{\omega_{св}} \left[\sin(\psi - \varphi) \sin(\omega_{св} t + \varphi_{св}) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0}{\omega} \cos(\psi - \varphi) \sin \omega_{св} t \right] e^{-\alpha t} + I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (6.57)$$

Свободные колебания представляют собой сумму двух гармонических функций частоты $\omega_{св}$ (т. е. гармоническую функцию), умноженную на затухающую экспоненциальную функцию. Свободные колебания складываются с принужденными колебаниями — гармонической функцией частоты ω . На рис. 6.24 даны графики тока и его составляющих для $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$, $\omega_{св} > \omega$.

Рассмотрим подробнее колебательные процессы в цепи с малыми потерями, т. е. при $\alpha \ll \omega_0$, $\omega_{св} \approx \omega_0$.

Если частота внешнего возмущающего воздействия $\omega \ll \omega_0$ и начальная фаза $\psi = \varphi$, то из выражения (6.57)

$$i = -I_m \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t + I_m \sin \omega t. \quad (6.58)$$

Поскольку потери в контуре малы, свободная составляющая тока затухает медленно; если t достаточно мало, то $e^{-\alpha t} \approx 1$.

Максимальное значение тока при переходном процессе из выражения (6.58)

$$i_{\max} \approx I_m \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right),$$

т. е. во много раз превышает амплитуду установившегося тока.

Полагая для малых значений t в формуле (6.58) $e^{-\alpha t} \approx 1$, получаем выражение для напряжения на емкости

$$u_C \approx U_{Cm} \cos \omega_0 t - U_{Cm} \cos \omega t,$$

где $U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_m$ — амплитуда напряжения на емкости при установившемся режиме. Максимальное значение напряжения на емкости $u_{C \max} \approx 2U_{Cm}$.

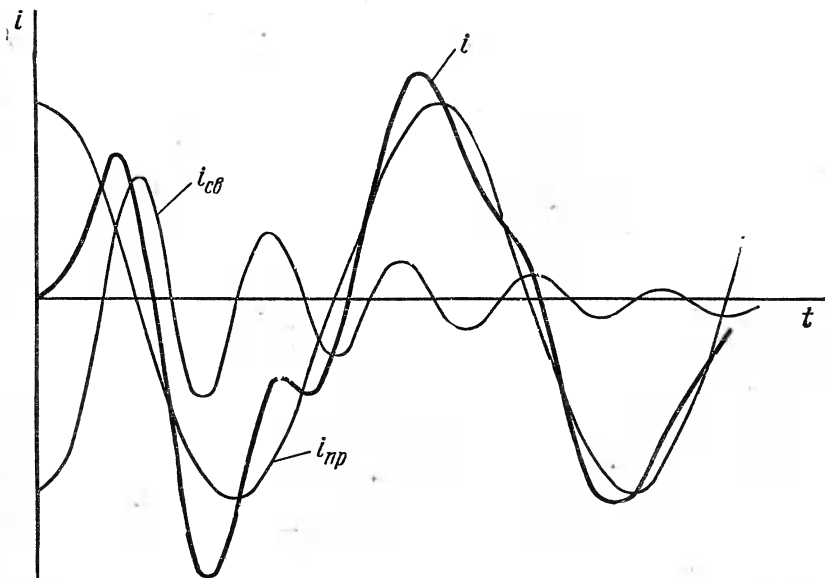


Рис. 6.24

Аналогично рассматривается случай, когда $\psi = \varphi + \pi$. Пусть частота $\omega \gg \omega_0$ и $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$. При этом из выражения (6.57)

$$i = -I_m e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t + I_m \cos \omega t, \quad (6.59)$$

так как при $\alpha \rightarrow 0$ $\arctg \omega_{CB}/\alpha \approx \pi/2$, $\varphi_{CB} = \pi/2$.

Максимальное значение тока в переходном процессе $i_{\max} \approx \approx 2I_m$. Напряжение на емкости при $e^{-\alpha t} \approx 1$

$$u_C \approx -\frac{\omega}{\omega_0} U_{Cm} \sin \omega_0 t + U_{Cm} \sin \omega t.$$

Максимальное значение напряжения на емкости

$$u_{C \max} \approx \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0} \right) U_{Cm},$$

т. е. значительно превышает амплитуду установившегося напряжения.

Аналогично анализируется случай, когда $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Пусть частоты ω и ω_0 близки по величине, но не равны друг другу. Полагая в равенстве (6.57) $\omega_0/\omega_{св} \approx 1$, $\omega_0/\omega \approx 1$ и $\varphi_{св} \approx \pi/2$, находим

$$i = I_m e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi - \varphi) + I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (6.60)$$

Если $e^{-\alpha t} \approx 1$, то ток

$$i = 2I_m \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \cos \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t + \psi - \varphi \right). \quad (6.61)$$

Уравнение (6.61) описывает колебания, которые представляют собой сумму двух гармонических функций близких частот и называются биениями.

Биения можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой $(\omega + \omega_0)/2$, амплитуда которого изменяется сравнительно медленно по закону

$$2I_m |\sin(\omega - \omega_0)t/2|.$$

Таким образом, при $\omega/\omega_0 \approx 1$ в контуре возникают биения. С течением времени биения затухают,

так как в реальных условиях $\alpha > 0$. Закон изменения амплитуды тока в переходном режиме можно найти с помощью теоремы косинусов:

$$I_m(t) = \sqrt{I_m^2 + (I_m e^{-\alpha t})^2 - 2I_m^2 e^{-\alpha t} \cos(\omega - \omega_0)t} = \\ = I_m \sqrt{1 + e^{-2\alpha t} - 2e^{-\alpha t} \cos(\omega - \omega_0)t}.$$

Зависимость тока i от времени изображена на рис. 6.25.

Если частота возмущающего воздействия ω равна частоте ω_0 , то режим последовательной rLC -цепи называют режимом резонанса напряжений. В этом случае

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = 0; \\ \varphi = \text{arctg}(x/r) = 0.$$

Из выражения (6.60)

$$i = I_m (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \psi). \quad (6.62)$$

Характерная особенность закона изменения тока (6.62) — экспоненциальное нарастание амплитуды от нуля до установившегося значения (рис. 6.26). Амплитуда тока I_m определяется сопротивлением r : $I_m = U_m/r$.

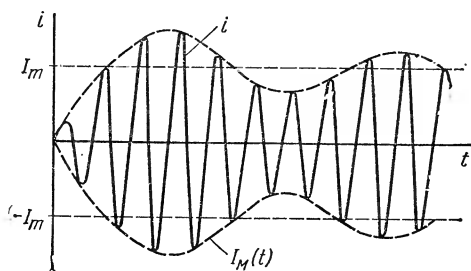


Рис. 6.25

Установившийся режим. При установившемся режиме ток в rLC -цепи содержит только принужденную составляющую:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (6.63)$$

Зная ток, находим напряжения на элементах цепи:

$$u_r = U_{rm} \sin(\omega t + \psi - \varphi); \quad (6.64)$$

$$u_L = U_{Lm} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \quad (6.65)$$

$$u_C = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.66)$$

где $U_{rm} = rI_m$; $U_{Lm} = x_L I_m$; $U_{Cm} = x_C I_m$.

Величину $x = \omega L - 1/\omega C$ называют реактивным сопротивлением цепи, $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ — полным сопротивлением.

Если частота э. д. с. $\omega < \omega_0$, то

$$x = \omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) < 0;$$

$$\varphi < 0.$$

Следовательно, ток i опережает напряжение $u = e$ на угол $-\varphi$. В этом случае $x_C > x_L$ и реактивное сопротивление цепи имеет емкостный характер. Если $\omega > \omega_0$, то $x > 0$, $\varphi > 0$. Следовательно, ток i отстает от напряжения $u = e$ на угол φ . В этом случае $x_L > x_C$ и реактивное сопротивление цепи имеет индуктивный характер.

Если $\omega = \omega_0$, то $x = 0$, $\varphi = 0$, $z = r$ (режим резонанса напряжений). Ток i совпадает по фазе с напряжением $u = e$ и $x_C = x_L$.

Напряжения на емкости и индуктивности равны по величине и противоположны по фазе; напряжение на сопротивлении равно э. д. с. Если $x_L = x_C \gg r$, то амплитуды напряжений на индуктивности и емкости ($U_{Lm} = U_{Cm}$) значительно превышают амплитуду э. д. с.

На рис. 6.27, а—в показаны векторные диаграммы цепи соответственно для $\omega < \omega_0$, $\omega > \omega_0$ и $\omega = \omega_0$. Вектор напряжения $U = \vec{e}$ равен сумме векторов $\vec{U}_r$, $\vec{U}_L$ и $\vec{U}_C$. Из векторных диаграмм рис. 6.27, а, б видно, что

$$U_r = U \cos \varphi, \quad U_L - U_C = U \sin \varphi \quad (\varphi \geq 0).$$

Активная мощность, потребляемая цепью,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \sin(\omega t + \psi - \varphi) \, dt = UI \cos \varphi.$$

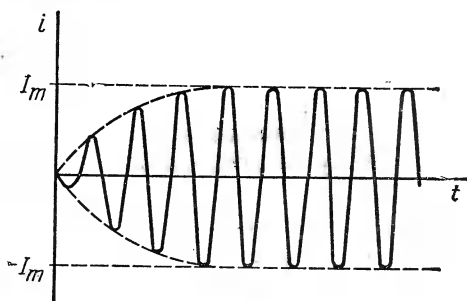


Рис. 6.26

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Активная мощность, рассеиваемая в сопротивлении r ,

$$P_r = U_r I = r I^2 = UI \cos \varphi = P.$$

Реактивная мощность

$$Q = (U_L - U_C) I = Q_L - Q_C$$

может быть положительной ($Q_L > Q_C$ при $\omega > \omega_0$), отрицательной ($Q_L < Q_C$ при $\omega < \omega_0$) и равной нулю ($Q_L = Q_C$ при $\omega = \omega_0$).

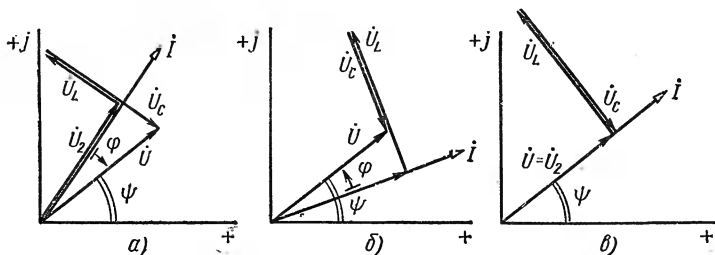


Рис. 6.27

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Параллельная цепь. Пусть rLC -цепь рис. 6.28 подключают к источнику гармонического тока $J(t) = J_m \sin(\omega t + \psi)$. Эта цепь дуальна цепи, показанной на рис. 6.22. Для напряжения u (рис. 6.28) справедливы выражения, дуальные (6.55а, б) ÷ (6.63).

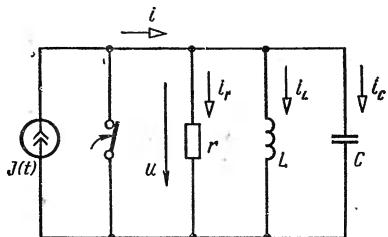


Рис. 6.28

Чтобы записать дуальные выражения, нужно в формулах (6.55а, б) ÷ (6.63) заменить $\mathcal{E}_m$, r , L , C соответственно на дуальные величины J_m , g , C , L . При этом амплитуда тока $I_m = \mathcal{E}_m / z$ заменяется амплитудой напряжения

$U_m = J_m / y$, $[y = \sqrt{b^2 + g^2}, b = \frac{1}{\omega L} - \omega C = b_L - b_C]$, угол $\varphi = \arctg(x/r)$ — углом — $\varphi = \arctg(-b/g)$, отношение $r/2L = \alpha$ — отношением $g/2C = \alpha$. Например, выражению (6.57) соответствует дуальное

$$u = -U_m \frac{\omega_0}{\omega_{св}} \left[\sin(\psi + \varphi) \sin(\omega_{св} t + \varphi_{св}) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0}{\omega} \cos(\psi + \varphi) \sin \omega_{св} t \right] e^{-\alpha t} + U_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad (6.67)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, $\varphi_{св} = \pi - \arctg(\omega_{св}/\alpha)$.

Графики напряжения u для различных случаев аналогичны графикам тока i на рис. 6.23 ÷ 6.26.

Если частота тока источника тока ω равна резонансной частоте ω_0 схемы рис. 6.28, то режим этой схемы называют режимом резонанса токов. В таком случае

$$b = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \omega C = 0;$$

$$\varphi = \arctg(b/g) = 0.$$

При резонансе токов амплитуда напряжения нарастает по экспоненциальному закону от нуля до установившегося значения аналогично функции (6.62).

При установившемся режиме для напряжения u , токов i_r , i_C , i_L справедливы выражения, дуальные соответственно выражениям (6.63) ÷ (6.66):

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.68)$$

$$i_r = I_{rm} \sin(\omega t + \psi + \varphi); \quad (6.69)$$

$$i_C = I_{cm} \sin\left(\omega t + \psi + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \quad (6.70)$$

$$i_L = I_{Lm} \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.71)$$

где $I_{rm} = gU_m$; $I_{cm} = b_C U_m$; $I_{Lm} = b_L U_m$.

Величины $b = b_L - b_C = 1/\omega L - \omega C$ называют реактивной проводимостью, а $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ — полной проводимостью цепи.

Если $\omega < \omega_0$, то

$$b = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \omega C > 0,$$

$$\varphi > 0.$$

Следовательно, напряжение u опережает ток $i = J(t)$ на угол φ . В этом случае $b_L > b_C$ и реактивная проводимость схемы имеет индуктивный характер.

Если $\omega > \omega_0$, то $b < 0$, $\varphi < 0$. Следовательно, напряжение u отстает от тока $i = J(t)$ на угол $-\varphi$. При этом $b_L < b_C$ и реактивная проводимость имеет емкостный характер. Если $\omega = \omega_0$, то $b = 0$, $\varphi = 0$, $y = g$ (режим резонанса токов). Напряжение u совпадает по фазе с током $i = J(t)$, $b_L = b_C$. Токи в индуктивности и емкости равны по величине и противоположны по фазе; ток в сопротивлении равен току источника тока. Если $b_L = b_C \gg g$, то амплитуды токов в индуктивности и емкости ($I_{Lm} = I_{cm}$) значительно превышают амплитуду тока источника тока.

На рис. 6.29, а — в построены векторные диаграммы цепи соответственно для $\omega < \omega_0$, $\omega > \omega_0$ и $\omega = \omega_0$. Вектор тока $\vec{I} = \vec{J}$ равен сумме векторов $\vec{I}_r$, $\vec{I}_L$, $\vec{I}_C$. Из векторных диаграмм (рис. 6.29, а, б) видно, что

$$I_r = I \cos \varphi; \quad I_L - I_C = I \sin \varphi \quad (\varphi \geq 0).$$

Активная и реактивная мощности цепи соответственно:

$$P = UI \cos \varphi;$$

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Активная мощность, рассеиваемая в сопротивлении r ,

$$P_r = UI_r = gU^2 = UI \cos \varphi = P.$$

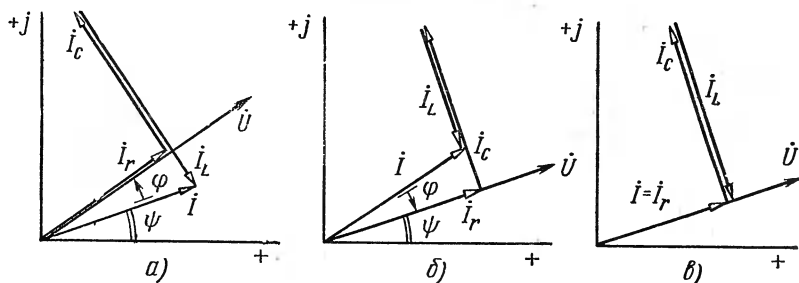


Рис. 6.29

Реактивная мощность

$$Q = U(I_L - I_C) = Q_L - Q_C$$

может быть положительной ($Q_L > Q_C$ при $\omega < \omega_0$), отрицательной ($Q_L < Q_C$ при $\omega > \omega_0$) и равной нулю ($Q_L = Q_C$ при $\omega = \omega_0$).

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

§ 6.7. Цепь с трансформатором

На рис. 6.30 изображена схема цепи, содержащей индуктивный трехполюсник — трансформатор. Пусть эта схема подключается к источнику э. д. с. $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi)$. При замкнутом ключе для схемы справедливы уравнения

$$e = r_1 i_1 + u_1;$$

$$0 = r_2 i_2 + u_2.$$

Напряжения u_1 и u_2 связаны с токами i_1 и i_2 соотношениями (1.28), поэтому

$$e = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad (6.72)$$

$$0 = r_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (6.73)$$

Из уравнения (6.72) производная

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{M} \left(e - r_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right). \quad (6.74)$$

Если продифференцировать обе части уравнения (6.73) и учесть равенство (6.74), то можно получить дифференциальное уравнение для тока i_1 :

$$\frac{r_2}{M} \left(e - r_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right) + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{L_2}{M} \frac{d}{dt} \left(e - r_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right) = 0$$

или

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (r_1 L_2 + r_2 L_1) \frac{di_1}{dt} + r_1 r_2 i_1 = r_2 e + L_2 \frac{de}{dt}. \quad (6.75)$$

Если в уравнении (6.75) заменить M^2 согласно равенству $M^2 = K_C L_1 L_2$ и разделить обе части уравнения на $r_1 r_2$, то уравнение примет вид

$$\tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{1}{r_1} \left(e + \tau_2 \frac{de}{dt} \right), \quad (6.76)$$

где $\tau_1 = L_1 / r_1$; $\tau_2 = L_2 / r_2$.

Уравнению (6.76) соответствует характеристическое уравнение

$$\tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2) p^2 + (\tau_1 + \tau_2) p + 1 = 0,$$

корни которого

$$p_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2)}}{2\tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2)}.$$

Так как

$$(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2) > (\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1 \tau_2 = (\tau_1 - \tau_2)^2 > 0,$$

корни характеристического уравнения вещественны и различны.

Решение уравнения (6.76) запишем следующим образом:

$$i_1 = i_{1\text{св}} + i_{1\text{пр}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i_{1\text{пр}},$$

где $i_{1\text{пр}} = I_{1m} \sin(\omega t + \psi - \varphi_1)$, так как правая часть уравнения (6.76) — гармоническая функция. Если выражение для $i_{1\text{пр}}$ подставить в уравнение (6.76), то получим соотношение для определения амплитуды I_{1m} и угла φ_1 :

$$I_{1m} \{ [1 - \tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2) \omega^2] \sin(\omega t + \psi - \varphi_1) + (\tau_1 + \tau_2) \omega \cos(\omega t + \psi - \varphi_1) \} = \frac{1}{r_1} \mathcal{E}_m [\sin(\omega t + \psi) + \tau_2 \omega \cos(\omega t + \psi)]$$

или

$$I_{1m} \sqrt{[1 - \tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2) \omega^2]^2 + (\tau_1 + \tau_2)^2 \omega^2} \sin(\omega t + \psi - \varphi_1 + \alpha) = \frac{1}{r_1} \mathcal{E}_m \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2} \sin(\omega t + \psi + \beta),$$

где

$$\alpha = \arctg \frac{(\tau_1 + \tau_2) \omega}{1 - \tau_1 \tau_2 (1 - K_C^2) \omega^2}; \quad \beta = \arctg \tau_2 \omega.$$

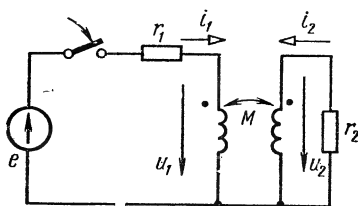


Рис. 6.30

Отсюда

$$I_{1m} = \frac{\mathcal{E}_m}{r_1} \frac{\sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}}{\sqrt{[1 - \tau_1 \tau_2 (1 - K_c^2) \omega^2]^2 + (\tau_1 + \tau_2)^2 \omega^2}},$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{(\tau_1 + \tau_2) \omega}{1 - \tau_1 \tau_2 (1 - K_c^2) \omega^2} - \arctg \tau_2 \omega.$$

В момент замыкания ключа токи i_1 и i_2 равны нулю: $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$. Из уравнений (6.72) и (6.73) производная

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} e(0) = \frac{e(0)}{L_1 - (1 - K_c^2)},$$

где $e(0) = \mathcal{E}_m \sin \psi$.

Постоянные интегрирования определяют из следующих уравнений:

$$A_1 + A_2 + I_{1m} \sin(\psi - \varphi) = 0;$$

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + \omega I_{1m} \cos(\psi - \varphi_1) = \frac{e(0)}{L_1 (1 - K_c^2)},$$

откуда

$$A_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \left\{ -\frac{e(0)}{L_1 (1 - K_c^2)} + I_{1m} [p_2 \sin(\psi - \varphi_1) - \omega \cos(\psi - \varphi_1)] \right\};$$

$$A_2 = \frac{1}{p_1 - p_2} \left\{ -\frac{e(0)}{L_1 (1 - K_c^2)} + I_{1m} [\omega \cos(\psi - \varphi_1) - p_1 \sin(\psi - \varphi_1)] \right\}.$$

Для тока i_2 справедливо дифференциальное уравнение

$$\tau_1 \tau_2 (1 - K_c^2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{di_2}{dt} + i_2 = -\frac{M}{\tau_1 \tau_2} \frac{de}{dt}, \quad (6.77)$$

решение которого имеет вид

$$i_2 = i_{2св} + i_{2пр} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + i_{2пр},$$

где $i_{2пр} = I_{2m} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2)$. Величины I_{2m} и φ_2 определяем с помощью подстановки выражения для $i_{2пр}$ в уравнение (6.77):

$$I_{2m} = \frac{\omega M \mathcal{E}_m}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{\sqrt{[1 - \tau_1 \tau_2 (1 - K_c^2) \omega^2]^2 + (\tau_1 + \tau_2)^2 \omega^2}};$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{(\tau_1 + \tau_2) \omega}{1 - \tau_1 \tau_2 (1 - K_c^2) \omega^2} + \frac{\pi}{2}.$$

Постоянные интегрирования находим из условий

$$i_2(0) = 0; \quad \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{M}{L_2} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{K_c^2 e(0)}{M (1 - K_c^2)}.$$

Решение уравнений для постоянных интегрирования приводит к следующим равенствам:

$$B_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \left\{ -\frac{K_c^2 e(0)}{M (1 - K_c^2)} + I_{2m} [p_2 \sin(\psi - \varphi_2) - \omega \cos(\psi - \varphi_2)] \right\};$$

$$B_2 = \frac{1}{p_1 - p_2} \left\{ \frac{K_c^2 e(0)}{M (1 - K_c^2)} + I_{2m} [\omega \cos(\psi - \varphi_2) - p_1 \sin(\psi - \varphi_2)] \right\}.$$

Выражение для тока i_2 может быть найдено также путем непосредственного интегрирования соотношения (6.74) при известном токе i_1 . На рис. 6.31, а, б приведены графики токов i_1 и i_2 и их составляющих для $\psi - \varphi_1 = \pi/2$, $\psi - \varphi_2 = -\pi/4$, $|p_1| < |p_2|$; постоянные $A_1 < 0$, $A_2 < 0$, $B_1 < 0$, $B_2 > 0$. Свободные составляющие токов представляют собой алгебраическую сумму экспоненциальных функций с различными начальными значениями и показателями степени. Экспонента с показателем $p_2 t$ затухает быстрее экспоненты с показателем $p_1 t$. Чем ближе величина коэффициента связи к единице, тем значительнее разница между корнями характеристического уравнения p_1 и p_2 . При $L_1 = L_2 = L$ и $r_1 = r_2 = r$ $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $p_1 = -1/\tau(1 + K_c)$, $p_2 = -1/\tau(1 - K_c)$. Если $K_c = 0,5$, то отношение $|p_2|/|p_1| = 3$; если $K_c = 0,95$, отношение $|p_2|/|p_1| = 40$.

Скорость изменения тока $i_{1св}$ имеет наибольшее значение в момент времени $t=0$; с течением времени эта скорость уменьшается. Для сравнения на

рис. 6.31, а штриховой линией показан график изменения тока $i_{1св}$ при разомкнутой цепи $r_2 = L_2$, т. е. при $i_2 = 0$. Этот график является экспонентой с показателем $-t/\tau_1$. В первые моменты после включения источника ток $i_{1св}$ при $i_2 \neq 0$ затухает быстрее, а затем — медленнее по сравнению с током $i_{1св}$ при $i_2 = 0$.

Как видно из рис. 6.31, б, скорость изменения тока $i_{2св}$ имеет наибольшее значение также при $t=0$; далее эта скорость изменяется по величине и по знаку.

В предельном случае $K_c = 1$ (совершенный трансформатор), $p_1 = -1/(\tau_1 + \tau_2)$, $p_2 = -\infty$. Значение корня p_1 можно найти из общего выражения для корней, если раскрыть неопределенность при $K_c \rightarrow 1$ по правилу Лопиталья или непосредственно из характеристического уравнения, которое в этом случае будет первой степени. Токи i_1 и i_2 принимают вид

$$i_1 = A_1 e^{p_1 t} + i_{1нр}; \quad i_2 = B_1 e^{p_1 t} + i_{2нр},$$

где составляющие $i_{1нр}$ и $i_{2нр}$ получают из приведенных формул при подстановке $K_c = 1$.

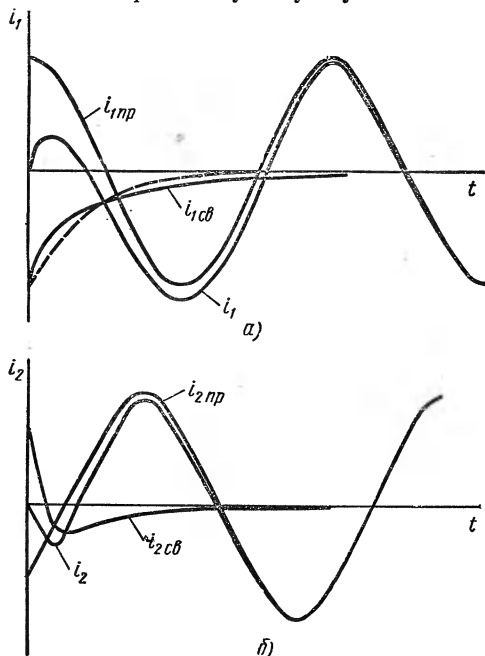


Рис. 6.31

Так как в общем случае

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 - K_c^2)}}{\tau_1\tau_2(1 - K_c^2)},$$

из записанных выражений для A_1 и B_1 нетрудно определить предельные значения при $K_c \rightarrow 1$:

$$A_1 = \frac{\tau_1\tau_2 e(0)}{(\tau_1 + \tau_2)L_1} - I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1);$$

$$B_1 = -\frac{\tau_1\tau_2 e(0)}{(\tau_1 + \tau_2)M} - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2).$$

На рис. 6.32, а, б приведены графики токов i_1 и i_2 . В отличие от графиков, изображенных на рис. 6.31, а, б, в рассматриваемом случае токи i_1 и i_2 в начальный момент времени отличны от нуля.

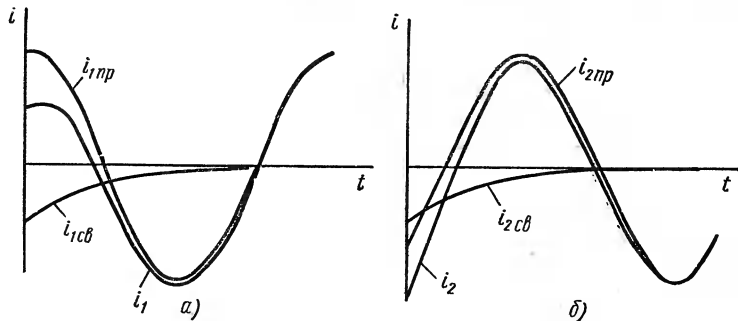


Рис. 6.32

При установившемся режиме токи i_1 и i_2 цепи на рис. 6.30 изменяются по гармоническому закону: $i_1 = i_{1np}$, $i_2 = i_{2np}$. Напряжения u_1 и u_2 , u_{r1} также гармонические и при известных токах i_1 и i_2 могут быть найдены из соотношений $u_1 = e - r_1 i_1$, $u_2 = -r_2 i_2$, $u_{r1} = r_1 i_1$.

Пример 6.1. В цепи на рис. 6.30 $e = 10 \sin(10^3 t + 108^\circ 30')$. Параметры схемы: $L_1 = L_2 = 10^{-3}$ Г; $r_1 = r_2 = 1$ Ом; $K_c = 1$. Определить токи i_1 и i_2 , напряжения u_1 , u_2 и u_{r1} при установившемся режиме.

Решение. Подставляя в формулы для I_{1m} , I_{2m} , φ_1 и φ_2 $\omega = 10^3$ с $^{-1}$ и $K_c = 1$, найдем:

$$I_{1m} = \frac{e_m}{r_1} \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{10}{1} \cdot 0,632 = 6,32 \text{ А};$$

$$I_{2m} = \frac{10^3 M e_m}{1 \cdot 1 \sqrt{5}} = \frac{10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{\sqrt{5}} = 4,48 \text{ А};$$

где $M = K_c \sqrt{L_1 L_2} = 10^{-3}$ Г.

$$\varphi_1 = \arctg 2 - \arctg 1 = 63^\circ 30' - 45^\circ = 18^\circ 30';$$

$$\varphi_2 = \arctg 2 + 90^\circ = 63^\circ 30' + 90^\circ = 153^\circ 30'.$$

Таким образом,

$$i_1 = 6,32 \sin(10^3 t + \psi - \varphi_1) = 6,32 \sin(10^3 t + 90^\circ) = 6,32 \cos 10^3 t \text{ А};$$

$$i_2 = 4,48 \sin(10^3 t + \psi - \varphi_2) = 4,48 \sin(10^3 t - 45^\circ) \text{ А}.$$

Напряжения u_1 и u_2 в заданной цепи одинаковы:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = -10^{-3} \cdot 6,32 \cdot 10^3 \sin 10^3 t + 10^{-3} \cdot 4,48 \cdot 10^3 \cos (10^3 t - 45^\circ) = \\ = -6,32 \sin 10^3 t + 4,48 \sin (10^3 t + 45^\circ) \text{ В};$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 4,48 \sin (10^3 t + 45^\circ) - 6,32 \sin 10^3 t \text{ В.}$$

Первая составляющая каждого из этих напряжений обусловлена собственной индуктивностью L_1 или L_2 , вторая — взаимной индуктивностью M .

Путем тригонометрических преобразований можно показать, что $u_1 = u_2 = 4,48 \sin (10^3 t + 135^\circ)$ В. Такой же результат получим и из выражений $u_1 = e - r_1 i_1$, $u_2 = -r_2 i_2$. Напряжение $u_{r_1} = -r_1 i_1 = 6,32 \cos 10^3 t$ В. На рис. 6.33 построена векторная диаграмма рассматриваемой цепи, на которой векторы $\dot{U}'_1$ и $\dot{U}''_1$ ($\dot{U}'_2$ и $\dot{U}''_2$) представляют собой составляющие вектора $\dot{U}_1$ ($\dot{U}_2$), обусловленные соответственно собственной и взаимной индуктивностями.

§ 6.8. Общие замечания по анализу rLC -цепей

Как и в цепях с источниками постоянного напряжения и постоянного тока, токи ветвей и напряжения на зажимах ветвей в разветвленных цепях с источниками гармонических напряжений и токов одинаковой частоты могут быть найдены путем интегрирования дифференциальных уравнений.

При гармонической возмущающей функции свободная составляющая искомого тока или напряжения записывается так же, как и при постоянной, ибо свободная составляющая представляет собой общее решение однородного уравнения. Принужденная составляющая тока или напряжения изменяется по гармоническому закону.

В цепи, содержащей двухполюсные элементы с параметрами r , L , C (а также в цепях с взаимной индуктивностью M) и источниках постоянного напряжения и постоянного тока, при расчете принужденных (установившихся) токов и напряжений индуктивности рассматриваются как короткозамкнутые участки, а емкости — как разомкнутые участки (см. гл. 3). Если э. д. с. источников э. д. с. и токи источников тока — гармонические функции, то для принужденного (установившегося) режима напряжения на индуктивностях и токи в емкостях также будут гармоническими функциями, которые необходимо учитывать в уравнениях цепи.

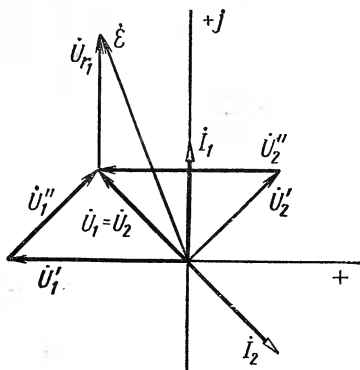


Рис. 6.33

Таким образом, в цепи с гармоническими возмущениями расчет установившихся токов и напряжений усложняется по сравнению с цепями, содержащими неизменные во времени источники возмущений. Тригонометрическая форма расчета установившихся токов и напряжений, при которой амплитуды и начальные фазы искомых величин определяются с помощью тригонометрических преобразований, приемлема только для простейших цепей. Для сложных разветвленных цепей целесообразно применять комплексную, или символическую, форму расчета, основанную на переходе от вещественных функций времени и вещественных параметров к комплексным функциям и комплексным параметрам. Расчет установившихся режимов в цепях с источниками гармонических э. д. с. и токов при помощи комплексных чисел подробно рассматривается в последующих главах.

УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С ДВУХПОЛЮСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ БЕЗ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

§ 7.1. Комплексные величины, характеризующие установившиеся процессы в электрической цепи

Комплексные амплитуды и действующие значения. Как уже отмечалось в § 6.1, гармоническим токам, напряжениям и другим величинам можно поставить в соответствие вращающийся радиус-вектор на комплексной плоскости. Этот радиус-вектор в любой момент времени служит геометрическим изображением комплексного числа. Таким образом, величинам, изменяющимся по гармоническому закону, соответствуют комплексные функции.

Например, значению тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ в любой фиксированный момент времени t соответствует комплексное число, изображаемое вектором, длина которого равна амплитуде I_m и который образует с вещественной осью комплексной плоскости угол $\omega t + \psi_i$ (положительные углы отсчитываются в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, а отрицательные — наоборот). В начальный момент времени $t = 0$ вектор образует с вещественной осью угол ψ_i . Такой вектор можно обозначить через

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = I_m \angle \psi_i, \quad (7.1)$$

где длина вектора I_m — это модуль, а угол ψ_i — аргумент комплексного числа, геометрическим изображением которого служит вектор $\dot{I}_m$; $j = \sqrt{-1}$ *.

Равенство (7.1) называют показателем формы записи комплексного числа $\dot{I}_m$. Комплексное число можно записать также в алгебраической

$$\dot{I}_m = I'_m + jI''_m \quad (7.2a)$$

или тригонометрической

$$\dot{I}_m = I_m \cos \psi_i + j I_m \sin \psi_i \quad (7.2b)$$

форме. Величины $I'_m = I_m \cos \psi_i$, $I''_m = I_m \sin \psi_i$ называют соответственно вещественной (Re) и мнимой (Im) частями комплексного числа $\dot{I}_m$:

$$I'_m = \text{Re } \dot{I}_m; \quad I''_m = \text{Im } \dot{I}_m.$$

Для фиксированного момента времени $t > 0$ значению $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ соответствует комплексное число (комплексный мгновенный ток)

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m [\cos(\omega t + \psi_i) + j \sin(\omega t + \psi_i)]. \quad (7.3)$$

* Здесь и далее буквой с точкой наверху обозначаются комплексное число и его графическое изображение (вектор), соответствующее гармонически изменяющейся величине.

Гармоническую функцию $i(t)$ можно, следовательно, рассматривать как мнимую часть комплексной функции:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im} [I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}] = \text{Im} [\dot{I}_m e^{j\omega t}]. \quad (7.4)$$

Комплексное число $\dot{I}_m$ называют комплексной амплитудой гармонической функции i . Если это число разделить на $\sqrt{2}$, то

$$\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2} = I e^{j\psi_i}$$

называют комплексным действующим значением, так как модуль числа $\dot{I}$ равен действующему значению гармонической функции i .

Между функцией i и комплексным действующим значением существует связь, выражаемая равенством

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im} [\sqrt{2} I e^{j(\omega t + \psi_i)}] = \text{Im} [\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}]. \quad (7.5)$$

Векторы $\dot{I}_m$ ($\dot{I}$) и $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ ($\dot{I} e^{j\omega t}$) отличаются тем, что первые неподвижны, а вторые вращаются с угловой скоростью ω в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки. Все эти векторы можно рассматривать как соответствующие одной и той же гармонической функции i .

Термин «вектор» как изображение комплексного числа $\dot{I}_m$ или $\dot{I}$ имеет смысл, отличный от смысла этого же термина, применяемого для определения физических величин, характеризующихся модулем и направлением в пространстве (например, сила, скорость, напряженность поля и т. п.).

Переход от гармонических функций к комплексным амплитудам или действующим значениям позволяет упростить действия с гармоническими функциями: сложение и вычитание, дифференцирование и интегрирование.

Пусть заданы функции

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} i &= i_1 \pm i_2 = \text{Im} [\dot{I}_{1m} e^{j\omega t}] \pm \text{Im} [\dot{I}_{2m} e^{j\omega t}] = \\ &= \text{Im} [(\dot{I}_{1m} \pm \dot{I}_{2m}) e^{j\omega t}] = \text{Im} [\dot{I}_m e^{j\omega t}], \end{aligned}$$

где $\dot{I}_m = \dot{I}_{1m} \pm \dot{I}_{2m}$. Таким образом, суммированию гармонических функций одинаковой частоты соответствует суммирование комплексных амплитуд или действующих значений.

Производная гармонической функции $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Im} [\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \text{Im} \left[\frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] = \text{Im} [j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}].$$

Интеграл от гармонической функции

$$\int i \, dt = \int \text{Im} [\dot{I}_m e^{j\omega t}] \, dt = \text{Im} \int \dot{I}_m e^{j\omega t} \, dt = \text{Im} \left[\frac{1}{j\omega} \dot{I}_m e^{j\omega t} \right].$$

Как видно из записанных равенств, дифференцированию (интегрированию) гармонической функции соответствует умножение (деление) комплексной амплитуды или комплексного действующего значения на $j\omega$.

Линейной комбинации комплексных амплитуд, часть из которых умножена (разделена) на $j\omega$, соответствует линейная комбинация гармонических функций, часть из которых продифференцирована (проинтегрирована). Суммирование комплексных чисел можно выполнить, если эти числа представлены в алгебраической форме. Для перехода от показательной формы к алгебраической следует воспользоваться равенством (7.2 б). Обратный переход осуществляется с помощью соотношений *

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{I'_m}{I''_m}; \\ I_m &= \sqrt{I'^2_m + I''^2_m} = \frac{I'_m}{\cos \psi} = \frac{I''_m}{\sin \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Умножение (деление) комплексных чисел выполняется, если эти числа представлены в показательной форме.

Пример 7.1. В последовательной цепи с параметрами $r = 10$ Ом, $L = 10^{-3}$ Г, $C = 0,5 \cdot 10^{-5}$ Ф ток установившегося режима имеет действующее значение $I = 1$ А, начальную фазу $\psi_i = 45^\circ$ и частоту $\omega = 10^4$ с⁻¹. Найти мгновенное значение напряжения на зажимах цепи.

Решение. Комплексное действующее значение тока $i = 1 \cdot e^{j45^\circ}$ А. Так как $u = u_r + u_L + u_C = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$, комплексное действующее значение напряжения

$$\begin{aligned} \dot{U} &= ri + L(j\omega i) + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{j\omega} i \right) = \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) i = \\ &= \left(10 + j10^4 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{j10^4 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5} \right) i = 10\sqrt{2} \text{ В.} \end{aligned}$$

Мгновенное значение напряжения

$$u = \operatorname{Im} [\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}] = 20 \sin \omega t \text{ В.}$$

Такой же результат получим и после тригонометрических преобразований суммы гармонических функций $u = u_r + u_L + u_C$.

Комплексные сопротивления и проводимости. Пусть напряжение и ток пассивного участка некоторой ветви электрической цепи, содержащей источники гармонической э. д. с. и гармонического тока, изменяются по законам

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

(положительные направления u и i на схеме приняты одинаковыми). Гармоническим функциям u и i соответствуют комплекс-

* Все соотношения, записанные в данном параграфе для токов, аналогично записывают для напряжений, э. д. с., потенциалов, зарядов и т. п.

ные величины $\dot{U}_m(\dot{U})$ и $\dot{I}_m(\dot{I})$. Отношение

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = ze^{j\varphi} \quad (7.7)$$

($z = U/I$; $\varphi = \psi_u - \psi_i$) называют комплексным сопротивлением пассивного участка ветви. В алгебраической форме

$$Z = r + jx.$$

Вещественную часть комплексного сопротивления $r = \operatorname{Re} Z = z \cos \varphi$ называют активным сопротивлением, а мнимую часть $x = \operatorname{Im} Z = z \sin \varphi$ — реактивным сопротивлением. Модуль комплексного сопротивления $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ называется полным сопротивлением. Активное и полное сопротивления — неотрицательные величины; реактивное сопротивление может быть положительной, отрицательной, а также равной нулю величиной*. Аргумент комплексного сопротивления $\varphi = \operatorname{arctg} x/r$ равен углу сдвига фаз между напряжением и током.

В общем случае пассивный участок ветви схемы может содержать последовательно соединенные сопротивление r , индуктивность L и емкость C . При этом напряжение u и ток i участка связаны соотношением

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Если u и i — гармонические функции, то записанному равенству можно поставить в соответствие равенство для комплексных действующих значений

$$\dot{U} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = Z\dot{I},$$

где

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + j(x_L - x_C). \quad (7.8)$$

Реактивное сопротивление такого участка $x = x_L - x_C$; аргумент комплексного сопротивления $\varphi = \operatorname{arctg} [(x_L - x_C)/r]$. Сопротивления x_L и x_C неотрицательны, сопротивление x может быть положительной, отрицательной и равной нулю величиной.

Комплексное сопротивление Z можно представить на комплексной плоскости гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами r и jx (рис. 7.1, а). Такой треугольник называют треугольником сопротивлений.

Величину, обратную комплексному сопротивлению Z , называют комплексной проводимостью

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = ye^{-j\varphi}, \quad (7.9)$$

* Для пассивного участка цепи угол $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, если положительные направления u и i совпадают (см. гл. 6).

где $y = 1/z = I/U$. В алгебраической форме $Y = g - jb$, где $g = \operatorname{Re} Y = y \cos \varphi$ — активная проводимость; $b = \operatorname{Im} Y = y \sin \varphi$ — реактивная проводимость; $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ — полная проводимость. Активная и полная проводимости — неотрицательные величины; реактивная проводимость может быть положительной, отрицательной или равной нулю величиной. Для принятых форм записи комплексных сопротивлений (7.7) и комплексных проводимостей (7.9) знаки у x и b совпадают.

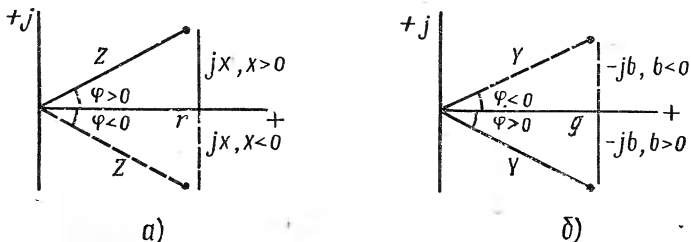


Рис. 7.1

В общем случае пассивный участок цепи может состоять из параллельно соединенных проводимости g , емкости C и индуктивности L . В этом случае ток i и напряжение u участка связаны соотношением

$$i = gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt,$$

которому соответствует равенство для комплексных действующих значений

$$\dot{I} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} = Y\dot{U}, \quad (7.10)$$

где $Y = g - j(b_L - b_C)$.

Реактивная проводимость такого участка $b = b_L - b_C$; аргумент комплексной проводимости $-\varphi = \operatorname{arctg} [(b_C - b_L)/g]$. Проводимости b_L и b_C неотрицательны, проводимость b может быть положительной, отрицательной или равной нулю величиной.

Комплексную проводимость Y на комплексной плоскости можно представить гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами g и $-jb$ (рис. 7.1, б). Такой треугольник называют треугольником проводимостей.

Если $Z = r + jx$, то

$$Y = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{(r + jx)(r - jx)} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{(r^2 + x^2)}, \quad (7.10 a)$$

откуда

$$g = r/(r^2 + x^2), \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2}.$$

Если $Y = g - jb$, то

$$Z = \frac{1}{g - jb} = \frac{g + jb}{(g - jb)(g + jb)} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2}, \quad (7.11)$$

откуда $r = g/(g^2 + b^2)$, $x = b/(g^2 + b^2)$. Как видно, параметры r и g , x и b одного участка ветви не являются обратными величинами. Обратными являются комплексные и полные сопротивления и проводимости участка.

§ 7.2. Энергетические процессы в цепи переменного тока

Мощности. На рис. 7.2 изображены две соединенные между собой части цепи, каждая из которых содержит источники энергии. Для указанных положительных направлений напряжение и ток выражаются формулами

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Мгновенная мощность

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)].$$

Рис. 7.2

Если $\psi_u \neq \psi_i$, то мгновенная мощность может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это означает, что в различные промежутки времени энергия передается из первой части цепи (I) во вторую (II) и наоборот.

Активная мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (7.12)$$

Величина энергии, передаваемой из первой части цепи во вторую,

$$W = \int_0^t p \, dt = Pt + UI \left[\frac{1}{2\omega} \sin(\psi_u - \psi_i) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \right] \quad (7.13)$$

представляет собой пульсирующую функцию. За целое число полупериодов N энергия $W = PNT/2$.

На рис. 7.3 показаны графики зависимости напряжения u , тока i , мощности p и энергии W от ωt при $0 < \varphi < \pi/2$; $\psi_u = 0$; а на рис. 7.4 — при $\varphi > \pi/2$, $\psi_u = 0$.

Одна и та же активная мощность может быть получена при различных значениях тока I и одном и том же напряжении U (при различных значениях напряжения U при одном и том же токе I), если изменять сдвиг фаз между напряжением и током. Мгновенная мощность дает более полную характеристику энергетических процессов цепи по сравнению с активной мощностью.

Амплитуду пульсации мгновенной мощности $S = UI$ называют полной мощностью. Полную мощность можно рассматривать

как модуль комплексной величины, называемой комплексной мощностью:

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}, \quad (7.14)$$

где $\dot{I} = Ie^{-i\psi_i}$ — комплексное число, сопряженное с $\dot{I} = Ie^{i\psi_i}$, т. е. отличающееся от комплексного числа $\dot{I}$ знаком аргумента и зна-

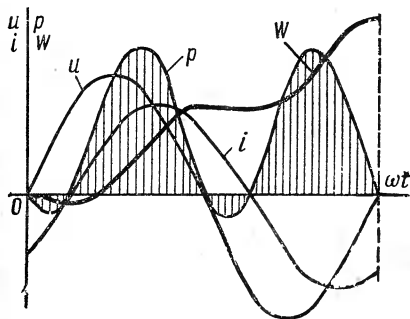


Рис. 7.3

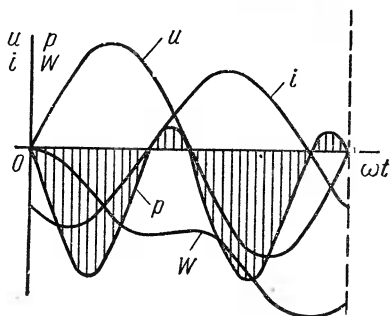


Рис. 7.4

ком мнимой части. В алгебраической форме $\tilde{S} = P + jQ$. Вещественная часть комплексной мощности совпадает с активной мощностью

$$\operatorname{Re} \tilde{S} = \operatorname{Re} U I e^{i(\psi_u - \psi_i)} = UI \cos \varphi = P.$$

Мнимую часть комплексной мощности

$$\operatorname{Im} \tilde{S} = UI \sin \varphi = Q$$

называют реактивной мощностью.

Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

При положительном знаке активной мощности ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$) реактивная мощность может иметь положительный или отрицательный знак. При $\varphi > 0$ (ток отстает по фазе от напряжения) $Q > 0$; при $\varphi < 0$ (ток опережает по фазе напряжение) $Q < 0$. Положительный (отрицательный) сдвиг фаз φ между напряжением и током пассивного участка ветви соответствует индуктивному (емкостному) характеру реактивного сопротивления или реактивной проводимости b этого участка. Следовательно, положительная (отрицательная) реактивная мощность пассивного участка ветви также соответствует индуктивному (емкостному) характеру реактивного сопротивления или реактивной проводимости.

Реактивная мощность $Q = 0$ при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т. е. при условии, что ток и напряжение совпадают или противоположны по фазе и, следовательно, в цепи отсутствуют периодические

процессы накопления и последующего возвращения энергии, связанной с магнитным или электрическим полем.

В простейшем случае, когда пассивный участок ветви содержит последовательно (параллельно) соединенные индуктивность и емкость, реактивная мощность такого участка $Q = Q_L - Q_C$ (см. гл. 6). Учитывая выражения для Q_L и Q_C , приведенные в гл. 6,

$$Q = Q_L - Q_C = \omega \left(\frac{LI_m^2}{2} - \frac{CI_m^2}{2} \right) = P_{L \max} - P_{C \max},$$

т. е. реактивная мощность равна разности максимальных энергий магнитного и электрического полей, связанных соответственно с индуктивностью и емкостью, умноженной на частоту ω , или разности максимальных мгновенных мощностей индуктивности и емкости. Пульсации мгновенных мощностей в индуктивности и емкости сдвинуты по фазе на угол π , что и приводит к вычитанию максимальных значений мгновенных мощностей.

Отношение активной мощности к полной

$$P/S = \cos \varphi \quad (7.15)$$

называют коэффициентом мощности. Полная мощность электрической машины, трансформатора или другого устройства определяется предельно допустимыми напряжением U и током I . При $\cos \varphi = 1$ активная мощность равна полной, что означает наиболее эффективное использование устройства, поэтому повышению коэффициента мощности электроэнергетических установок уделяется значительное внимание. Такое повышение возможно при компенсации реактивной мощности индуктивного характера реактивной мощностью емкостного характера, так как реактивные мощности индуктивности и емкости имеют противоположные знаки.

Так как на величину тока, потребляемого или генерируемого электроэнергетической установкой при заданном напряжении, оказывает влияние не только активная, но и реактивная мощности, в энергосистемах и промышленных предприятиях наряду с энергией W учитывают также величину $W_p = Qt$, называемую реактивной энергией, измеряемой в вольт-ампер-час (вар·ч). Реактивная энергия — условный термин, так как W_p не является энергией.

Комплексная мощность $\tilde{S} = P + jQ$ может быть представлена на комплексной плоскости в виде гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами P и jQ (рис. 7.5). Такой треугольник называют треугольником мощностей.

Пример 7.2. Для схемы на рис. 7.2 $U = 220$ В, $I = 100$ А, $\varphi = 45^\circ$. Определить активную, реактивную, полную и комплексную мощности, а также наибольшее и наименьшее значения мгновенной мощности.

Решение. Активная и реактивная мощности соответственно:

$$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 100 \frac{\sqrt{2}}{2} = 15,6 \text{ кВт},$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 100 \frac{\sqrt{2}}{2} = 15,6 \text{ квар}.$$

Полная мощность $S = UI = 220 \cdot 100 = 22 \text{ кВ} \cdot \text{А}$. Комплексная мощность $\tilde{S} = P + jQ = 15,6(1 + j) \text{ кВ} \cdot \text{А}$. Наибольшее значение мгновенной мощности

$$P_{\max} = P + S = 15,6 + 22 = 37,6 \text{ кВт},$$

наименьшее значение —

$$P_{\min} = P - S = 15,6 - 22 = -6,4 \text{ кВт}.$$

Связь мощностей с сопротивлениями и проводимостями. Пусть на зажимах ветви с комплексным сопротивлением $Z = r + jx$ известны напряжение $\dot{U}$ и ток $\dot{I}$ (рис. 7.6, а). Тогда комплексная мощность $\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = P + jQ$.

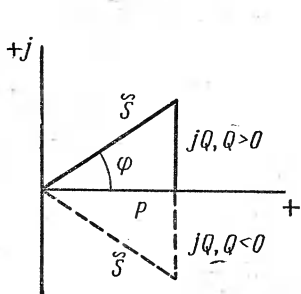


Рис. 7.5

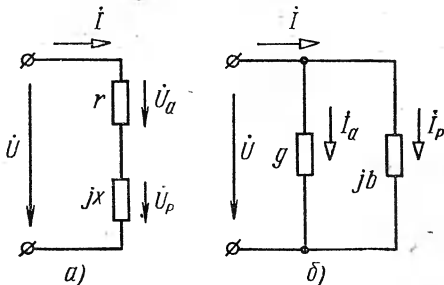


Рис. 7.6

Из определения комплексного сопротивления $\dot{U} = Z\dot{I}$. Следовательно,

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Z\dot{I}\dot{I}^* = ZI^2 = (r + jx)I^2 = rI^2 + jxI^2;$$

$$P = rI^2; \quad Q = xI^2; \quad S = zI^2.$$

Активное, реактивное и полное сопротивления можно определить по соответствующим мощностям:

$$r = P/I^2; \quad x = Q/I^2; \quad z = S/I^2. \quad (7.16)$$

Сопротивление r — пассивный элемент схемы; термин «активное сопротивление» подчеркивает связь этого сопротивления с активной мощностью: элемент схемы r отражает процессы необратимого рассеяния энергии. Сопротивление проводника r , измеренное при переменном токе, отличается от сопротивления того же проводника, измеренного при постоянном токе. При переменном токе сопротивление r увеличивается с ростом частоты за счет поверхностного эффекта и эффекта близости.

Если комплексная проводимость ветви $Y = g - jb$ (рис. 7.6, б), то ток $\dot{I} = Y\dot{U}$. Спряженный ток

$$\dot{I}^* = \dot{Y}^* \dot{U}^* = (g + jb) \dot{U}^*.$$

Комплексная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}\dot{Y}^* \dot{U}^* = \dot{Y}^* U^2 = (g + jb) U^2 = gU^2 + jbU^2.$$

Следовательно, $P = gU^2$; $Q = bU^2$; $S = yU^2$. Активную, реактивную и полную проводимости можно определить из выражений

$$g = P/U^2; \quad b = Q/U^2; \quad y = S/U^2. \quad (7.17)$$

Вектор $\dot{U}$ на зажимах схемы на рис. 7.6, а разлагается на две составляющие: активную составляющую $\dot{U}_a$, совпадающую по фазе с током $\dot{I}$, и реактивную составляющую $\dot{U}_p$, сдвинутую по

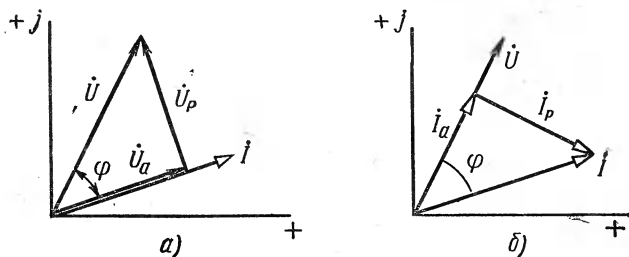


Рис. 7.7

фазе относительно тока $\dot{I}$ на угол $\pi/2$ (рис. 7.7, а). Эти составляющие можно рассматривать как напряжения на элементах r и x схемы, так как

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_a + \dot{U}_p = (r + jx) \dot{I} = r\dot{I} + jx\dot{I}; \\ \dot{U}_a &= r\dot{I}; \quad \dot{U}_p = jx\dot{I}. \end{aligned}$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_a = U \cos \varphi; \quad U_p = U |\sin \varphi|, \quad U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично можно разложить на две составляющие ток $\dot{I}$ (рис. 7.7, б). Активная составляющая $\dot{I}_a$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}$, реактивная составляющая $\dot{I}_p$ сдвинута по фазе относительно напряжения на угол $\pi/2$. Эти составляющие можно рассматривать как токи в элементах g и b схемы на рис. 7.6, б. Действительно,

$$\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_p = (g - jb) \dot{U} = g\dot{U} - jb\dot{U}; \quad \dot{I}_a = g\dot{U}; \quad \dot{I}_p = -jb\dot{U}.$$

Из векторной диаграммы следует, что

$$I_a = I \cos \varphi; \quad I_p = I |\sin \varphi|; \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Мощности P и Q выражаются через активные и реактивные составляющие напряжений и токов:

$$\begin{aligned} P &= UI \cos \varphi = UI_a = U_a I; \\ Q &= UI \sin \varphi = \pm UI_p = \pm U_p I. \end{aligned}$$

Знак мощности Q может быть установлен, если известен знак угла φ .

Схемы на рис. 7.6, а, б рассматривают соответственно как последовательную и параллельную эквивалентные схемы пассивного двухполюсника. Параметры эквивалентных схем определяют, в частности, с помощью измерений напряжения U , тока I и мощности P . Действующие значения тока и напряжения измеряют с помощью вольтметров и амперметров. Активная потребляемая мощность измеряется ваттметром, схема включения которого изображена на рис. 7.8. Отклонение стрелки ваттметра пропорционально величине $P_W = U_W I_W \cos \varphi_W$, где U_W , I_W — действующие значения напряжения на зажимах обмотки напряжения и тока токовой обмотки ваттметра; φ_W — сдвиг фаз между $\dot{U}_W$ и $\dot{I}_W$, причем положительные направления $\dot{U}_W$ и $\dot{I}_W$ должны быть одинаковыми относительно зажимов, отмеченных звездочками. Показание ваттметра можно также записать в виде $P_W = \operatorname{Re} [\dot{U}_W \dot{I}_W^*]$. Если при измерении определены U , I , P , то параметры эквивалентных схем находят из соотношений

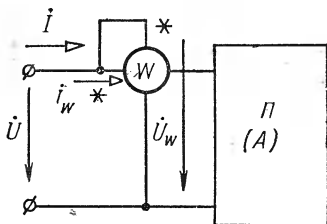


Рис. 7.8

$$z = U/I; \quad r = P/I^2; \quad x = \pm \sqrt{z^2 - r^2}$$

или

$$y = I/U; \quad g = P/U^2; \quad b = \pm \sqrt{y^2 - g^2}.$$

Знаки реактивного сопротивления и реактивной проводимости могут быть установлены с помощью дополнительных измерений. Например, последовательно с двухполюсником можно включить конденсатор с емкостным сопротивлением $x_C < 2|x|$. Если при этом абсолютная величина реактивного сопротивления схемы с учетом x_C возрастает: $|x - x_C| > |x|$, то реактивное сопротивление двухполюсника x имеет емкостный характер; если $|x - x_C| < |x|$, то реактивное сопротивление x имеет индуктивный характер.

Пример 7.3. При заданной частоте с помощью измерений найдены $I = 2$ А; $U = 10,2$ В; $P = 4$ Вт; $\varphi > 0$. Определить параметры z , r , x , g , b эквивалентных схем.

Решение. Полное сопротивление последовательной эквивалентной схемы

$$z = U/I = 5,1 \text{ Ом.}$$

Активное сопротивление

$$r = P/I^2 = 1 \text{ Ом;}$$

реактивное сопротивление

$$x = \sqrt{z^2 - r^2} = \sqrt{5,1^2 - 1^2} = 5 \text{ Ом.}$$

В соответствии с формулой (7.10)

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1+j5} = \frac{1}{1+5^2} - j \frac{5}{1+5^2} = 0,0385 - j0,192 \text{ См.}$$

В параллельной схеме $g = 0,0385$ См; $b = 0,192$ См. Такие же значения получаются из соотношений $g = P/U^2$; $b = \sqrt{y^2 - g^2}$; $y = I/U$.

§ 7.3. Уравнения состояния электрических цепей с источниками гармонических э. д. с. и токов в комплексной (символической) форме

Законы Ома и Кирхгофа. Для пассивного участка ветви электрической цепи с источниками гармонических э. д. с. и токов $\dot{U} = Z\dot{I}$, $\dot{I} = Y\dot{U}$. В общем случае, если k -я ветвь содержит источники э. д. с. и тока (рис. 7.9), справедливы равенства

$$\dot{U}_k = Z_k (\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{\mathcal{E}}_k; \quad (7.18)$$

$$\dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{\mathcal{E}}_k) - \dot{J}_k. \quad (7.19)$$

($Z_k = 1/Y_k$), аналогичные равенствам (4.1) и (4.2).

Для всех ветвей схемы можно записать матричные соотношения:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(B)} = \mathbf{Z}^{(B)} [\dot{\mathbf{I}}^{(B)} + \dot{\mathbf{J}}^{(B)}] - \dot{\mathbf{\mathcal{E}}}^{(B)}; \quad (7.20)$$

$$\dot{\mathbf{I}}^{(B)} = \mathbf{Y}^{(B)} [\dot{\mathbf{U}}^{(B)} + \dot{\mathbf{\mathcal{E}}}^{(B)}] - \dot{\mathbf{J}}^{(B)}, \quad (7.21)$$

где $\dot{\mathbf{U}}^{(B)}$, $\dot{\mathbf{I}}^{(B)}$, $\dot{\mathbf{\mathcal{E}}}^{(B)}$, $\dot{\mathbf{J}}^{(B)}$ — столбцовые матрицы комплексных действующих значений соответственно напряжений, токов, э. д. с. и токов источников токов ветвей цепи; $\mathbf{Z}^{(B)}$, $\mathbf{Y}^{(B)}$ — матрицы соответственно комплексных сопротивлений и проводимостей ветвей, причем $\mathbf{Z}^{(B)} = [\mathbf{Y}^{(B)}]^{-1}$.

Равенства (7.20) и (7.21) выражают матричную запись закона Ома в комплексной форме.

Для цепей, не содержащих взаимной индуктивности и электронных элементов, $\mathbf{Z}^{(B)}$ и $\mathbf{Y}^{(B)}$ — диагональные матрицы.

Если ветвь схемы содержит последовательно соединенные сопротивление, индуктивность и емкость, то

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k};$$

$$\mathbf{Z}^{(B)} = \mathbf{R}^{(B)} + j\omega \mathbf{L}^{(B)} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{D}^{(B)}.$$

Матрицы $\mathbf{R}^{(B)}$, $\mathbf{L}^{(B)}$ и $\mathbf{D}^{(B)}$ диагональны. На главной диагонали этих матриц записывают соответственно параметры ветвей r_k , L_k и $D_k = 1/C_k$, где $k = 1, 2, \dots, v$.

Если ветвь схемы содержит параллельно соединенные сопротивление, индуктивность и емкость, то

$$Y_k = g_k + j\omega C_k + \frac{1}{j\omega L_k}.$$

При этом матрица

$$\mathbf{Y}^{(B)} = \mathbf{G}^{(B)} + j\omega \mathbf{C}^{(B)} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{\Gamma}^{(B)}.$$

Узловые уравнения, уравнения с напряжениями ветвей дерева и контурные уравнения. В комплексной форме эти уравнения аналогичны уравнениям (4.18), (4.25) и (4.30):

$$\mathbf{Y}^{(y)} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{J}^{(y)}; \quad (7.27)$$

$$\mathbf{Y}^{(c)} \dot{\mathbf{U}}^{(n)} = \mathbf{J}^{(c)}; \quad (7.28)$$

$$\mathbf{Z}^{(k)} \dot{\mathbf{i}}^{(k)} = \dot{\mathbf{e}}^{(k)}. \quad (7.29)$$

В качестве примера можно составить различные уравнения в комплексной форме для цепи, схема и граф которой с произвольно выбранным деревом показаны соответственно на рис. 7.10, а, б.

Для графа записываем следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Комплексные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = r_1; \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2; \quad Z_3 = 1/j\omega C_3; \quad Z_4 = r_4; \\ Z_5 = r_5 + (1/j\omega C_5); \quad Z_6 = j\omega L_6; \quad Z_7 = r_7 + j\omega L_7 + (1/j\omega C_7);$$

комплексные проводимости ветвей

$$Y_k = 1/Z_k.$$

Матрицы $\mathbf{Z}^{(b)}$ и $\mathbf{Y}^{(b)}$ для рассматриваемой схемы — диагональные матрицы седьмого порядка, на главной диагонали которых записаны соответственно Z_k и Y_k , где $k=1, 2, \dots, 7$.

Матрицы э. д. с. и токов источников ветвей имеют вид

$$\dot{\mathbf{e}}^{(b)} = [\dot{\mathcal{E}}_1 \ 0 \ 0 \ -\dot{\mathcal{E}}_4 \ \dot{\mathcal{E}}_5 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{J}^{(b)} = [0 \ 0 \ J_3 \ 0 \ 0 \ -J_6 \ 0]^T.$$

Вычисляя матрицу узловых проводимостей

$$\mathbf{Y}^{(y)} = \mathbf{A} \mathbf{Y}^{(b)} \mathbf{A}^{(T)} \quad (7.30)$$

и столбцовую матрицу узловых токов

$$\mathbf{j}^{(y)} = \mathbf{A}\mathbf{j}^{(b)} - \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(b)}\dot{\mathbf{e}}^{(b)}, \quad (7.31)$$

получаем узловые уравнения ($\dot{\phi}_5 = 0$):

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_5 & -Y_1 & 0 & -Y_2 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_6 & -Y_6 & 0 \\ 0 & -Y_6 & Y_3 + Y_6 + Y_7 & -Y_3 \\ -Y_2 & 0 & -Y_3 & Y_2 + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -Y_1\dot{\phi}_1 + Y_5\dot{\phi}_5 \\ Y_1\dot{\phi}_1 - j_6 \\ j_6 - j_3 \\ Y_4\dot{\phi}_4 + j_3 \end{bmatrix}.$$

Для составления уравнений с напряжениями ветвей дерева необходимо вычислить матрицу проводимостей сечений

$$\mathbf{Y}^{(c)} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}^{(b)}\mathbf{Q}^{(T)} \quad (7.32)$$

и матрицу токов сечений

$$\mathbf{j}^{(c)} = \mathbf{Q}\mathbf{j}^{(b)} - \mathbf{Q}\mathbf{Y}^{(b)}\dot{\mathbf{e}}^{(b)}. \quad (7.33)$$

После вычислений

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_6 & -Y_6 & -Y_6 & 0 \\ -Y_6 & Y_6 + Y_2 + Y_5 & Y_6 & Y_5 \\ -Y_6 & Y_6 & Y_3 + Y_6 + Y_7 & -Y_7 \\ 0 & Y_5 & -Y_7 & Y_4 + Y_5 + Y_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -Y_1\dot{\phi}_1 + j_6 \\ Y_5\dot{\phi}_5 - j_6 \\ j_3 - j_6 \\ Y_4\dot{\phi}_4 + Y_5\dot{\phi}_5 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом примере можно уменьшить на единицу порядок матриц $\mathbf{Y}^{(y)}$ и $\mathbf{Y}^{(c)}$, если в ветви 6 заменить источник тока j_6 эквивалентным источником э. д. с. $\dot{\phi}_6 = j\omega L_6 j_6$. При этом узел 2 устраняется.

Вычисляя матрицу контурных сопротивлений

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{Z}^{(b)}\mathbf{B}^{(T)} \quad (7.34)$$

и матрицу контурных э. д. с.

$$\dot{\mathbf{e}}^{(k)} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}}^{(b)} - \mathbf{B}\mathbf{Z}^{(b)}\mathbf{j}^{(b)}, \quad (7.35)$$

получаем контурные уравнения:

$$\begin{bmatrix} Z_2 + Z_4 + Z_5 & -Z_2 & -Z_4 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_6 & -Z_3 \\ -Z_4 & -Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1^{(K)} \\ \dot{I}_3^{(K)} \\ \dot{I}_8^{(K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathcal{E}}_4 + \dot{\mathcal{E}}_5 \\ \dot{\mathcal{E}}_1 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_6 \dot{I}_6 \\ \dot{\mathcal{E}}_4 - Z_3 \dot{I}_3 \end{bmatrix},$$

где $\dot{I}_1^{(K)} = \dot{I}_5$; $\dot{I}_2^{(K)} = \dot{I}_6$; $\dot{I}_3^{(K)} = \dot{I}_7$.

Выражения (7.30)–(7.35) аналогичны выражениям (4.16), (4.17), (4.23), (4.24), (4.28), (4.29).

Как и в цепях с источниками постоянных э. д. с. и токов, узловые и контурные уравнения и уравнения с напряжениями ветвей дерева в комплексной форме можно составить непосредственно при рассмотрении схемы.

Если матрицы $\mathbf{Y}^{(B)}$ или $\mathbf{Z}^{(B)}$ представлены в виде суммы трех матриц, то матрицы $\mathbf{Y}^{(Y)}$, $\mathbf{Y}^{(C)}$ и $\mathbf{Z}^{(K)}$ также могут быть записаны в виде суммы трех слагаемых. Например, при $\mathbf{Z}^{(B)} = \mathbf{R}^{(B)} + j\omega \mathbf{L}^{(B)} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{D}^{(B)}$ матрица контурных сопротивлений

$$\mathbf{Z}^{(K)} = \mathbf{R}^{(K)} + j\omega \mathbf{L}^{(K)} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{D}^{(K)},$$

где на основании выражения (7.34)

$$\mathbf{R}^{(K)} = \mathbf{B} \mathbf{R}^{(B)} \mathbf{B}^T; \quad \mathbf{L}^{(K)} = \mathbf{B} \mathbf{L}^{(B)} \mathbf{B}^T; \quad \mathbf{D}^{(K)} = \mathbf{B} \mathbf{D}^{(B)} \mathbf{B}^T.$$

Матрицы $\mathbf{R}^{(K)}$, $\mathbf{L}^{(K)}$ и $\mathbf{D}^{(K)}$ можно записать непосредственно при рассмотрении схемы. Так, для схемы на рис. 7.10, а

$$\mathbf{R}^{(K)} = \begin{bmatrix} r_2 + r_4 + r_5 & -r_2 & -r_4 \\ -r_2 & r_1 + r_2 & 0 \\ -r_4 & 0 & r_4 + r_7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}^{(K)} = \begin{bmatrix} L_2 & -L_2 & 0 \\ -L_2 & L_2 + L_6 & 0 \\ 0 & 0 & L_7 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}^{(K)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3} \\ 0 & -\frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_7} \end{bmatrix}.$$

Подобным образом записывают слагаемые матриц $\mathbf{Y}^{(Y)}$, $\mathbf{Y}^{(C)}$, если проводимость каждой ветви схемы выражена в виде суммы активной, емкостной и индуктивной проводимостей.

Аналогия между уравнениями цепей с источниками постоянных и гармонических э. д. с. и токов позволяет сделать вывод, что все методы расчета, рассмотренные применительно к цепям постоянного тока, пригодны и для расчета цепей при гармонических э. д. с. и токах.

§ 7.4. Топографические диаграммы

Комплексный потенциал каждой точки схемы можно изобразить вектором на комплексной плоскости. Тогда напряжение между любыми двумя точками цепи будет определяться разностью векторов, для нахождения которой достаточно провести прямую линию между концами соответствующих векторов. Полученный вектор должен быть направлен к концу уменьшаемого вектора.

Векторную диаграмму комплексных потенциалов схемы называют топографической диаграммой. Каждой точке схемы соответствует определенная точка топографической диаграммы. Базовому узлу, потенциал которого принят равным нулю, на топографической диаграмме соответствует начало координат.

На рис. 7.11 показана неразветвленная схема с током I и напряжением между точками 1 и 6 $\dot{U} = \dot{\mathcal{E}}$. Для построения векторной топографической диаграммы потенциал одной из точек, например точки 6, принимают равным нулю ($\phi_6 = 0$). Тогда,

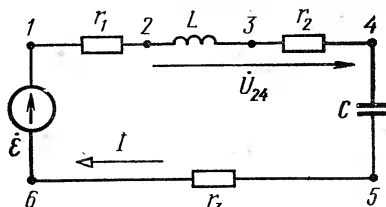


Рис. 7.11

обходя контур в направлении, противоположном направлению тока I , определяют потенциалы остальных точек рассматриваемой схемы. Потенциал $\phi_5 = \phi_6 + r_3 I = r_3 I$ изображен на рис. 7.12 в виде вектора $r_3 I$, конец которого обозначен цифрой 5. Потенциал $\phi_4 = \phi_5 + (1/j\omega C) I = r_3 I - jx_C I$. Конец вектора $-jx_C I$, обозначенный цифрой 4, определяет потенциал ϕ_4 , равный сумме напряжений на сопротивлениях r_3 и x_C . Аналогично определяют потенциалы $\phi_3 = \phi_4 + r_2 I$; $\phi_2 = \phi_3 + j\omega L I = \phi_3 + jx_L I$; $\phi_1 = \phi_2 + r_1 I$. Соответствующие им векторы показаны на рис. 7.12, причем $\phi_1 = \dot{U} = \dot{\mathcal{E}}$.

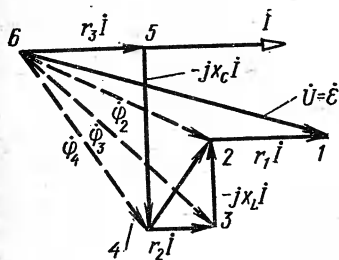


Рис. 7.12

Умножение вектора на j ($-j$) приводит к повороту его на угол $\pi/2$ в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки (по направлению движения часовой стрелки). Например, векторы $-jx_C I$ и $jx_L I$ повернуты относительно вектора I на угол $\pi/2$ в противоположные стороны (напряжение $-jx_C I$ отстает от тока, а напряжение $jx_L I$ опережает ток на угол $\pi/2$).

На топографической диаграмме векторы напряжений между любыми двумя точками имеют направления, противоположные

положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек на схеме. Напряжение $\dot{U}_{24} = \phi_2 - \phi_4$ (рис. 7.11) (направленное от точки 2 к точке 4) направлено от точки 4 к точке 2, что объясняется правилом вычитания векторов: разность векторов всегда направлена в сторону уменьшаемого вектора.

При построении топографических диаграмм разветвленной цепи можно также показать векторы токов в ветвях, векторы всех э. д. с. и токов источников токов.

Пример 7.4. На рис. 7.13 изображена схема электрической цепи и указаны ее параметры. Определить токи во всех ветвях схемы и напряжение $\dot{U} = \dot{\mathcal{E}}$, если ток $I_5 = 1$ А. Построить топографическую диаграмму и векторную диаграмму токов.

Решение. Если вектор тока $\dot{I}_5$ направить по оси вещественных величин ($I_5 = I_5 = 1$ А), а потенциал точки 4 принять равным нулю ($\phi_4 = 0$), то $\phi_3 = \phi_4 + 1 \cdot I_5 = 1$ В. Ток $\dot{I}_4 = 1/j2 = -j0,5$ А, а ток $\dot{I}_3 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 1 - j0,5$ А.

Потенциал $\phi_2 = \phi_3 + (-j0,5) I_3 = 1 - j0,5 (1 - j0,5) = 0,75 - j0,5$ В, потенциал $\phi_5 = \phi_4 - (-j0,5) I_3 = j0,5 (1 - j0,5) = 0,25 + j0,5$ В.

Разность потенциалов узлов 2 и 5

$$\dot{U}_{25} = \phi_2 - \phi_5 = (0,75 - j0,5) - (0,25 + j0,5) = 0,5 - j \text{ В,}$$

следовательно,

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{25}/2 = 0,25 - j0,5 \text{ А; } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0,25 - j0,5 + 1 - j0,5 = 1,25 - j \text{ А.}$$

Найдем потенциалы ϕ_1 и ϕ_6 :

$$\phi_1 = \phi_2 + j1 \cdot \dot{I}_1 = (0,75 - j0,5) + j(1,25 - j) = 1,75 + j0,75 \text{ В;}$$

$$\phi_6 = \phi_5 - 1 \cdot \dot{I}_1 = 0,25 + j0,5 - 1,25 + j = -1 + j1,5 \text{ В.}$$

Напряжение $\dot{U} = \dot{\mathcal{E}} = \phi_1 - \phi_6 = 1,75 + j0,75 + 1 - j1,5 = 2,75 - j0,75$ В.

На рис. 7.14 построены топографическая диаграмма и векторная диаграмма токов.

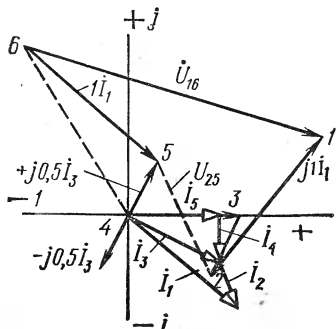


Рис. 7.14

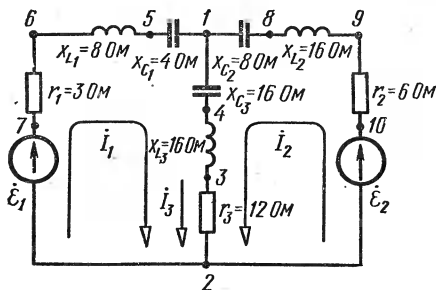


Рис. 7.15

Пример 7.5. На рис. 7.15 изображена схема электрической цепи и указаны ее параметры. Определить токи в ветвях схемы с помощью контурных

и узловых уравнений, если $\vec{E}_1 = 120e^{j30^\circ}$ В, $\vec{E}_2 = 220e^{j30^\circ}$ В. Построить топографическую диаграмму и векторную диаграмму токов.

Решение. Контурные уравнения имеют вид

$$(Z_1 + Z_3) \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_2 = \vec{E}_1; \quad Z_3 \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2 = \vec{E}_2,$$

где

$$Z_1 + Z_3 = 3 + j(8 - 4) + 12 + j(32 - 16) = 15 + j20 \text{ Ом},$$

$$Z_3 = 12 + j(32 - 16) = 12 + j16 \text{ Ом},$$

$$Z_2 + Z_3 = 6 + j(16 - 8) + 12 + j(32 - 16) = 18 + j24 \text{ Ом}.$$

Запишем эти уравнения следующим образом:

$$(15 + j20) \dot{I}_1 + (12 + j16) \dot{I}_2 = 120e^{j30^\circ};$$

$$(12 + j16) \dot{I}_1 + (18 + j24) \dot{I}_2 = 220e^{j30^\circ}$$

или

$$25e^{j53,1^\circ} \dot{I}_1 + 20e^{j53,1^\circ} \dot{I}_2 = 120e^{j30^\circ};$$

$$20e^{j53,1^\circ} \dot{I}_1 + 30e^{j53,1^\circ} \dot{I}_2 = 220e^{j30^\circ}.$$

Решая два уравнения совместно, получим:

$$\dot{I}_1 = -2,28e^{-j23,1^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = 8,86e^{-j23,1^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 6,58e^{-j23,1^\circ} \text{ А}.$$

Заданная схема имеет два узла, поэтому при $\varphi_2 = 0$ для потенциала φ_1 справедливо уравнение

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \frac{\vec{E}_1}{Z_1} + \frac{\vec{E}_2}{Z_1},$$

откуда

$$\varphi_1 = \frac{\frac{\vec{E}_1}{Z_1} + \frac{\vec{E}_2}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}.$$

Токи ветвей определим из выражений

$$\dot{I}_1 = \frac{\vec{E}_1 - \varphi_1}{Z_1}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\vec{E}_2 - \varphi_1}{Z_2}; \quad \dot{I}_3 = \frac{\varphi_1}{Z_3}.$$

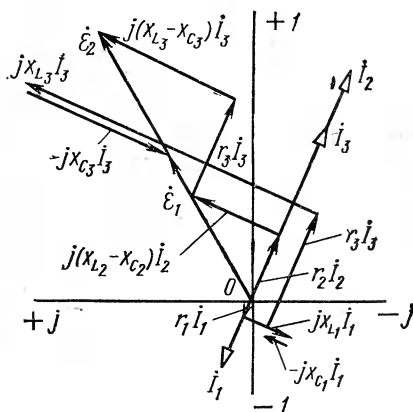


Рис. 7.16

На рис. 7.16 построены топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов.

§ 7.5. Основные свойства и преобразования цепей с источниками гармонических э. д. с. и токов

Основные свойства цепей. В электрической цепи, содержащей источники гармонических э. д. с. и токов, для мгновенных мощностей ветвей выполняется соотношение

$$\sum_k p_k = \sum_{k=1}^n u_k i_k = 0, \quad (7.36)$$

доказательство которого совпадает с доказательством равенства (5.1). Так как комплексные действующие значения токов ветвей удовлетворяют уравнению $\mathbf{A}\mathbf{i}^{(B)} = 0$, справедливо уравнение $\mathbf{A}\mathbf{i}^{(B)*} = 0$, где $\mathbf{i}^{(B)*}$ — матрица комплексных величин, сопряженных с комплексными действующими значениями токов ветвей. С помощью последнего уравнения легко доказать соотношения:

$$\sum_{k=1}^B \tilde{S}_k = \sum_{k=1}^B \dot{U}_k \dot{I}_k^* = 0; \quad (7.37)$$

$$\mathbf{i}_Z^T \mathbf{Z}^{(B)*} \mathbf{i}_Z = [\dot{\mathcal{E}}^{(B)}]^T \mathbf{i}_Z^* + [\dot{\mathbf{U}}^{(B)}]^T \mathbf{j}^{(B)*}; \quad (7.38)$$

$$\sum_{k=1}^B Z_k \dot{I}_k^2 = \sum_{k=1}^B \dot{\mathcal{E}}_k \dot{I}_k^* + \sum_{k=1}^B \dot{U}_k \dot{I}_k^*, \quad (7.39)$$

где $\mathbf{I}_Z = [I_{Z_k}]$ — матрица токов в сопротивлениях ветвей Z_k . Доказательство равенств (7.37) ÷ (7.39) аналогично доказательству выражений (5.1), (5.4), (5.5).

Равенства (7.37), (7.38) представляют собой математическую формулировку баланса комплексных мощностей. В правой части равенства (7.39) записана сумма комплексных мощностей, генерируемых источниками э. д. с. и тока:

$$\sum_{k=1}^B \dot{\mathcal{E}}_k \dot{I}_k^* + \sum_{k=1}^B \dot{U}_k \dot{I}_k^* = \sum_{k=1}^B \tilde{S}_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^B P_{k \text{ ист}} + j \sum_{k=1}^B Q_{k \text{ ист}}.$$

Подставляя в левой части равенства (7.39) вместо Z_k сумму $R_k + jX_k$ и приравнивая соответственно вещественные и мнимые части равенства, можно получить:

$$\sum_{k=1}^B r_k \dot{I}_k^2 = \sum_{k=1}^B P_{k \text{ ист}}; \quad (7.40)$$

$$\sum_{k=1}^B x_k \dot{I}_k^2 = \sum_{k=1}^B Q_{k \text{ ист}}. \quad (7.41)$$

Таким образом, в цепи с гармоническими э. д. с. и токами выполняется баланс активных и реактивных мощностей: активная мощность, генерируемая источниками энергии, равна активной мощности, рассеиваемой в сопротивлениях r_k ; реактивная мощность источников энергии равна реактивной мощности в реактивных сопротивлениях x_k (реактивная мощность индуктивностей учитывается с положительным знаком, а емкостей — с отрицательным).

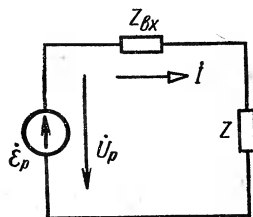


Рис. 7.17

Принцип наложения, свойство взаимности, теоремы о компенсации и об эквивалентном источнике (см. гл. 5) справедливы и для цепей с гармоническими э. д. с. и токами. Математические соотношения для

таких цепей записывают в комплексной форме аналогично соответствующим соотношениям для цепей постоянного тока. Например, по теореме об эквивалентном источнике ток в любой ветви схемы может быть найден из выражения $I = \frac{\dot{U}_p}{Z_{вх} + Z}$, аналогичного (5.50). Полученному выражению соответствует эквивалентная схема на рис. 7.17, подобная схеме на рис. 5.12.

Пример 7.6. Каким должно быть сопротивление ветви $Z = r + jx$ разветвленной схемы для того, чтобы в этой ветви выделялась максимальная активная мощность $P_{\max}$ (параметры остальных ветвей неизменны).

Решение. Если входное сопротивление относительно выделенной ветви $Z_{вх} = r_{вх} + jx_{вх}$, то мощность

$$P = r I^2 = \frac{r U_p^2}{(r + r_{вх})^2 + (x + x_{вх})^2}.$$

При любом r мощность P будет наибольшей, если $x + x_{вх} = 0$. Из условия

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r U_p^2}{(r + r_{вх})^2} \right] = 0$$

найдем $r = r_{вх}$. Таким образом, максимальную мощность получим при $Z = r_{вх} - jx_{вх}$ ($r = r_{вх}$; $x = -x_{вх}$). Максимальное значение мощности $P_{\max} = U_p^2 / 4r_{вх}$.

Методы преобразования схем с источниками гармонических э. д. с. и токов. Все методы преобразования, рассмотренные в § 5.6—5.9, применимы и к схемам с гармоническими э. д. с. и токами. Соответствующие соотношения записывают в комплексной форме. В результате преобразований схем с источниками гармонических э. д. с. и токов могут получиться ветви с отрицательным активным сопротивлением.

§ 7.6. Анализ цепей при изменении параметров

Линейные и круговые диаграммы. Во многих практических задачах требуется исследовать влияние различных параметров на характеристики режима цепи. Такое исследование можно выполнить с помощью построения годографов (геометрических мест) концевых точек векторов, изображающих комплексные величины. Годографы в общем случае имеют сложную форму. Здесь будут рассматриваться простейшие годографы, представляющие собой прямые линии или окружности.

Пусть некоторая ветвь схемы содержит два последовательно соединенных элемента с комплексными сопротивлениями $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ и $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$, причем Z_1 , φ_1 и φ_2 неизменны, а модуль z_2 сопротивления Z_2 изменяется в пределах от 0 до ∞ . В таком случае комплексное сопротивление ветви

$$Z = Z_1 + Z_2 = Z_1 + z_2 e^{j\varphi_2}$$

изменяется так, что годограф сопротивления Z на комплексной плоскости получается в виде прямой линии. На рис. 7.18 показан

годограф сопротивления Z при $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$, $\varphi_1 > \varphi_2$ (прямая MN).

Комплексная проводимость ветви

$$Y = \frac{1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/Z_1}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{Y_1}{1 + \frac{z_2}{z_1} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Если отношение $z_2/z_1 = n$, а $\varphi_2 - \varphi_1 = \psi$, то

$$Y = \frac{Y_1}{1 + ne^{j\psi}}.$$

При изменении модуля z_2 и, следовательно, отношения $n = z_2/z_1$ ($z_1 = \text{const}$) годографом проводимости Y будет окружность. Действительно, для любых значений n сумма векторов Y и $nYe^{j\psi}$ равна неизменному вектору Y_1 :

$$Y + nYe^{j\psi} = Y_1.$$

Вектор $nYe^{j\psi}$ получается при изменении длины вектора Y в n раз и поворота вектора nY на угол ψ (если $\psi > 0$ вектор поворачивается в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки). При любом значении n угол между векторами Y и $nYe^{j\psi}$ не меняется и равен $\pi - \psi$. Таким образом, сумма изменяющихся по величине и по направлению векторов Y и $nYe^{j\psi}$ и угол между ними не изменяются, что возможно только в случае,

если годограф конца вектора Y представляет собой окружность с хордой Y_1 .

На рис. 7. 19 показан годограф Y при $\psi < 0$ ($\varphi_1 > \varphi_2$). При $n=0$ конец вектора Y совпадает с точкой S_K ($Y=Y_1$); при $n=$

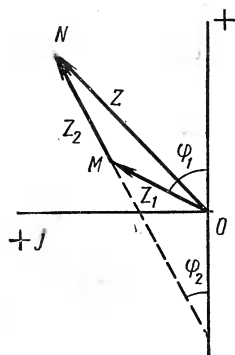


Рис. 7.18

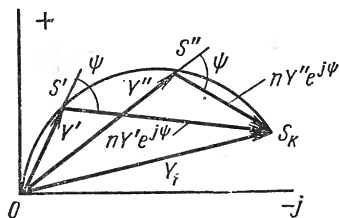


Рис. 7.19

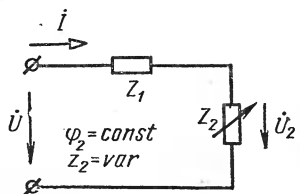


Рис. 7.20

$= \infty$ — с точкой 0 ($Y=0$). При $n=n'$ и $n=n''$ конец вектора Y совпадает с точками окружности S' и S'' ($Y=Y'$, $Y=Y''$).

В схеме на рис. 7.20 напряжение $\dot{U}$ и ток $\dot{I}$ связаны соотношениями $\dot{U} = Z\dot{I}$, $\dot{I} = Y\dot{U}$, где $Z = Z_1 + Z_2$; $Y = 1/Z$. Если цепь присоединена к источнику тока $\dot{J} = \dot{I} = \text{const}$, то напряжение $\dot{U}$

при изменении z_2 изменяется по закону, совпадающему с законом изменения Z . Годограф вектора $\dot{U}$ в данном случае является прямой линией. Если цепь присоединена к источнику э. д. с. $\mathcal{E} = \dot{U} = \text{const}$, то при изменении z_2 ток $\dot{I}$ изменяется по закону, совпадающему с законом изменения комплексной проводимости Y ; годограф вектора $\dot{I}$ — окружность, которую строят следующим образом. Вектор напряжения $\dot{U}$ откладывают по оси вещественных величин (рис. 7.21). Вектор тока

$$\dot{I}_k = Y_1 \dot{U} = \frac{U}{z_1} e^{-j\varphi_1}$$

отстает по фазе от напряжения $\dot{U}$ на угол φ_1 и на диаграмме строится в масштабе m_I в виде отрезка $\overline{OS}_k = I_k/m_I$ (ток $\dot{I}_k = \dot{I}$ при $Z_2 = 0$, т. е. при замкнутом сопротивлении Z_2). Затем продолжают отрезок $\overline{OS}_k$

(штриховая линия $\overline{S}_k N$) и под углом $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ к лучу $\overline{ON}$ проводят прямую $\overline{S}_k M$, которая является касательной в точке S_k к искомой окружности. Если из середины хорды $\overline{OS}_k$ восставить перпендикуляр и провести его до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки S_k к

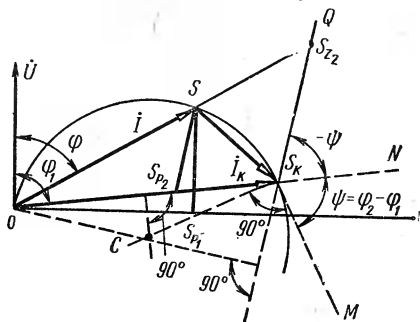


Рис. 7.21

прямой $\overline{S}_k M$ (или до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки O к продолжению прямой $\overline{S}_k Q$, проведенной под углом $-\psi$ к лучу $\overline{ON}$), то точка C пересечения этих перпендикуляров определит центр искомой окружности. Зная центр окружности и точки O и S_k , лежащие на окружности, строят годограф вектора $\dot{I}$ или круговую диаграмму тока $\dot{I}$. Круговая диаграмма на рис. 7.21 построена для $\psi < 0$. Рабочая часть окружности расположена по ту же сторону от вектора $\overline{OS}_k$, что и прямая $\overline{S}_k Q$. Если $\psi > 0$, то рабочая часть окружности расположена с другой стороны вектора $\overline{OS}_k$.

Докажем, что отрезки $\overline{SS}_k$, $\overline{S}_k S_{z_2}$ и $\overline{SS}_{p_2}$ (рис. 7.21) пропорциональны соответственно напряжению U_2 , сопротивлению z_2 и активной мощности P_2 (см. рис. 7.20).

Так, напряжение

$$\dot{U}_2 = \dot{U} - z_1 \dot{I} = \dot{U} - z_1 \frac{\dot{U}}{z_1 + z_2} = z_1 \left(\frac{\dot{U}}{z_1} - \frac{\dot{U}}{z_1 + z_2} \right).$$

Так как $\dot{U}/z_1 = \dot{I}_k$; $\dot{U}/(z_1 + z_2) = \dot{I}$, напряжение $\dot{U}_2 = z_1 (\dot{I}_k - \dot{I})$. Векторы тока $\dot{I}_k$ и $\dot{I}$ изображены на рис. 7.21 отрезками $\overline{OS}_k$ и $\overline{OS}$, а их разность показана отрезком $\overline{SS}_k$. Если масштаб для

тока равен m_I (А/см), то

$$\dot{U}_2 = m_I z_1 (\overline{OS}_K - \overline{OS}) = m_I z_1 \overline{SS}_K.$$

Модуль напряжения

$$U_2 = m_I z_1 |\overline{SS}_K| = m_{U_2} |\overline{SS}_K|,$$

где $m_{U_2} = m_I z_1$ — масштаб для напряжения U_2 , В/см; $|\overline{SS}_K|$ — длина вектора $\overline{SS}_K$, см.

Сопrotивление

$$z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{m_{U_2} |\overline{SS}_K|}{m_I |\overline{OS}|}.$$

Если отрезок $\overline{OS}$ продолжить до пересечения с прямой $\overline{S}_K Q$, то полученный треугольник $OS_K S_{z_2}$ будет подобен треугольнику OSS_K . Из подобия этих треугольников

$$\frac{|\overline{SS}_K|}{|\overline{OS}|} = \frac{|\overline{S}_K S_{z_2}|}{|\overline{OS}_K|}.$$

Следовательно,

$$z_2 = \frac{m_{U_2} |\overline{S}_K S_{z_2}|}{m_I |\overline{OS}_K|} = m_{z_2} |\overline{S}_K S_{z_2}|,$$

где

$$m_{z_2} = \frac{m_{U_2}}{m_I |\overline{OS}_K|} = \frac{m_I z_1}{m_I |\overline{OS}_K|} = \frac{z_1}{|\overline{OS}_K|} = \frac{m_I z_1}{I_K} —$$

масштаб для сопротивления z_2 , Ом/см. Таким образом, отрезок $|\overline{S}_K S_{z_2}|$ пропорционален сопротивлению z_2 .

Если из точки S провести прямую, параллельную $\overline{S}_K Q$, до пересечения с хордой $\overline{OS}_K$, то полученный отрезок $|\overline{SS}_{P_2}|$ будет пропорционален мощности P_2 . Действительно,

$$P_2 = U_2 I \cos \varphi_2 = m_{U_2} |\overline{SS}_K| m_I |\overline{OS}| \cos \varphi_2.$$

Из подобия треугольников OSS_K и $OS_{P_2} S$ следует, что

$$|\overline{SS}_K| |\overline{OS}| = |\overline{SS}_{P_2}| |\overline{OS}_K|,$$

поэтому

$$P_2 = m_{U_2} m_I \cos \varphi_2 |\overline{OS}_K| |\overline{SS}_{P_2}| = m_{P_2} |\overline{SS}_{P_2}|,$$

где

$$m_{P_2} = m_{U_2} m_I \cos \varphi_2 |\overline{OS}_K| = m_I z_1 m_I \cos \varphi_2 \frac{U}{z_1 m_I} = m_I U \cos \varphi_2$$

— масштаб для мощности P_2 , Вт/см.

Как показано в гл. 5, при изменении сопротивления одной из ветвей разветвленной схемы токи и напряжения любых двух ветвей связаны линейными соотношениями. Это положение справедливо не только в цепи с источниками постоянных э. д. с. и токов, но и в цепи с источниками гармонических э. д. с.

и токов, если соответствующие соотношения записаны для комплексных величин.

Пусть изменяется модуль z_2 комплексного сопротивления Z_2 одной из ветвей разветвленной схемы на рис. 7. 22. При этом параметры остальных ветвей неизменны. Тогда ток в любой ветви, например ток $\dot{I}_1$, связан с током $\dot{I}_2$ линейным соотношением

$$\dot{I}_1 = A + B\dot{I}_2,$$

где A и B — комплексные коэффициенты.

При разомкнутой ветви 2 ($\dot{I}_2 = 0$) $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1p}$. Следовательно, $A = \dot{I}_{1p}$. При замкнутой ветви 2 ($\dot{U}_2 = 0$) $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2к}$, $\dot{I}_{1к} = \dot{I}_{1p} + B\dot{I}_{2к}$, откуда $B = (\dot{I}_{1к} - \dot{I}_{1p})/\dot{I}_{2к}$. Таким образом, ток в ветви 1

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1p} + \frac{\dot{I}_{1к} - \dot{I}_{1p}}{\dot{I}_{2к}} \dot{I}_2.$$

На основании теоремы об эквивалентном источнике

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{2p}/(Z_{вх} + Z_2),$$

где $\dot{U}_{2p}$ — напряжение на зажимах ветви 2 при ее размыкании, $Z_{вх}$ — входное сопротивление схемы относительно зажимов, к которым присоединена ветвь 2.

Учитывая $\dot{I}_{2к} = \dot{U}_{2p}/Z_{вх}$, выражение для тока $\dot{I}_1$ можно представить в виде

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1p} + \frac{\dot{I}_{1к} - \dot{I}_{1p}}{Z_{вх} + Z_2} Z_{вх} = \dot{I}_{1p} + \frac{\dot{I}_{1к} - \dot{I}_{1p}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{вх}} e^{j\psi}},$$

где $\psi = \varphi_2 - \varphi_{вх}$.

В этом выражении второе слагаемое аналогично выражению для

тока $\dot{I}$ в схеме на рис. 7. 20 и представляет собой уравнение окружности с хордой $\dot{I}_{1к} - \dot{I}_{1p}$. Таким образом, при изменении модуля сопротивления z_2 ветви 2 годограф тока $\dot{I}_1$ является окружностью. Это положение справедливо как при наличии в цепи только одного источника $\mathcal{E}_1$ в ветви 1, так и при наличии источников в других ветвях.

Если окружность на рис. 7. 23 является круговой диаграммой для тока $\dot{I}_1$, то в силу соотношения $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1p} + B\dot{I}_2$, эта окружность будет и круговой диаграммой для тока $\dot{I}_2$. Отрезок OS пропорционален току $\dot{I}_2$, отрезок OS — току $\dot{I}_1$; отрезки SS_k ,

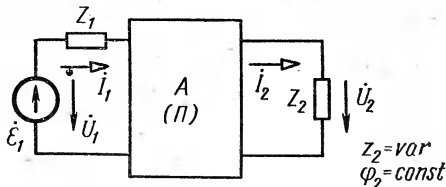


Рис. 7. 22

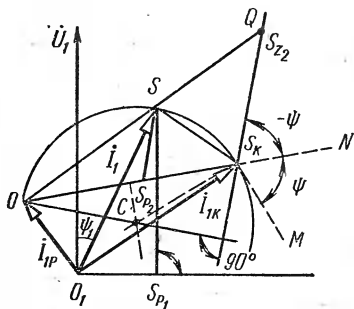


Рис. 7. 23

$|\overline{S_K S_{Z_2}}|$ и $|\overline{S S_{P_2}}|$ пропорциональны соответственно величинам U_2 , z_2 и P_2 . Активная мощность, генерируемая источником $\dot{\mathcal{E}}_1$, пропорциональна отрезку $|\overline{S S_{P_1}}|$ (точка S_{P_1} лежит на пересечении линий, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна вектору $\dot{U}_1$):

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_1 m_{I_1} |\overline{O_1 S}| \cos \varphi_1 = m_{P_1} |\overline{S S_{P_1}}|,$$

где $m_{P_1} = U_1 m_{I_1}$ — масштаб для мощности P_1 .

Масштаб для тока $\dot{I}_1$ (m_{I_1}) выбирается произвольно; масштаб для тока $\dot{I}_2$

$$m_{I_2} = \frac{I_{2K}}{|\overline{OS_K}|} = \frac{I_{2K}}{\frac{|I_{1P} - I_{1K}|}{m_{I_1}}} = m_{I_1} \frac{I_{2K}}{|I_{1P} - I_{1K}|}.$$

Для масштабов m_{U_2} , m_{z_2} и m_{P_2} справедливы записанные ранее выражения, если в них m_I заменить на m_{I_2} , z_1 — на $z_{вх}$, I_K — на I_{2K} , U — на U_{2p} .

Пример 7.7. Построить круговую диаграмму для тока $\dot{I}_1$ в схеме на рис. 7.24 при изменении сопротивления z_2 от нуля до бесконечности и $\varphi_2 =$

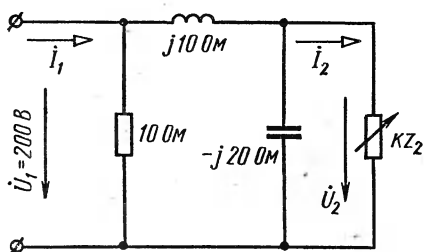


Рис. 7.24

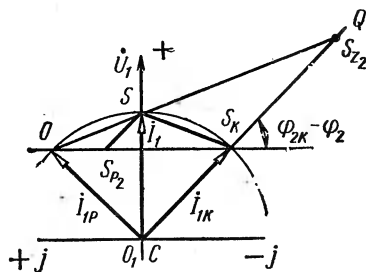


Рис. 7.25

$= 45^\circ$. Из круговой диаграммы определить токи I_1 и I_2 , напряжение U_2 , мощности P_1 и P_2 и сопротивление z_2 для режима, в котором ток $\dot{I}_1$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}_1$.

Решение. Для построения круговой диаграммы найдем токи I_{1P} и I_{1K} :

$$I_{1P} = \frac{200}{10(-j10)} = 20 + j20 \text{ A};$$

$$I_{1K} = \frac{200}{10(j10)} = 20 - j20 \text{ A}.$$

Разность $I_{1P} - I_{1K} = 20 + j20 - 20 + j20 = j40 \text{ A}$. На рис. 7.25 построены векторы $\dot{U}_1$, I_{1P} , I_{1K} и $I_{1P} - I_{1K}$; масштаб для тока $\dot{I}_1$ равен m_{I_1} . Для определения центра окружности найдем угол $\varphi_{вх}$ — аргумент сопротивления $z_{вх}$, т. е. сопротивления со стороны зажимов, к которым присоединена ветвь 2, при замкнутом источнике напряжения $\dot{U}_1$ из выражения

$$z_{вх} = \frac{j10(-j20)}{j(10-20)} = j20 = 20e^{j90^\circ}.$$

Таким образом, $\varphi_{\text{вх}} = 90^\circ$, $\psi = \varphi_2 - \varphi_{\text{вх}} = 45^\circ - 90^\circ = -45^\circ$.

Под углом $-\psi = +45^\circ$ к хорде $\overline{OS_K}$ проводим прямую $\overline{S_K Q}$. Восстанавливая перпендикуляр к середине хорды $\overline{OS_K}$ и опуская перпендикуляр из точки O на продолжение прямой $\overline{S_K Q}$, получим центр окружности C как точку пересечения этих двух перпендикуляров. Рабочая часть окружности расположена по ту же сторону хорды $\overline{OS_K}$, что и прямая $\overline{S_K Q}$.

Напряжение

$$\dot{U}_{2p} = \frac{\dot{U}_1}{j10 - j20} (-j20) = \frac{200}{j10 - j20} (-j20) = 400 \text{ В},$$

ток

$$\dot{I}_{2K} = \dot{U}_{2p} / Z_{\text{вх}} = 400 / j20 = -j20 \text{ А}.$$

Масштаб тока для I_2

$$m_{I_2} = m_{I_1} \frac{I_{2K}}{|I_{1p} - I_{1K}|}.$$

Определим масштабы для напряжения U_2 , сопротивления z_2 и мощности P_2 :

$$m_{U_2} = m_{I_2} z_{\text{вх}};$$

$$m_{z_2} = z_{\text{вх}} / |\overline{OS_K}| = m_{I_2} z_{\text{вх}} / I_{2K};$$

$$m_{P_2} = m_{I_2} U_{2p} \cos \varphi_2.$$

Масштаб для мощности P_1

$$m_{P_1} = U_1 m_{I_1}.$$

Искомые величины получим из круговой диаграммы:

$$I_1 = m_{I_1} |\overline{O_1 S}| = 28 \text{ А};$$

$$I_2 = m_{I_2} |\overline{OS}| = 11 \text{ А};$$

$$U_2 = m_{U_2} |\overline{SS_K}| = 220 \text{ В};$$

$$P_1 = m_{P_1} |\overline{O_1 S}| = 5,6 \cdot 10^3 \text{ Вт};$$

$$P_2 = m_{P_2} |\overline{SS_{P_2}}| = 1690 \text{ Вт};$$

$$z_2 = m_{z_2} |\overline{S_{z_2} S_K}| = 20 \text{ Ом}.$$

Линейные и круговые диаграммы, аналогичные рассмотренным, можно получить при изменении комплексной проводимости. Если ветвь содержит две параллельно соединенных ветви с проводимостями Y_1 и Y_2 , то суммарная комплексная проводимость

$$Y = Y_1 + Y_2 = y_1 e^{-j\varphi_1} + y_2 e^{-j\varphi_2}$$

при изменении y_2 и постоянных y_1 , φ_1 и φ_2 изменяется так, что годографом Y является прямая линия. Годограф сопротивления $Z = 1/Y$ в этом случае представляет собой окружность. При напряжении ветви на зажимах $\dot{U} = \text{const}$ годограф вектора тока $\dot{I} = Y\dot{U}$ — прямая линия, а при $\dot{I} = \text{const}$ годограф вектора напряжения есть окружность, аналогичная показанной на рис. 7.21. Если изменяется модуль проводимости одной из ветвей развет-

ленной схемы при неизменном аргументе, то для напряжения на зажимах другой ветви можно построить круговую диаграмму, аналогичную диаграмме тока I_1 на рис. 7.23.

Линейные и круговые диаграммы получаются и при изменении аргументов комплексных сопротивлений и проводимостей. Так, годографом сопротивления $Z = z_1 e^{j\varphi_1} + z_2 e^{j\varphi_2}$ при изменении аргумента φ_2 и при постоянных z_1 , z_2 и φ_1 является окружность. Годограф проводимости $Y = 1/Z$ представляет собой также окружность.

§ 7.7. Анализ резонансных явлений

Резонанс напряжений. В § 6.6 резонансом напряжений назван такой режим последовательной rLC -цепи (см. рис. 6.22), при котором частота ω источника э. д. с. равна частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, близкой к частоте собственных колебаний цепи (при условии, что потери в цепи сравнительно малы). При $\omega = \omega_0$ реактивное сопротивление цепи $x = x_L - x_C = 0$, поэтому резонанс напряжений можно определить как режим цепи, при котором ее входное реактивное сопротивление равно нулю.

Так как $x = \omega L - 1/\omega C$, то резонанс можно достичь, изменяя частоту или индуктивность (емкость) цепи.

При резонансе

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} = \rho. \quad (7.42)$$

Величина ρ не зависит от частоты и называется характеристическим сопротивлением контура.

Напряжения на индуктивности и емкости при резонансе равны по величине и противоположны по фазе; напряжение на сопротивлении равно напряжению U источника (см. рис. 6.27, в). Отношение напряжений при резонансе

$$Q = U_L/U = U_C/U = \rho I/rI = \rho/r \quad (7.43)$$

называют добротностью контура. Контур, применяемые в радиотехнике, имеют добротности, равные десяткам и сотням единиц.

Реальные элементы (индуктивная катушка и конденсатор) обладают потерями и могут быть представлены последовательными эквивалентными схемами (рис. 7.26, а, б). Сопротивления r_L и r_C отражают наличие потерь. Если индуктивную катушку и конденсатор соединить последовательно, то активное сопротивление схемы $r = r_L + r_C$. В такой схеме

$$1/Q = r/\rho = (r_L + r_C)/\rho = r_L/\rho + r_C/\rho = 1/Q_L + 1/Q_C$$

или

$$Q = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C},$$

где $Q_L = \rho/r_L = \omega_0 L/r_L$ — добротность индуктивной катушки; $Q_C = \rho/r_C = 1/\omega_0 C r_C$ — добротность конденсатора. Добротность контура меньше добротностей катушки и конденсатора.

Если при резонансе ток $i = I_m \sin(\omega_0 t + \psi_i)$, $u_C = U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \psi_i - \pi/2)$, то суммарная энергия магнитного и электрического полей, связанных с индуктивностью и емкостью,

$$W_m + W_e = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \psi_i) + \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \psi_i) = \\ = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2},$$

так как

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{L(\omega_0 CU_{Cm})^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2}.$$

Энергия $W_m + W_e$ не зависит от времени; уменьшение (увеличение) напряжения на емкости и уменьшение энергии электрического поля сопровождаются увеличением (уменьшением) тока и энергии магнитного поля и наоборот.

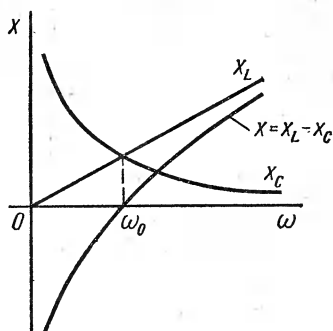


Рис. 7.27

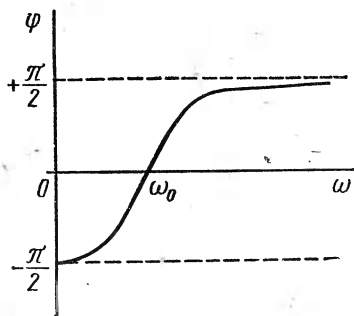


Рис. 7.28

За период T цепь потребляет от источника энергию

$$W = PT = rI_m^2 T = rI_m^2 (T/2).$$

Отношение

$$\frac{W_m + W_e}{W} = \frac{LI_m^2}{2 \frac{rI_m^2 T}{2}} = \frac{L}{rT} = \frac{\omega_0 L}{2r\pi} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (7.44)$$

Следовательно, добротность Q пропорциональна отношению суммарной энергии магнитного и электрического полей, связанных с индуктивностью и емкостью при резонансе, к энергии, рассеиваемой в контуре за период.

На рис. 7.27 и 7.28 показаны соответственно зависимости $x(\omega) = x_L(\omega) - x_C(\omega)$ и $\varphi(\omega) = \arctg x/r$, называемые частот-

ными характеристиками контура. Зависимости тока I и напряжений U_L , U_C от частоты, называемые резонансными характеристиками, строят по соотношениям:

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega L U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{U}{\omega C \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Резонансные характеристики изображены на рис. 7.29.

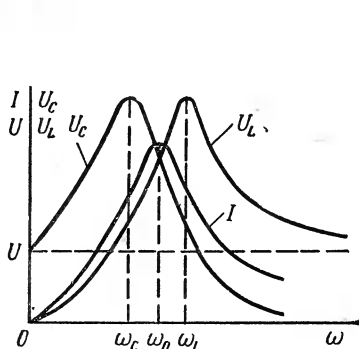


Рис. 7.29

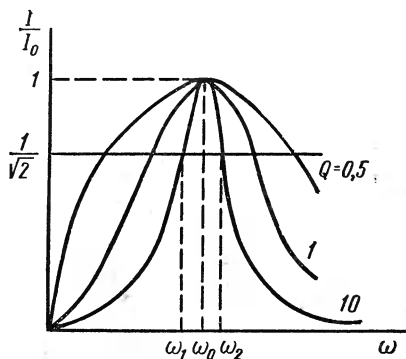


Рис. 7.30

Как видно из резонансных характеристик, ток достигает максимума при $\omega = \omega_0$. Из уравнений $dU_L/d\omega = 0$, $dU_C/d\omega = 0$ получают выражения для частот ω_L и ω_C , при которых напряжения U_L и U_C имеют максимум:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - (r/\rho)^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}};$$

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2 - (r/\rho)^2}{2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}}.$$

При этом $\omega_L > \omega_0$, $\omega_C < \omega_0$; произведение $\omega_L \omega_C = \omega_0^2$. Если добротность $Q < 1/\sqrt{2}$, то значения частот ω_L и ω_C будут мнимыми, т. е. кривые U_L и U_C не имеют максимума.

Выражение для тока можно преобразовать к следующему виду:

$$I = \frac{U}{r \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{r}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

где $I_0 = U/r$ — ток при резонансе.

На рис. 7.30 показаны зависимости I/I_0 от частоты для различных значений добротности. Область частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, в которой $I/I_0 \geq 1/\sqrt{2}$, называют полосой пропускания контура (в этой области частот сопротивление контура мало). Из приведенных кривых видно, что чем больше добротность, тем меньше полоса пропускания, т. е. выше избирательные свойства контура. Для частот ω , близких к ω_0 , разность

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega\omega_0} \approx \frac{2\omega\Delta\omega}{\omega\omega_0} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0},$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. На границах полосы пропускания $2\Delta\omega/\omega_0 = \pm 1/Q$, следовательно, для контура с высокой добротностью $\omega_2 - \omega_1 \approx \omega_0/Q$.

Из выражения, определяющего границы полосы пропускания,

$$Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$$

следует, что граничные частоты ω_1 и ω_2 удовлетворяют соотношению $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$.

Иногда резонансные кривые строят в функции величин, называемых расстройками контура [x/r — обобщенная расстройка; $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ — абсолютная расстройка; $(\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega)$ — относительная расстройка]. Зная зависимости I, U_L, U_C от частоты ω , можно строить зависимости I, U_L, U_C от расстроек.

Резонанс токов. Резонансом токов назван режим цепи на рис. 6.28, при котором частота источника тока $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Если $\omega = \omega_0$, то реактивная проводимость $b = b_L - b_C = 0$. Поэтому резонанс токов можно определить как режим цепи, при котором ее входная реактивная проводимость равна нулю.

Частотные характеристики $U(\omega)$, $I_L(\omega)$, $I_C(\omega)$ цепи на рис. 6.28 аналогичны соответственно частотным характеристикам $I(\omega)$, $U_C(\omega)$, $U_L(\omega)$ цепи на рис. 6.22. На рис. 7.31 показана схема, содержащая две параллельно соединенные ветви. Частота ω_p , при которой в цепи наступает резонанс токов, определяется из условия $b = 0$:

$$b = b_1 + b_2 = -\frac{1/\omega_p C}{r_1^2 + (1/\omega_p C)^2} + \frac{\omega_p L}{r_2^2 + (\omega_p L)^2} = 0.$$

После преобразований получаем

$$\frac{r_1^2 + (\omega_p L)^2}{L} = \frac{1 + r_2^2 (\omega_p C)^2}{C},$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - r_2^2}{L/C - r_1^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - r_2^2}{\rho^2 - r_1^2}},$$

где $\omega_0 = 1/LC$; $\rho = \sqrt{L/C}$.

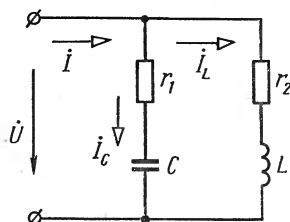


Рис. 7.31

Как видно из выражения для ω_p , резонанс токов возможен при одновременном выполнении условий $\rho > r_1$, $\rho > r_2$ или $\rho < r_1$, $\rho < r_2$. Если эти условия не выполняются, то ω_p — мнимое число. В случае, когда $r_1 = r_2$, $|\omega_p = \omega_0$. При $r_1 = r_2 = \rho$, $\omega_p = 0/0$, т. е. резонанс токов наступает при любой частоте источника. При этом эквивалентное сопротивление контура

$$Z' = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(\rho + j\omega L) \left(\rho - j \frac{1}{\omega C} \right)}{2\rho + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\rho^2 \left[2 + j \left(\frac{\omega L}{\rho} - \frac{1}{\rho \omega C} \right) \right]}{\rho \left[2 + j \left(\frac{\omega L}{\rho} - \frac{1}{\rho \omega C} \right) \right]} = \rho$$

не зависит от частоты. Следовательно, ток $\dot{I} = \dot{U}/\rho$ в неразветвленной части схемы также не зависит от частоты.

Если r_1 и r_2 — сопротивления, учитывающие потери реальных конденсатора и индуктивной катушки ($r_1 = r_C$, $r_2 = r_L$), то, как правило, $\rho \gg r_1$, $\rho \gg r_2$; при этом $\omega_p \approx \omega_0$.

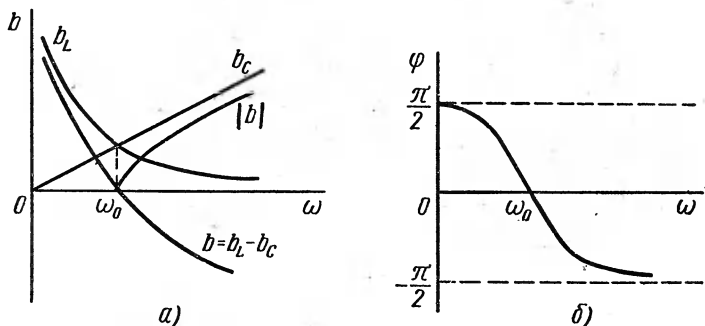


Рис. 7.32

В контуре без потерь ($r_1 = r_2 = 0$) ток $I = bU = 0$; токи $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_C$ равны по величине и противоположны по фазе. На рис. 7.32, а, б построены соответственно частотные характеристики $b_C(\omega)$, $b_L(\omega)$, $b(\omega)$, $|b(\omega)|$ и $\varphi(\omega) = \text{arctg}(b/g)$ контура с потерями, дуального последовательному контуру rLC .

Эквивалентное сопротивление контура с потерями

$$Z' = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(r_1 + jx_1)(r_2 + jx_2)}{r_1 + r_2 + j(x_1 + x_2)} = \frac{(r_1 + jx_1)(r_2 + jx_2)}{r + jx},$$

где $x_1 = -1/\omega C$; $x_2 = \omega L$; $r = r_1 + r_2$; $x = x_1 + x_2$. В результате простых преобразований

$$Z' = r_s + jx_s,$$

где

$$r_s = \frac{r_1 z_2^2 + r_2 z_1^2}{r^2 + x^2}; \quad x_s = \frac{x_1 z_2^2 + x_2 z_1^2}{r^2 + x^2}.$$

При резонансе $x_{s,p} = 0$. Для контуров с высокой добротностью $\omega_p \approx \omega_0$ и $x \approx \omega_0 L - 1/\omega_0 C \approx 0$; сопротивления $z_1 \approx 1/\omega_0 C$; $z_2 \approx \omega_0 L$.

Резонансное значение сопротивления r_θ

$$r_{\theta, p} = \frac{r_1 (\omega_0 L)^2 + r_2 \left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}{r^2} = \frac{(\omega_0 L)^2}{r} = \frac{1}{r (\omega_0 C)^2} = \frac{\rho^2}{r} = Q\rho.$$

Если $\omega \rightarrow 0$, то $r_\theta \rightarrow r_2$, $x_\theta \rightarrow \omega L$. При $\omega \rightarrow \infty$ $r_\theta \rightarrow r_1$, $x_\theta \rightarrow -1/\omega C$. На рис. 7.33 показаны зависимости r_θ , x_θ и $z = \sqrt{r_\theta^2 + x_\theta^2}$ от частоты; при резонансе сопротивление контура имеет наибольшее значение. Если цепь рис. 7.31 присоединена к источнику тока, то зависимость $U(\omega)$ аналогична зависимости $z(\omega)$. В случае, когда контур присоединен к источнику напряжения, зависимость тока в неразветвленной части схемы от частоты строится по соотношению $I = U/z(\omega)$.

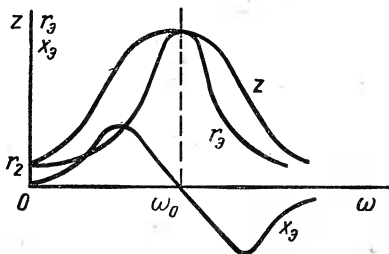


Рис. 7.33

Резонанс в сложных цепях. В цепях, содержащих несколько ветвей с индуктивностями и емкостями, уравнения $x=0$, $b=0$ (x и b — соответственно входное реактивное сопротивление и входная реактивная проводимость) могут иметь несколько вещественных значений корней. При этом нулевые значения также могут принимать реактивные сопротивления или проводимости отдель-

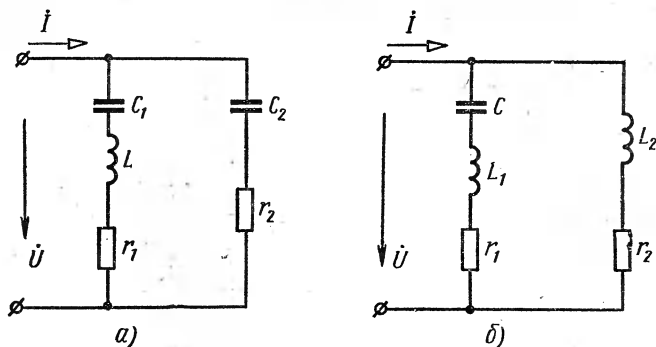


Рис. 7.34

ных ветвей. Это означает, что в цепи возможны несколько резонансов. Например, в сложном параллельном контуре на рис. 7.34, а при $\omega_1 = 1/\sqrt{LC_1}$ в первой ветви наступает резонанс напряжений, а при $\omega_2 \approx 1/\sqrt{LC}$ [$C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$; потери малы] — резонанс токов. В сложном параллельном контуре на рис. 7.34, б при $\omega_1 \approx 1/\sqrt{LC}$ ($L = L_1 + L_2$; потери в контуре малы) имеет место резонанс токов, а при $\omega_2 = 1/\sqrt{L_1 C}$ — резонанс напряжений в пер-

вой ветви. Зависимости полного сопротивления от частоты $z(\omega)$ контуров рис. 7.34, а, б приведены соответственно на рис. 7.35, а, б.

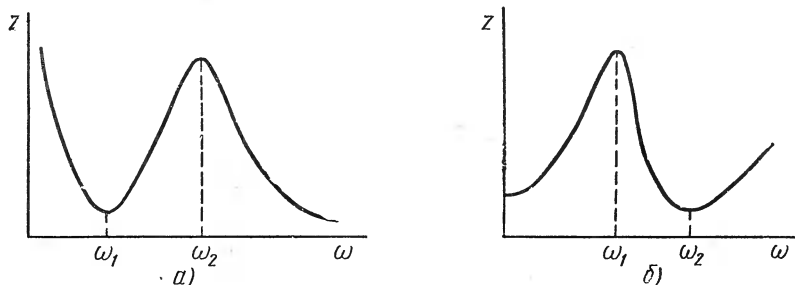


Рис. 7.35

Если контуры присоединены к источнику тока, то зависимость напряжения на зажимах контура от частоты аналогична зависимости $z(\omega)$.

§ 7.8. Основные алгебраические выражения для входных и передаточных функций

Расчет токов и напряжений ветвей схемы может быть сведен, как видно из формул (5.10) и (5.19), к расчету входных и взаимных сопротивлений и проводимостей, коэффициентов передачи тока и напряжения, которые называются входными и передаточными (схемными) функциями. В цепи с гармоническими токами и напряжениями схемные функции представляют собой в общем случае комплексные величины.

Любые входные и передаточные функции выражаются через определители определенных матриц узловых проводимостей, контурных сопротивлений или проводимостей сечений и (или) алгебраические дополнения элементов этих определителей. На рис. 7.36 показана схема, в которой выделены две ветви: m и n . В схеме имеется только один источник энергии — источник тока $\dot{J}_m$. Для всех y узлов этой схемы можно записать матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1i}Y_{ij}Y_{jk}Y_{kl} & \dots & Y_{1,y} \\ \vdots & & & & \\ Y_{i1} & \dots & Y_{ii}Y_{ij}Y_{jk}Y_{kl} & \dots & Y_{i,y} \\ Y_{j1} & \dots & Y_{ji}Y_{ij}Y_{jk}Y_{kl} & \dots & Y_{j,y} \\ Y_{k1} & \dots & Y_{ki}Y_{ij}Y_{jk}Y_{kl} & \dots & Y_{k,y} \\ Y_{l1} & \dots & Y_{li}Y_{ij}Y_{jk}Y_{kl} & \dots & Y_{l,y} \\ \vdots & & & & \\ Y_{y,1} & \dots & Y_{yi}Y_{ij}Y_{jk}Y_{kl} & \dots & Y_{y,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_i \\ \dot{\Phi}_j \\ \dot{\Phi}_k \\ \dot{\Phi}_l \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ J_m \\ 0 \\ 0 \\ -J_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.45)$$

Матрица узловых токов в правой части уравнения (7.45) содержит только два ненулевых элемента в i -й и l -й строках.

Если принять потенциал y -го узла $\phi_y = 0$ и отбросить y -е уравнение (соответствует вычеркиванию y -го столбца и y -й строки

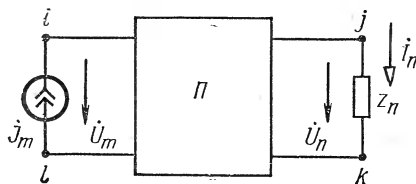


Рис. 7.36

в неопределенной матрице узловых проводимостей), то потенциалы узлов i , j , k и l определяют следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_i &= \frac{\Delta_{ii}^{(y)} - \Delta_{li}^{(y)}}{\Delta^{(y)}} j_m; \quad \phi_j = \frac{\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{lj}^{(y)}}{\Delta^{(y)}} j_m; \\ \phi_k &= \frac{\Delta_{ik}^{(y)} - \Delta_{lk}^{(y)}}{\Delta^{(y)}} j_m; \quad \phi_l = \frac{\Delta_{il}^{(y)} - \Delta_{ll}^{(y)}}{\Delta^{(y)}} j_m,\end{aligned}$$

где $\Delta^{(y)}$ — определитель определенной матрицы узловых проводимостей; $\Delta_{ii}^{(y)}$, $\Delta_{li}^{(y)}$, ..., $\Delta_{il}^{(y)}$ — алгебраические дополнения элементов Y_{ii} , Y_{li} , ..., Y_{il} определителя определенной матрицы, причем $\Delta_{ii}^{(y)} = \Delta_{il}^{(y)}$.

Учитывая, что $\dot{U}_m = \phi_i - \phi_l$, $\dot{U}_n = \phi_j - \phi_k$, определяют выражения для следующих функций:

входного сопротивления m -й ветви

$$Z_{mm} = \frac{\dot{U}_m}{j_m} = \frac{\Delta_{ii}^{(y)} - 2\Delta_{li}^{(y)} + \Delta_{ll}^{(y)}}{\Delta^{(y)}}, \quad (7.46)$$

взаимного сопротивления m -й и n -й ветвей

$$Z_{nm} = \frac{\dot{U}_n}{j_m} = \frac{\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{lj}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)} - \Delta_{lk}^{(y)}}{\Delta^{(y)}}, \quad (7.47)$$

коэффициента передачи напряжения

$$K_{nm}^{(u)} = \frac{\dot{U}_n}{\dot{U}_m} = \frac{\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{lj}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)} - \Delta_{lk}^{(y)}}{\Delta_{ii}^{(y)} - 2\Delta_{li}^{(y)} + \Delta_{ll}^{(y)}}. \quad (7.48)$$

Входная проводимость m -й ветви

$$Y_{mm} = j_m / \dot{U}_m = 1 / Z_{mm}. \quad (7.49)$$

Поскольку ток в n -й ветви $\dot{I}_n = Y_n \dot{U}_n$ ($Y_n = 1 / Z_n$), то коэффициент передачи тока

$$K_{nm}^{(i)} = \dot{I}_n / j_m = Z_{nm} Y_n, \quad (7.50)$$

$$Y_{nm} = \dot{I}_n / \dot{U}_m = K_{nm}^{(u)} Y_n. \quad (7.51)$$

Выражения для функций (7.46) — (7.48) упрощаются, если вместо $\phi_y = 0$ принять $\phi_l = 0$ и отбросить l -е уравнение (соответствует вычеркиванию l -го столбца и l -й строки неопределенной матрицы):

$$Z_{mm} = \frac{\Delta_{ii}^{(y)}}{\Delta^{(y)}}; \quad (7.52)$$

$$Z_{nm} = \frac{\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}}{\Delta^{(y)}}; \quad (7.53)$$

$$K_{nm}^{(u)} = \frac{\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}}{\Delta_{ii}^{(y)}}. \quad (7.54)$$

Определитель $\Delta^{(y)}$ определенной матрицы узловых проводимостей в соотношениях (7.52), (7.53) и (7.46), (7.47) имеет одинаковое значение; алгебраические дополнения элементов Y_{ii} , Y_{ij} , Y_{ik} в формулах (7.52) — (7.54) не равны алгебраическим дополнениям тех же элементов в формулах (7.46) — (7.48).

Симметричное алгебраическое дополнение $\Delta_{ii}^{(y)}$ в соотношениях (7.52), (7.54) представляет собой определитель определенной матрицы узловых проводимостей схемы, которая получается из схемы на рис. 7.36, если узлы i и l объединены (вычеркивание i -го столбца соответствует заземлению i -го узла).

При вычислении передаточных функций не обязательно применять симметричную определенную матрицу. Можно перейти

к определенной матрице путем вычеркивания в неопределенной матрице столбца и строки с различными номерами.

В схеме на рис. 7.36 в качестве ветвей дерева можно выбрать источник тока $\dot{J}_m$ и сопротивление Z_n . Тогда из уравнений с напряжениями ветвей дерева

$$\dot{U}_m = \frac{\Delta_{mm}^{(c)}}{\Delta^{(c)}} \dot{J}_m; \quad \dot{U}_n = \frac{\Delta_{mn}^{(c)}}{\Delta^{(c)}} \dot{J}_m,$$

где $\Delta^{(c)}$ — определитель матрицы проводимостей сечений; $\Delta_{mm}^{(c)}$, $\Delta_{mn}^{(c)}$ — алгебраические дополнения элементов этого определителя. Из выражений для напряжений $\dot{U}_m$ и $\dot{U}_n$ следует:

$$Z_{mm} = \Delta_{mm}^{(c)} / \Delta^{(c)}; \quad (7.55)$$

$$Z_{nm} = \Delta_{mn}^{(c)} / \Delta^{(c)}; \quad (7.56)$$

$$K_{nm}^{(u)} = \Delta_{mn}^{(c)} / \Delta_{mm}^{(c)}. \quad (7.57)$$

В формулах (7.55), (7.57) алгебраическое дополнение $\Delta_{mm}^{(c)}$ представляет собой определитель матрицы проводимостей сечений схемы, которая получается при замыкании m -й ветви дерева в схеме на рис. 7.36. На рис. 7.37 изображена схема, в которой выделены m -я и n -я ветви и которая содержит только один источник энергии — источник э. д. с. $\mathcal{E}_m$. Контур в этой схеме выбирают так, чтобы токи в выделенных ветвях были равны соответственно контурным токам m -го и n -го контуров. Из контурных уравнений находят

$$I_m = \frac{\Delta_{mm}^{(k)}}{\Delta^{(k)}} \dot{\mathcal{E}}_m; \quad I_n = \frac{\Delta_{mn}^{(k)}}{\Delta^{(k)}} \dot{\mathcal{E}}_m,$$

где $\Delta^{(k)}$ — определитель определенной матрицы контурных сопротивлений; $\Delta_{mm}^{(k)}$, $\Delta_{mn}^{(k)}$ — алгебраические дополнения элементов этого определителя.

Из выражений для токов получаются следующие функции: входная проводимость m -й ветви

$$Y_{mm} = I_m / \dot{\mathcal{E}}_m = \Delta_{mm}^{(k)} / \Delta^{(k)}; \quad (7.58)$$

взаимная проводимость m -й и n -й ветвей

$$Y_{nm} = I_n / \dot{\mathcal{E}}_m = \Delta_{mn}^{(k)} / \Delta^{(k)}; \quad (7.59)$$

коэффициент передачи тока

$$K_{nm}^{(i)} = I_n / I_m = \Delta_{mn}^{(k)} / \Delta_{mm}^{(k)}. \quad (7.60)$$

Входное сопротивление m -й ветви можно найти как величину, обратную проводимости (7.58). Учитывая, что напряжение $\dot{U}_n = Z_n I_n$, выражения для взаимного сопротивления и коэффициента передачи напряжения записываются в виде:

$$Z_{nm} = \dot{U}_n / I_m = K_{nm}^{(i)} Z_n; \quad (7.61)$$

$$K_{nm}^{(u)} = \dot{U}_n / \dot{\mathcal{E}}_m = Y_{nm} Z_n. \quad (7.62)$$

Формулы (7.58) ÷ (7.60) дуальны (7.55) ÷ (7.57). В выражениях (7.58), (7.60) алгебраическое дополнение $\Delta_{mm}^{(k)}$ представляет собой определитель определенной матрицы контурных сопротивлений схемы, которая получается при размыкании m -го контура в схеме на рис. 7.37 (вычеркивание m -го столбца эквивалентно приравнению нулю тока m -го контура).

Если через ветви m и n замыкается более одного контурного тока, то также можно установить соответствующие выражения для схемных функций. В частности, если через ветвь m замыкается контурный ток I_m , а через ветвь n — контурные токи I_p и I_q в противоположных направлениях (так что в сопротивлении Z_n ток $I_n = I_p - I_q$), то для функций Y_{nm} и $K_{nm}^{(i)}$ будут спра-

ведливости выражения, аналогичные выражениям (7.53) и (7.54):

$$Y_{nm} = \frac{\Delta_{mp}^{(k)} - \Delta_{mq}^{(k)}}{\Delta_{(k)}}; \quad (7.63)$$

$$K_{nm}^{(i)} = \frac{\Delta_{mp}^{(k)} - \Delta_{mq}^{(k)}}{\Delta_{mn}^{(k)}}. \quad (7.64)$$

Особенности алгебраических методов расчета входных и передаточных функций. Трудоемкость вычисления определителей, алгебраических дополнений и, следовательно, входных и передаточных функций зависит в первую очередь от сложности схемы; число слагаемых, получаемых при разложении определителей и их алгебраических дополнений, растет с увеличением числа узлов и ветвей схемы.

При разложении определителей (алгебраических дополнений) некоторые слагаемые попарно имеют одинаковую величину и противоположные знаки и сокращаются; число сокращающихся слагаемых может быть даже больше числа слагаемых, которые входят в окончательное выражение для определителя (алгебраического дополнения), и резко возрастает при усложнении схемы.

Наличие одинаковых по величине и противоположных по знаку слагаемых объясняется тем, что проводимость (сопротивление) ветви записывают в соответствующую матрицу как с положительным, так и с отрицательным знаком. В частности, в неопределенную матрицу узловых проводимостей проводимость каждой ветви записывается два раза с положительным знаком на главной диагонали как слагаемое собственной проводимости узлов и два раза с отрицательным знаком вне главной диагонали как общая проводимость узлов.

Для одной и той же схемы число слагаемых, получаемых при разложении определителей $\Delta^{(y)}$, $\Delta^{(e)}$ и $\Delta^{(k)}$ и их алгебраических дополнений (с учетом сокращающихся слагаемых), в общем случае не одинаково. Кроме того, общее число слагаемых может зависеть от выбора заземленного узла, дерева, контуров, а также от номеров строки и столбца, вычеркиваемых из неопределенных матриц. Число положительных слагаемых после сокращения во всех случаях одно и то же.

Непосредственное вычисление только несокращающихся слагаемых определителей и алгебраических дополнений возможно при использовании *топологических* формул, которые рассматриваются в следующей главе.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДВУХПОЛЮСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ БЕЗ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

§ 8.1. Топологические формулы для расчета определителей матриц узловых проводимостей и проводимостей сечений

Топологическая формула для расчета определителя матрицы узловых проводимостей. Определитель определенной матрицы узловых проводимостей, называемый в целях краткости узловым определителем $\Delta^{(y)}$, равен сумме произведений проводимостей ветвей всех деревьев схемы:

$$\Delta^{(y)} = \sum_{j=1}^{n_d} Y_{j1} Y_{j2} \dots Y_{j(y-1)}, \quad (8.1)$$

где $Y_{j1} Y_{j2} \dots Y_{j(y-1)}$ — произведение проводимостей ветвей j -го дерева, n_d — число всех возможных деревьев схемы.

Выражение (8.1) представляет собой топологическую формулу для расчета узлового определителя.

Доказательство формулы (8.1) следует из равенства (7.30), согласно которому узловой определитель вычисляют как определитель произведения матриц:

$$\Delta^{(y)} = \det (\mathbf{A} \mathbf{Y}^{(b)} \mathbf{A}^T).$$

Если обозначить $\mathbf{A} \mathbf{Y}^{(b)} = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{P}_2$, то

$$\Delta^{(y)} = \det \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2.$$

В теории матриц доказывается следующая теорема об определителе произведения двух матриц (теорема Бине — Коши): *определитель произведения матрицы $\mathbf{P}_1$ размера $m \times n$ на матрицу $\mathbf{P}_2$ размера $n \times m$ ($m \leq n$) равен сумме произведений всех соответствующих миноров максимального порядка m матриц $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$.* Здесь соответствующими называют миноры матриц $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, которые образованы столбцами матрицы $\mathbf{P}_1$ и строками матрицы $\mathbf{P}_2$, имеющими одинаковые номера. Если минор матрицы $\mathbf{P}_1$ состоит из столбцов этой матрицы с номерами $k_1, k_2, \dots, k_m$, то соответствующий ему минор матрицы $\mathbf{P}_2$ должен состоять из строк этой матрицы с номерами $k_1, k_2, \dots, k_m$.

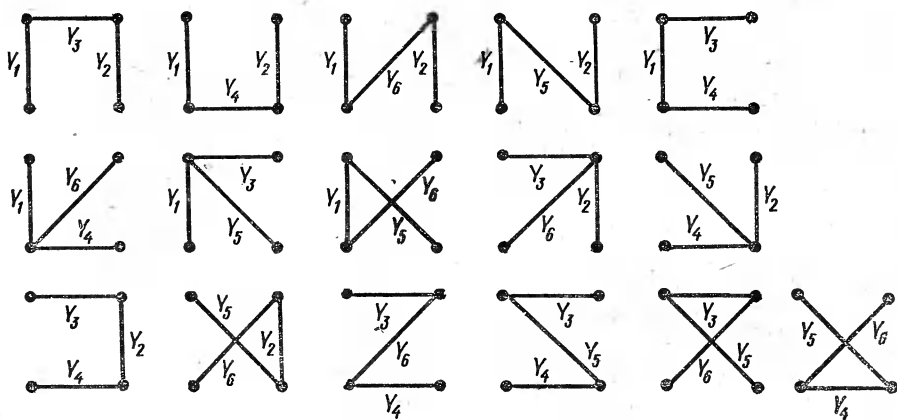
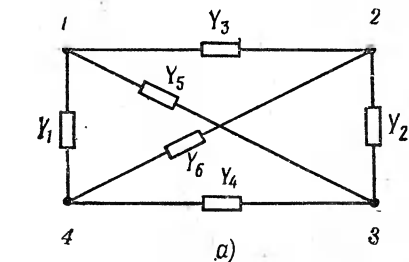
На основании сформулированной теоремы определитель $\Delta^{(y)}$ равен сумме произведений миноров максимального порядка матриц $\mathbf{P}_1 = \mathbf{A} \mathbf{Y}^{(b)}$ и $\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}^T$, причем порядок миноров $m = y - 1$. На величину определителя $\Delta^{(y)}$ влияют лишь миноры, отличные от нуля (ненулевые миноры).

В гл. 2 было доказано, что все неособенные подматрицы порядка $y - 1$ матрицы $\mathbf{A}$ соответствуют деревьям схемы, а их определители равны ± 1 , т. е. все ненулевые миноры порядка

$y-1$ соответствуют деревьям схемы и равны ± 1 . Так как $Y^{(n)}$ — диагональная матрица, при умножении матрицы A на матрицу $Y^{(n)}$ элементы k -го столбца матрицы A умножаются на проводимость Y_k k -й ветви схемы. Элементам $+1$, -1 и 0 в k -м столбце матрицы A соответствуют элементы $+Y_k$, $-Y_k$ и 0 в k -м столбце произведения матриц $AY^{(n)}$. Следовательно, все ненулевые миноры порядка $y-1$ матрицы $P_1 = AY^{(n)}$ соответствуют деревьям схемы.

С помощью разложения j -го ненулевого минора можно доказать, что его величина равна произведению проводимостей ветвей j -го дерева, взятому с положительным (отрицательным) знаком: $\pm Y_{j1}Y_{j2} \dots Y_{j,y-1}$ (см. аналогичное доказательство величины ненулевого минора матрицы A , приведенное в гл. 2).

Ненулевые миноры порядка $y-1$ матрицы $P_2 = A^T$ соответ-



б)

Рис. 8.1

вуют деревьям схемы и равны ± 1 , так как взаимная перестановка строк и столбцов не меняет величины минора. Знаки соответствующих ненулевых миноров матрицы $P_1 = AY^{(n)}$ и $P_2 = A^T$ одинаковы (каждая пара миноров соответствует одному и тому же дереву), поэтому j -е произведение соответствующих миноров равно произведению проводимостей ветвей j -го дерева, взятому с положительным знаком. Сумма произведений всех соответствующих миноров матриц $AY^{(n)}$ и A^T равна сумме произведений проводимостей ветвей всех деревьев схемы.

На рис. 8.1, а показана схема, все деревья которой изображены на рис. 8.1, б. В соответствии с формулой (8.1) определи-

тель этой схемы

$$\Delta^{(y)} = Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_2 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_4 Y_6 + \\ + Y_1 Y_2 Y_5 + Y_1 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_5 Y_6 + Y_2 Y_3 Y_6 + Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_5 Y_6 + \\ + Y_2 Y_4 Y_5 + Y_3 Y_4 Y_6 + Y_3 Y_4 Y_5 + Y_3 Y_5 Y_6 + Y_4 Y_5 Y_6.$$

Число деревьев схемы. Если применить теорему об определителе произведения двух матриц к произведению AA^T , то число деревьев схемы

$$n_d = \det(AA^T). \quad (8.2)$$

Действительно, соответствующие ненулевые миноры порядка $y-1$ матриц A и A^T одинаковы и равны ± 1 ; число таких миноров совпадает с числом деревьев.

Из формулы (8.1) вытекает еще один способ нахождения числа деревьев. Если проводимость каждой ветви схемы принять равной единице, то узловой определитель будет равен числу деревьев.

Топологическая формула для расчета определителя матрицы проводимостей сечений. Ненулевые миноры порядка $y-1$ матрицы сечений Q , так же как и миноры узловой матрицы A , соответствуют деревьям схемы и равны ± 1 (см. гл. 2). Поэтому определитель матрицы проводимостей сечений

$$\Delta^{(c)} = \det QY^{(B)}Q^T$$

равен сумме произведений проводимостей ветвей деревьев схемы:

$$\Delta^{(c)} = \sum_{j=1}^{n_d} Y_{j1} Y_{j2} \dots Y_{jy-1}. \quad (8.3)$$

Таким образом, $\Delta^{(y)} = \Delta^{(c)}$.

Равенство определителей $\Delta^{(y)}$ и $\Delta^{(c)}$ можно доказать непосредственно из выражений для матриц $Y^{(y)}$ и $Y^{(c)}$. Матрица проводимостей сечений

$$Y^{(c)} = QY^{(B)}Q^T,$$

где $Q = A_d^{-1}A$.

Следовательно,

$$Y^{(c)} = A_d^{-1}AY^{(B)}A^T(A_d^{-1})^T = A_d^{-1}Y^{(y)}(A_d^{-1})^T,$$

где $Y^{(y)} = AY^{(B)}A^T$. Матрицы A_d^{-1} , $Y^{(y)}$, $(A_d^{-1})^T$ являются квадратными. Известно, что определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей*, поэтому

$$\det Y^c = \det A_d^{-1} \det Y^{(y)} \det (A_d^{-1})^T.$$

Определитель подматрицы A_d , соответствующей дереву, равен ± 1 . Отсюда

$$\det Y^{(c)} = (\pm 1) \det Y^{(y)} (\pm 1) = \det Y^{(y)}.$$

* Для двух квадратных матриц сформулированное положение можно рассматривать как частный случай теоремы Бине — Коши.

Ненулевые миноры порядка $y-1$ матрицы A (матрицы Q) соответствуют деревьям и равны ± 1 при любом заземленном узле (любых сечениях). Поэтому справедливо следующее утверждение: узловой определитель (определитель матрицы проводимостей сечений) имеет единственное значение независимо от выбора заземленного узла (сечений).

§ 8.2. Топологические формулы для расчета алгебраических дополнений элементов узлового определителя

Симметричное алгебраическое дополнение. Алгебраическое дополнение $\Delta_{jj}^{(y)}$, получаемое вычеркиванием j -го столбца и j -й строки из определителя $\Delta^{(y)}$, представляет собой определитель схемы, образуемой при замыкании j -го узла с базисным (заземленным) узлом. Поэтому для расчета $\Delta_{jj}^{(y)}$ справедлива формула, аналогичная (8.1).

Заземление j -го узла приводит к вычеркиванию j -й строки в узловой матрице A . Поэтому

$$\Delta_{jj}^{(y)} = A_{-j} Y^{(v)} A_{-j}^T, \quad (8.4)$$

где A_{-j} — узловая матрица схемы, в которой j -й узел заземлен. Эту матрицу получают вычеркиванием j -й строки в матрице

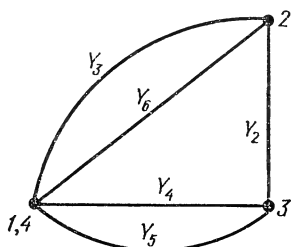


Рис. 8.2

А Применение теоремы Бине — Коши к выражению (8.4) приводит к топологической формуле для $\Delta_{jj}^{(y)}$, аналогичной (8.1). Например, при объединении узлов 1 и 4 в схеме на рис. 8.1, а получают схему, граф которой показан на рис. 8.2. Деревья графа на рис. 8.2 приведены на рис. 8.3, а. Алгебраическое дополнение $\Delta_{11}^{(y)}$ в соответствии с топологической формулой состоит из восьми положительных слагаемых, равных произведению проводимостей ветвей деревьев:

$$\Delta_{11}^{(y)} = Y_2 Y_3 + Y_2 Y_6 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_4 Y_6 + Y_3 Y_5 + Y_5 Y_6 + Y_2 Y_4.$$

Подграфы исходной схемы (см. рис. 8.1, а), образуемые ветвями деревьев на рис. 8.3, а, показаны на рис. 8.3, б. Они содержат все узлы схемы, имеют число ветвей $y-2$ и состоят из двух частей, одна из которых может быть отдельным узлом (узел 1 или узел 4).

Подграф, состоящий из двух изолированных частей (одна из которых, в частности, является узлом), содержащий все узлы схемы и не имеющий контуров, называют 2-деревом (читается два-деревом). Чтобы подчеркнуть, какие узлы находятся в различных частях 2-дерева, можно применить обозначение $T_2(i, j)$. Например, 2-деревья на рис. 8.3, б являются 2-деревьями типа $T_2(1, 4)$ (узлы 1 и 4 находятся в различных частях 2-дерева).

При замыкании i -го и j -го узлов 2-дерева получают дерево с числом ветвей, равным $y-2$. Таким образом, алгебраическое дополнение $\Delta_{jj}^{(y)}$ равно сумме произведений проводимостей ветвей всех 2-деревьев типа $T_2(j, y)$, если y — заземленный узел.

Несимметричное алгебраическое дополнение. Для вычисления алгебраического дополнения $\Delta_{jk}^{(y)}$ ($j \neq k$) необходимо найти деревья двух схем: схемы, получаемой при объединении j -го узла с базисным, и схемы, получаемой при объединении k -го узла

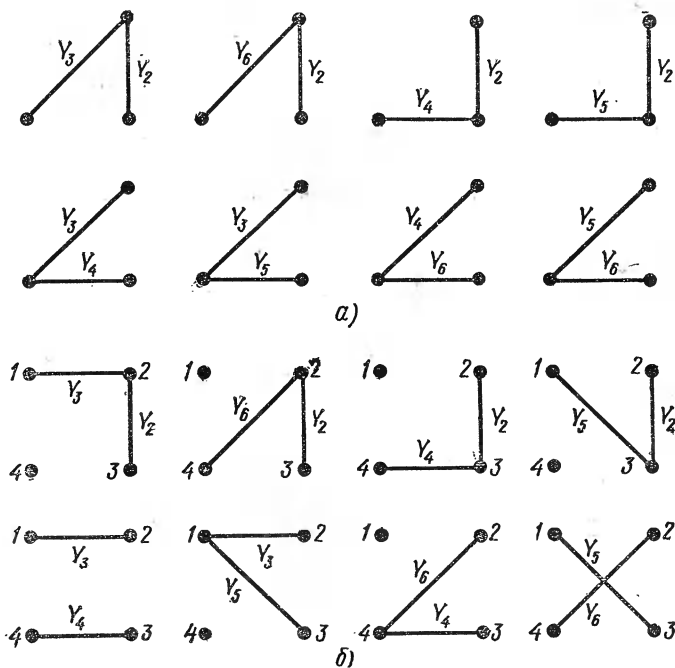


Рис. 8.3

с базисным. Часть деревьев этих двух схем попарно состоит из одинаковых ветвей. Такие деревья называют общими деревьями двух схем. Сумма произведений проводимостей ветвей общих деревьев равна алгебраическому дополнению $\Delta_{jk}^{(y)}$.

Для доказательства сформулированного топологического правила можно записать

$$\Delta_{jk}^{(y)} = (-1)^{j+k} M_{jk},$$

где M_{jk} — определитель матрицы, которая остается после вычеркивания j -й строки и k -го столбца в матрице $\mathbf{Y}^{(y)}$. Так как $\mathbf{Y}^{(y)} = \mathbf{A} \mathbf{Y}^{(b)} \mathbf{A}^T$, вычеркивание j -й строки (k -го столбца) в матрице $\mathbf{Y}^{(y)}$ эквивалентно вычеркиванию j -й строки в матрице $\mathbf{A}$ (k -го столбца

в матрице A^T). Следовательно,

$$M_{jk} = \det (A_{-j} Y^{(B)} A_{-k}^T), \quad (8.5)$$

где A_{-j} , A_{-k} — узловые матрицы схем, в которых заземлен j -й или k -й узел. Такие матрицы получают при вычеркивании j -й или k -й строки в матрице A .

Ненулевые миноры порядка $y-2$ матрицы $A_{-j} (A_{-k})$ соответствуют деревьям схемы с заземленным j -м узлом (заземленным k -м узлом) и равны ± 1 . Ненулевые миноры произведения $A_{-j} Y^{(B)}$ соответствуют деревьям схемы с заземленным j -м узлом и равны произведениям проводимостей ветвей деревьев этой схемы, взятым с положительным (отрицательным) знаком.

По теореме Бине — Коши определитель (8.5) равен сумме произведений миноров порядка $y-2$ матриц $A_{-j} Y^{(B)}$ и A_{-k}^T . Эти произведения отличны от нуля только в том случае, если миноры матриц $A_{-j} Y^{(B)}$ и A_{-k}^T соответствуют общим деревьям двух схем (в противном случае ненулевой минор, соответствующий дереву одной схемы, умножается на минор, не соответствующий дереву другой схемы и, следовательно, равный нулю). Таким образом, слагаемые M_{jk} представляют собой произведения проводимостей ветвей общих деревьев двух схем с заземленным j -м или k -м узлом.

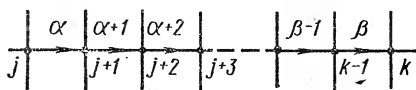


Рис. 8.4

Произведение каждой пары миноров матриц A_{-j} и A_{-k} , соответствующих общим деревьям двух схем, равно $(-1)^{j+k}$. Действительно, если деревья схем с заземленными j -м и k -м узлами содержат одни и те же ветви исходной схемы, то в этой схеме существует путь между этими узлами. Ветви, по которым проходит этот путь, принадлежат рассматриваемой паре общих деревьев двух схем. Поскольку нумерация узлов и ветвей, а также ориентация ветвей произвольны, то можно считать, что узлы и ветви пути пронумерованы подряд, причем ветви ориентированы так, как показано на рис. 8.4. Тогда подматрица A_d узловой матрицы исходной схемы, соответствующая $y-2$ ветвям рассматриваемых общих деревьев, имеет вид

$$A_d = \begin{array}{c} \dots \quad \alpha \quad \alpha+1 \quad \alpha+2 \quad \alpha+3 \quad \dots \quad \beta-1 \quad \beta \quad \dots \\ \vdots \\ j \\ j+1 \\ j+2 \\ j+3 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \end{array} \begin{array}{|cccccccc|} \hline & & & & & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Если к столбцу α прибавить столбцы $\alpha+1, \alpha+2, \dots, \beta$, то матрица A_d преобразуется в матрицу

$$A'_d = \begin{array}{c} \vdots \\ j \\ j+1 \\ j+2 \\ j+3 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \end{array} \begin{array}{ccccccc} \dots & \alpha & \alpha+1 & \alpha+2 & \alpha+3 & \dots & \beta-1 & \beta & \dots \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \end{array}$$

Таким образом, с помощью линейной комбинации столбцов матрицы A_d получена матрица A'_d , у которой в столбце α имеется 1 в j -й и -1 в k -й строках, причем все остальные элементы столбца α равны нулю.

Миноры матриц A_{-j} и A_{-k} рассматриваемой пары общих деревьев — это определители матриц, полученных из матрицы A_d вычеркиванием j -й или k -й строк. Эти определители равны определителям матриц, полученных из матрицы A'_d вычеркиванием j -й или k -й строк, так как линейная комбинация столбцов не изменяет величины определителя.

Определитель матрицы $A'_{d(-j)}$ или $A'_{d(-k)}$, получаемой при вычеркивании из матрицы A'_d j -й или k -й строк, может быть найден путем разложения по элементам столбца α . Так, если из матрицы A'_d вычеркнуть j -ю строку, то в столбце α останется лишь один ненулевой элемент -1 , который находится в $(k-1)$ -й строке (при вычеркивании j -й строки номера последующих строк уменьшаются на единицу). Следовательно,

$$\det A'_{d(-j)} = (-1)^{\alpha+k-1} (-1) D = (-1)^{\alpha+k} D,$$

где D — определитель матрицы, получаемой из матрицы A'_d при вычеркивании j -й и k -й строк и столбца α .

Если из матрицы A'_d вычеркнуть k -ю строку, то в столбце α останется лишь один элемент $+1$ в j -й строке. Поэтому

$$\det A'_{d(-k)} = (-1)^{\alpha+j} D.$$

Произведение

$$\det A'_{d(-j)} \det A'_{d(-k)} = (-1)^{2\alpha+j+k} D^2 = (-1)^{j+k},$$

поскольку $D = \pm 1$ как определитель подматрицы узловой матрицы дерева. Таким образом, произведение пары миноров матриц A_{-j} и A_{-k} , соответствующих общим деревьям двух схем, равно $(-1)^{j+k}$. Этот результат справедлив для любой нумерации узлов и ветвей и произвольной ориентации ветвей.

Знаки соответствующих миноров матриц $A_{-j}Y^{(b)}$ и A_{-k}^T определяются знаками миноров матриц A_{-j} и A_{-k} , поэтому определитель (8.5) имеет общий множитель $(-1)^{j+k}$. В разложении алгебраического дополнения $\Delta_{jk}^{(y)} = (-1)^{j+k} M_{jk}$ присутствуют только положительные слагаемые, равные произведению проводимостей ветвей общих деревьев схемы с заземленными j -м и k -м узлами.

Рассмотрим алгебраическое дополнение $\Delta_{12}^{(y)}$ схемы на рис. 8.1, а. Деревья графа, полученного при объединении узлов 1 и 4 (см. рис. 8.2), приведены на рис. 8.3, а. Если в исходной схеме объединить узлы 2 и 4, то результирующий граф (рис. 8.5, а)

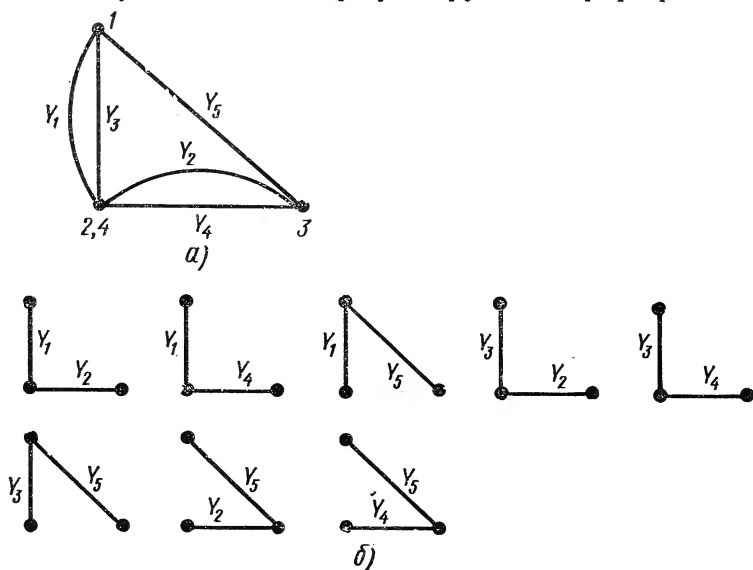


Рис. 8.5

будет иметь деревья, изображенные на рис. 8.5, б. У графов с заземленными узлами 1 и 2 имеются четыре общих дерева. Эти деревья содержат ветви $Y_2 - Y_3$, $Y_2 - Y_5$, $Y_3 - Y_4$, $Y_3 - Y_5$. В результате алгебраическое дополнение равно сумме четырех слагаемых, равных произведению проводимостей ветвей общих деревьев:

$$\Delta_{12}^{(y)} = Y_2 Y_3 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5.$$

Топологическое правило для алгебраического дополнения $\Delta_{jk}^{(y)}$ можно видоизменить. Деревьям схемы, получаемой при заземлении j -го (k -го) узла, в исходной схеме соответствуют 2-деревья типа $T_2(j, y)$ ($T_2(k, y)$). Общим деревьям двух схем соответствуют 2-деревья, у которых j -й и k -й узлы находятся в одной части, т. е. 2-деревья типа $T_2(jk, y)$. Таким образом, алгебраическое дополнение $\Delta_{jk}^{(y)}$ равно сумме произведений проводимостей ветвей

всех 2-деревьев типа $T_{2(jk, y)}$. В частности, для схемы на рис. 8.1, а алгебраическое дополнение $\Delta_{12}^{(y)}$ равно сумме произведений проводимостей ветвей 2-деревьев типа $T_{2(12, 4)}$ (рис. 8.6).

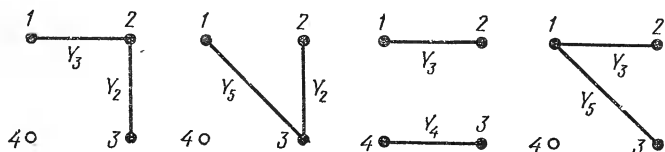


Рис. 8.6

Если обозначить через $W_{jk, y}$ сумму произведений проводимостей ветвей 2-деревьев типа $T_{2(jk, y)}$, то

$$\Delta_{jk}^{(y)} = W_{jk, y}. \quad (8.6)$$

Формулу для симметричного алгебраического дополнения можно рассматривать как частный случай формулы (8.6):

$$\Delta_{ij}^{(y)} = W_{i, y}. \quad (8.7)$$

Разность алгебраических дополнений. При вычислении передаточных функций в соответствии с равенствами (7.53), (7.54) необходимо знать разность алгебраических дополнений вида $\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}$. Но

$$\Delta_{ij}^{(y)} = W_{ij, y} \text{ и } \Delta_{ik}^{(y)} = W_{ik, y},$$

поэтому

$$\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)} = W_{ij, y} - W_{ik, y}.$$

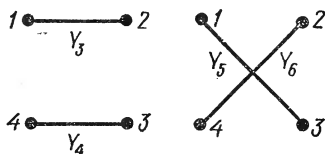


Рис. 8.7

Если 2-деревья типа $T_{2(ij, y)}$ содержат k -й узел в одной или в другой части схемы, то

$$W_{ij, y} = W_{ijk, y} + W_{ij, ky},$$

где $W_{ijk, y}$ ($W_{ij, ky}$) — сумма произведений проводимостей ветвей 2-деревьев типа $T_{2(ijk, y)}$ ($T_{2(ij, ky)}$). Аналогично,

$$W_{ik, y} = W_{ijk, y} + W_{ik, jy},$$

где $W_{ijk, y}$ ($W_{ik, jy}$) — сумма произведений проводимостей ветвей 2-деревьев типа $T_{2(ijk, y)}$ ($T_{2(ik, jy)}$).

Таким образом, алгебраические дополнения $\Delta_{ij}^{(y)}$ и $\Delta_{ik}^{(y)}$ имеют общие слагаемые, равные $W_{ijk, y}$. Если исключить общие слагаемые, то разность

$$\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)} = W_{ij, ky} - W_{ik, jy}.$$

При заземлении узла l вместо y (см. рис. 7.36) разность

$$\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)} = W_{ij, kl} - W_{ik, jl}. \quad (8.8)$$

В частности, для схемы на рис. 8.1, а разность $\Delta_{12} - \Delta_{13} = W_{12,34} - W_{13,24}$; 2-деревья типов $T_{2(12,34)}$ и $T_{2(13,24)}$ приведены на рис. 8.7 (имеется только одно 2-дерево типа $T_{2(13,24)}$ и одно типа $T_{2(12,34)}$). Соответственно разность $\Delta_{12} - \Delta_{13} = Y_3 Y_4 - Y_5 Y_6$.

§ 8.3. Разложение узлового определителя и алгебраических дополнений его элементов

Расчет входных и передаточных функций топологическим методом сводится к вычислению по топологическим формулам узлового определителя, алгебраических дополнений его элементов или разности алгебраических дополнений.

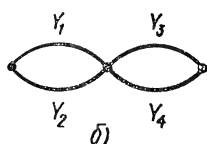
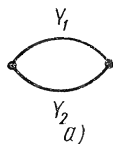


Рис. 8.8

Особенность топологических формул состоит в том, что они позволяют записать без вычисления большого числа сокращающихся слагаемых только положительные слагаемые узловых определителей (алгебраических дополнений).

Непосредственное перечисление всех деревьев схем с большим числом узлов и ветвей (деревьев) является сложной задачей. Эта задача упрощается, если применять разложение узловых определителей на множители или слагаемые с общими множителями. При этом расчет узлового определителя (алгебраического дополнения) сложной схемы постепенно можно свести к расчету определителя простой схемы, все деревья (2-деревья) которой очевидны.

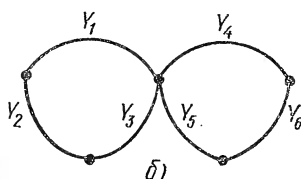
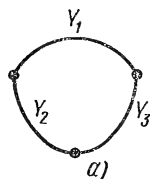


Рис. 8.9

Разложение узлового определителя. Для простых схем, содержащих небольшое число деревьев, применение топологической формулы (8.1) не вызывает затруднений. Например, для схем, графы которых приведены на рис. 8.8, а, б и имеют соответственно два и четыре дерева,

$$\Delta^{(y)} = Y_1 + Y_2; \quad \Delta^{(y)} = (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4).$$

Определитель схемы, имеющий граф на рис. 8.9, а с тремя деревьями,

$$\Delta^{(y)} = Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3.$$

Определитель схемы, граф которой показан на рис. 8.9, б и содержит 9 деревьев:

$$\Delta^{(y)} = (Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3)(Y_4 Y_5 + Y_4 Y_6 + Y_5 Y_6)$$

Графы на рис. 8.8, б и 8.9, б состоят из двух подграфов, имеющих один общий узел. Определитель всей схемы получают как произведение определителей подсхем:

$$\Delta^{(y)} = \Delta_1^{(y)} \Delta_2^{(y)}, \quad (8.9)$$

где $\Delta_1^{(y)}$ и $\Delta_2^{(y)}$ — определители подсхем.

Формула (8.9) справедлива для схемы любой сложности, состоящей из двух подсхем, имеющих один общий узел. Действительно, каждое дерево всей схемы образуется любыми двумя деревьями подсхем, а при умножении определителей $\Delta_1^{(y)}$ и $\Delta_2^{(y)}$ учитываются все возможные комбинации пар деревьев подсхем.

Если схема состоит из двух изолированных подсхем, одна из которых является отдельным узлом, то определитель схемы равен нулю, так как две подсхемы можно соединить ветвью с нулевой проводимостью и каждое дерево схемы будет содержать эту ветвь.

На рис. 8.10 изображена схема, которая образована двумя подсхемами N_1 и N_2 , имеющими два общих узла j и k . Определитель всей схемы

$$\Delta^{(y)} = \Delta_1^{(y)} \Delta_{2k}^{(y)} + \Delta_2^{(y)} \Delta_{1k}^{(y)}, \quad (8.10)$$

где $\Delta_1^{(y)}$ ($\Delta_2^{(y)}$) — определитель подсхемы N_1 (N_2) при разомкнутых зажимах j , k ; $\Delta_{1k}^{(y)}$ ($\Delta_{2k}^{(y)}$) — определитель подсхемы N_1 (N_2) при короткозамкнутых зажимах.

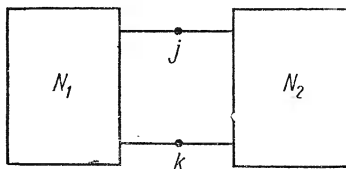


Рис. 8.10

Для доказательства формулы (8.10) следует учесть, что каждое дерево всей схемы содержит путь между j -м и k -м узлами. Этот путь может проходить по ветвям подсхемы N_1 или N_2 . Если дерево содержит путь между j -м и k -м узлами в подсхеме N_1 , то такое дерево состоит из дерева подсхемы N_1 и 2-дерева типа $T_{2(j,k)}$ подсхемы N_2 . Но 2-дерево подсхемы N_2 становится деревом при замкнутых зажимах j и k . Сумма произведений проводимостей ветвей всех 2-деревьев типа $T_{2(j,k)}$ подсхемы N_2 равна определителю $\Delta_{2k}^{(y)}$. При умножении определителя $\Delta_1^{(y)}$ на $\Delta_{2k}^{(y)}$ учитывают все возможные комбинации деревьев подсхемы N_1 и 2-деревьев подсхемы N_2 , т. е. все деревья схемы, содержащие путь между j -м и k -м узлами в подсхеме N_1 . Аналогично находят все деревья схемы, содержащие путь между j -м и k -м узлами в подсхеме N_2 . В результате получается формула (8.10).

Пример 8.1. Вычислить определитель $\Delta^{(y)}$ схемы на рис. 8.11, а по формуле (8.10).

Решение. Рассмотрим данную схему как две подсхемы, имеющие два общих узла 1 и 2 (рис. 8.11, б, в).

Найдем определители подсхем:

$$\Delta_1^{(y)} = (Y_1 + Y_2) Y_3 + (Y_1 + Y_2) Y_4 + Y_3 Y_4; \quad \Delta_2^{(y)} = Y_5 (Y_6 + Y_7)$$

При коротком замыкании узлов I и 2

$$\Delta_{1\kappa}^{(y)} = Y_1 + Y_2 + Y_3; \quad \Delta_{2\kappa}^{(y)} = Y_5 + Y_6 + Y_7.$$

В соответствии с формулой (8.10) определитель схемы на рис. 8.11, a

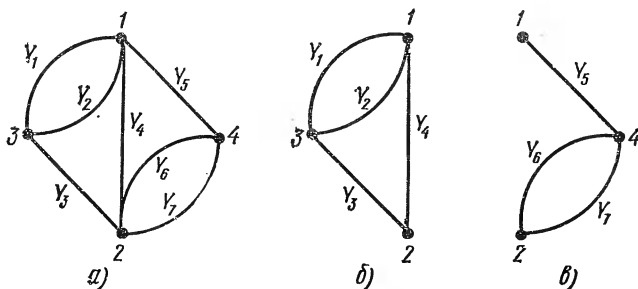
$$\Delta^{(y)} = [(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4] (Y_5 + Y_6 + Y_7) + Y_5 (Y_6 + Y_7) (Y_1 + Y_2 + Y_3).$$


Рис. 8.11

Пусть одна из подсхем на рис. 8.10 представляет собой отдельную ветвь схемы с проводимостью Y_j . Тогда по формуле (8.10)

$$\Delta^{(y)} = Y_j \Delta_j + \Delta', \quad (8.11)$$

где Δ_j — определитель схемы при короткозамкнутой ветви Y_j ; Δ' — определитель схемы при разомкнутой ветви Y_j .

Формула (8.11) характеризует *разложение узлового определителя по ветви*.

Пример 8.2. Вычислить узловой определитель схемы, граф которой приведен на рис. 8.11, a , с помощью разложения по ветви.

Решение. Проведем разложение по ветви Y_3 . Если ветвь Y_3 короткозамкнута, то

$$\Delta_3 = (Y_1 + Y_2 + Y_4) (Y_5 + Y_6 + Y_7) + Y_5 (Y_6 + Y_7).$$

Выражение для Δ_3 записывается сразу, так как при замкнутой ветви схема приобретает вид треугольника (см. выражение для определителя схемы на рис. 8.9, a). При разомкнутой ветви Y_3 схема состоит из двух частей, имеющих только один общий узел I . Поэтому с учетом формулы (8.9)

$$\Delta^3 = (Y_1 + Y_2) [Y_4 Y_5 + (Y_4 + Y_5) (Y_6 + Y_7)].$$

Определитель схемы на рис. 8.11, a

$$\Delta^{(y)} = Y_3 \Delta_3 + \Delta^3.$$

Пусть ветви Y_i и Y_j схемы имеют только один общий узел, причем другие ветви с этим узлом не соединены. Определитель схемы разлагаем по ветви Y_i :

$$\Delta^{(y)} = Y_i \Delta_i + \Delta^i.$$

В свою очередь определители Δ_i и Δ^i разлагаем по ветви Y_j :

$$\Delta_i = Y_j \Delta_{ij} + \Delta_i^j; \quad \Delta^i = Y_j \Delta_j^i + \Delta^{ij},$$

где нижние индексы у определителей указывают номера ветвей, которые замкнуты, а верхние индексы — номера ветвей, которые разомкнуты.

При размыкании ветвей Y_i и Y_j схема распадается на две изолированные части, одна из которых — отдельный узел. Следовательно, $\Delta^{ij} = 0$. Учитывая выражения для Δ_i и Δ^i , находим

$$\Delta^{(y)} = Y_i \Delta_i^i + Y_j \Delta_j^j + Y_i Y_j \Delta_{ij}, \quad (8.12)$$

где $\Delta_i^i = \Delta_j^j$.

Если схема содержит ветви Y_i , Y_j и Y_k , имеющие только один общий узел, с которым другие ветви не соединены, то аналогично предыдущему,

$$\begin{aligned} \Delta^{(y)} = & Y_i \Delta_i^{ik} + Y_j \Delta_j^{ik} + Y_k \Delta_k^{ij} + Y_i Y_j \Delta_{ij}^k + \\ & + Y_i Y_k \Delta_{ik}^i + Y_j Y_k \Delta_{jk}^j + Y_i Y_j Y_k \Delta_{ijk}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

где $\Delta_i^{ik} = \Delta_j^{ik} = \Delta_k^{ij}$.

Формулу (8.13) можно обобщить на случай любого числа ветвей, имеющих один общий узел.

Равенства (8.12), (8.13) характеризуют *разложение определителя по узлу*.

Пример 8.3. Вычислить узловой определитель схемы, имеющий граф (рис. 8.11, а), с помощью разложения по узлу.

Решение. Применим разложение по узлу 3, в котором соединены ветви Y_1 , Y_2 и Y_3 . Параллельные ветви Y_1 и Y_2 заменим одной ветвью с проводимостью $Y_{1,2} = Y_1 + Y_2$. При замкнутой ветви $Y_{1,2}$ и разомкнутой ветви Y_3

$$\Delta_{1,2}^3 = Y_4 Y_5 + (Y_4 + Y_5)(Y_6 + Y_7).$$

Определитель $\Delta_{1,2}^{1,2} = \Delta_{1,2}^3$. Если замкнуть ветви $Y_{1,2}$ и Y_3 , то $\Delta_{1,2;3}^3 = Y_5 + Y_6 + Y_7$.

В соответствии с формулой (8.12) определитель заданной схемы

$$\begin{aligned} \Delta^{(y)} = & Y_{1,2} \Delta_{1,2}^3 + Y_3 \Delta_{1,2}^{1,2} + Y_{1,2} Y_3 \Delta_{1,2;3}^3 = \\ = & (Y_1 + Y_2) \Delta_{1,2}^3 + Y_3 \Delta_{1,2}^{1,2} + (Y_1 + Y_2) Y_3 \Delta_{1,2;3}^3. \end{aligned}$$

Разложение (8.13) по отношению к ветвям Y_1 , Y_2 и Y_3 приводит к неверному результату вследствие того, что ветви Y_1 и Y_2 имеют два общих узла.

Следует отметить, что при замыкании ветвей схема может вырождаться в один узел. Определитель такой вырожденной схемы следует принять равным 1.

Определитель $\Delta^{(y)}$ можно разложить по путям между парой узлов. Все деревья схемы содержат путь между любой парой узлов; ряд деревьев может иметь одинаковый путь. Если обозначить через P_k произведение проводимостей ветвей k -го пути и сгруппировать произведения проводимостей ветвей деревьев, имеющие общий множитель P_k , то

$$\Delta^{(y)} = \sum_k P_k \Delta_k, \quad (8.14)$$

где множитель Δ_k — минор k -го пути, а суммирование выполняется по всем возможным путям между выбранной парой узлов.

Смысл множителя Δ_k можно пояснить следующим образом. Пусть дерево схемы содержит путь между j -м и k -м узлами.

Ветви этого пути показаны на рис. 8.12. Узлы такого пути не могут быть связаны через ветви дерева в подсхеме N , так как любое дерево не содержит контуров. Следовательно, каждое дерево, имеющее путь между j -м и k -м узлами, состоит из ветвей пути, а также таких ветвей подсхемы N , которые образуют

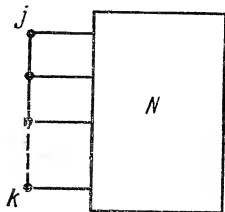


Рис. 8.12

не связанные между собой подграфы. Число таких подграфов равно числу узлов в пути. Эти подграфы заключают в себе все узлы подсхемы и не содержат контуров. При объединении всех узлов пути (замыкании пути) такой подграф подсхемы N преобразуется в дерево. Все возможные подграфы подсхемы N , которые дополняют ветви пути до деревьев исходной схемы, содержащих рассматриваемый путь, можно определить, если найти все деревья схемы с короткозамкнутым путем.

Таким образом, Δ_k — определитель схемы, которая получается при замыкании k -го пути исходной схемы. В частном случае, если k -й путь проходит через все узлы схемы, минор $\Delta_k = 1$. Равенство минора единице означает, что ветви пути образуют дерево схемы.

Формула (8.14) характеризует разложение определителя по путям.

Пример 8.4. Вычислить узловый определитель схемы на рис. 8.11, а с помощью разложения по путям между узлами 1 и 2.

Решение. Имеются пять путей между выбранной парой узлов:

$$Y_1 - Y_3, \quad Y_2 - Y_3, \quad Y_4, \quad Y_5 - Y_6, \quad Y_5 - Y_7.$$

Произведения проводимостей ветвей этих путей соответственно

$$P_1 = Y_1 Y_3; \quad P_2 = Y_2 Y_3; \quad P_3 = Y_4; \quad P_4 = Y_5 Y_6; \quad P_5 = Y_5 Y_7.$$

При замыкании путей $Y_1 - Y_3$ и $Y_2 - Y_3$ ветви Y_5 , Y_6 и Y_7 соединяются параллельно, поэтому

$$\Delta_1 = \Delta_2 = Y_5 + Y_6 + Y_7.$$

Каждое слагаемое миноров Δ_1 и Δ_2 соответствует дереву схемы, получающейся при замыкании пути $Y_1 - Y_3$ ($Y_2 - Y_3$). Слагаемые выражения

$$P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 = (Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3) (Y_5 + Y_6 + Y_7)$$

представляют собой произведения проводимостей ветвей деревьев исходной схемы, образованных ветвями $Y_1 - Y_3 - Y_5$, $Y_1 - Y_3 - Y_6$, $Y_1 - Y_3 - Y_7$, $Y_2 - Y_3 - Y_5$, $Y_2 - Y_3 - Y_6$, $Y_2 - Y_3 - Y_7$. Эти деревья содержат общие пути $Y_1 - Y_3$ ($Y_2 - Y_3$).

При замыкании пути Y_4 схема состоит из двух частей, имеющих общий узел, поэтому

$$\Delta_3 = (Y_1 + Y_2 + Y_3) (Y_5 + Y_6 + Y_7).$$

Каждое слагаемое этого выражения Δ_3 есть произведение проводимостей ветвей всех деревьев схемы с короткозамкнутой ветвью Y_4 . Слагаемые выражения

$$P_3 \Delta_3 = Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3) (Y_5 + Y_6 + Y_7)$$

представляют собой произведения проводимостей ветвей деревьев исходной схемы, содержащих ветвь Y_4 .

Если замкнуть путь $Y_5 - Y_6$ ($Y_5 - Y_7$), то

$$\Delta_4 = \Delta_5 = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Ветви Y_1 , Y_2 и Y_3 являются деревьями схемы, получающейся при замыкании путей $Y_5 - Y_6$ ($Y_5 - Y_7$). Слагаемые выражения

$$P_4 \Delta_4 + P_5 \Delta_5 = (Y_5 Y_6 + Y_5 Y_7) (Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

соответствуют всем деревьям исходной схемы, имеющим путь $Y_5 - Y_6$ ($Y_5 - Y_7$).

Таким образом, узловой определитель схемы на рис. 8.11, а

$$\Delta^{(y)} = \sum_{k=1}^5 P_k \Delta_k.$$

Разложение алгебраических дополнений и их разностей. Разложение алгебраического дополнения $\Delta_{jj}^{(y)}$ аналогично разложению узлового определителя. Все способы разложения, рассмотренные ранее применимы и для вычисления $\Delta_{jj}^{(y)}$, если предварительно объединить j -й узел схемы с базисным (заземленным) узлом.

Для расчета алгебраического дополнения $\Delta_{jk}^{(y)}$ ($j \neq k$) следует найти все 2-деревья схемы, содержащие путь между j -м и k -м узлами. Если каждое из таких 2-деревьев дополнить ветвью с проводимостью, равной единице, соединяющей k -й узел (j -й) с базисным узлом, то такие 2-деревья преобразуются в деревья, произведения проводимостей ветвей которых совпадают с произведениями проводимостей ветвей исходных 2-деревьев и которые содержат путь от j -го (k -го) к базисному узлу через k -й (j -й) узел по ветви с единичной проводимостью. Таким образом, в исходной схеме можно присоединить дополнительную ветвь между k -м (j -м) и базисными узлами, проводимость которой равна единице. Если найти все пути от j -го (k -го) узла к базисному узлу, проходящие через k -й (j -й) узел и дополнительную ветвь*, то, умножая произведения проводимостей ветвей таких путей на их миноры и суммируя результаты, получаем алгебраическое дополнение $\Delta_{jk}^{(y)}$.

Аналогично можно определить разность алгебраических дополнений $\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}$, для вычисления которой необходимо найти 2-деревья типа $T_2(ij, kl)$ ($T_2(ik, jl)$). Если между j -м, k -м (i -м, l -м) узлами 2-деревьев присоединить дополнительную ветвь с единичной проводимостью, то такие 2-деревья преобразуются в деревья, содержащие путь от i -го к l -му узлу через узлы j , k (путь от j -го к k -му узлу через узлы i , l).

Такие деревья можно найти с помощью разложения определителя схемы с дополнительной ветвью, имеющей единичную проводимость и включенной между j -м, k -м (i -м, l -м) узлами, по пути между i -м, l -м (j -м, k -м) узлами. При этом в отличие от вычисления узлового определителя следует учитывать лишь пути, проходящие от i -го узла через j -й, k -й узлы и дополнительную

* Если в схеме имеется ветвь между k -м (j -м) и базисным узлами, то можно принять проводимость этой ветви равной единице (вместо присоединения дополнительной ветви).

ветвь (от j -го узла через i -й, l -й узлы). В соответствии с формулой (8.8) слагаемые, обусловленные путями $i-j-k-l$ ($j-i-l-k$), учитывают с положительным знаком, а слагаемые обусловленные путями $i-k-j-l$ ($j-l-i-k$), — с отрицательным знаком.

Пример 8.5. Вычислить алгебраическое дополнение $\Delta_{12}^{(y)}$ и разность $\Delta_{12}^{(y)} - \Delta_{13}^{(y)}$ для схемы на рис. 8.1, а с помощью разложений по путям.

Решение. Для вычисления $\Delta_{12}^{(y)}$ присоединим к схеме дополнительную ветвь с единичной проводимостью между узлами 2 и 4 (или проводимость Y_6 примем равной единице). Имеются два пути от узла 1 через узел 2 и ветвь с единичной проводимостью к узлу 4. Произведения проводимостей ветвей этих путей и их миноры соответственно

$$P_1 = Y_3; \quad \Delta_1 = Y_2 + Y_4 + Y_5;$$

$$P_2 = Y_5 Y_2; \quad \Delta_2 = 1.$$

Следовательно,

$$\Delta_{12}^{(y)} = P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 = Y_3 (Y_2 + Y_4 + Y_5) + Y_2 Y_5.$$

Такой же результат получим, если дополнительную ветвь присоединить между узлами 1, 4 и выполнить разложение по соответствующим путям между узлами 2, 4.

Для вычисления разности $\Delta_{12}^{(y)} - \Delta_{13}^{(y)}$ дополнительную ветвь с единичной проводимостью включим между узлами 2 и 3 (или проводимость Y_2 примем равной единице). Имеется один путь $1-2-3-4$, для которого $P_1 = Y_3 Y_4$; $\Delta_1 = 1$, и один путь $1-3-2-4$, для которого $P_2 = Y_5 Y_6$; $\Delta_2 = 1$.

Следовательно,

$$\Delta_{12}^{(y)} - \Delta_{13}^{(y)} = P_1 \Delta_1 - P_2 \Delta_2 = Y_3 Y_4 - Y_5 Y_6.$$

Аналогичный результат получим, если ветвь с единичной проводимостью присоединить между узлами 1, 4 и выполнить разложение по соответствующим путям между узлами 2, 3.

§ 8.4. Топологическая формула для расчета передаточных функций (формула Мэсона)

На основании рассмотренных ранее топологических методов расчета узлового определителя, алгебраических дополнений и их разностей можно сформулировать обобщенное правило для вычисления передаточных функций. С этой целью вводят следующие понятия:

передача H — отношение показания измерительного прибора (вольтметра или амперметра) к величине параметра источника (тока источника тока или э. д. с источника э. д. с.);

путь передачи — любой путь, включающий зажимы источника и измерительный прибор;

величина пути передачи (передача пути) P'_k — произведение проводимостей ветвей k -го пути передачи при условии, что проводимости прибора принимается равной единице;

минор пути передачи Δ'_k — узловой определитель схемы, получаемой при замыкании k -го пути передачи;

определитель схемы Δ — узловый определитель схемы, получаемой при исключении вольтметра и источника тока или коротком замыкании амперметра и источника э. д. с.

Передачей H , как видно из определения, может быть любая входная и передаточная функция в зависимости от вида прибора и источника, а также от места их включения. Измерительный прибор вводят в качестве указателя-индикатора для большей наглядности расчета.

Согласно топологическому правилу (формула Мэзона) передача H при действии одного источника равна отношению алгебраической суммы произведений всех величин путей передачи P'_k на их миноры Δ'_k к определителю схемы:

$$H = \frac{\sum_k P'_k \Delta'_k}{\Delta}. \quad (8.15)$$

В числителе формулы (8.15) слагаемые $P'_k \Delta'_k$ записывают со знаком плюс (минус), если в k -м пути передачи направление

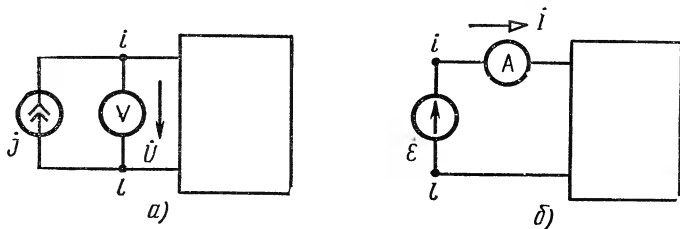


Рис. 8.13

обхода ветви с прибором совпадает (противоположно) с выбранным положительным направлением напряжения или тока. При этом считают, что все пути передачи начинаются от одного и того же положительного зажима источника.

Убедиться в справедливости формулы (8.15) можно с помощью выражений для схемных функций (7.52) ÷ (7.54), (7.49) ÷ (7.51) и установленных в § 8.3 топологических способов расчета узлового определителя, алгебраических дополнений и их разностей. Так, для расчета входного сопротивления схемы по топологическому правилу присоединяют к схеме источник тока и вольтметр (рис. 8.13, а). В этом случае передача $H = \dot{U}/J$ равна входному сопротивлению. Как видно из рис. 8.13, а, в рассматриваемой схеме имеется только один путь через вольтметр V , для которого $P'_1 = 1$. Минор этого пути Δ'_1 является узловым определителем схемы с замкнутыми зажимами i и l , т. е. $\Delta'_1 = \Delta_{ii}^{(y)}$. Определитель Δ схемы с исключенными вольтметром и источником тока равен определителю $\Delta^{(y)}$. Таким образом, $H = P'_1 \Delta'_1 / \Delta = \Delta_{ii}^{(y)} / \Delta^{(y)}$, что совпадает с формулой (7.52). Следует отметить, что определители Δ'_1 и Δ могут быть найдены с помощью любого способа разложения.

Для расчета входной проводимости схемы по топологическому правилу к схеме присоединяются источник э. д. с. и амперметр (рис. 8.13, б). При этом передача $H = \dot{I}/\mathcal{E}$. В данном случае $\sum_k \Pi'_k \Delta'_k$ представляет собой разложение узлового определителя $\Delta^{(y)}$ схемы с разомкнутыми зажимами i и l по путям между парой узлов i и l . Определитель Δ , равный узловому определителю схемы при замкнутых амперметре A и источнике э. д. с., совпадает с алгебраическим дополнением $\Delta_{il}^{(y)}$. Следовательно, передача $H = \sum_k \Pi'_k \Delta'_k / \Delta = \Delta^{(y)} / \Delta_{il}^{(y)}$, т. е. равна входной проводимости.

Если по топологической формуле (8.15) рассчитывается взаимное сопротивление Z_{nm} , то измерительный прибор и источник следует включить так, как показано на рис. 8.14, а. В этом случае пути передачи содержат узлы i, j, k, l . Слагаемые $\Pi'_k \Delta'_k$

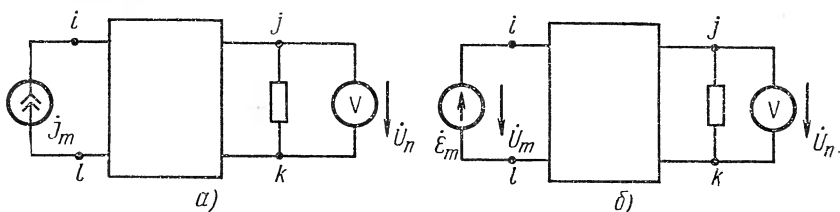


Рис. 8.14

записывают с положительным (отрицательным) знаком, если направление обхода ветви с вольтметром в k -м пути передачи совпадает с направлением, указанным стрелкой (противоположное направлению, указанному стрелкой), т. е. с положительным (отрицательным) знаком записывают слагаемые, обусловленные путями $i-j-k-l$ ($i-k-j-l$). При вычислении числителя формулы (8.15) проводимость вольтметра принимается равной единице. Следовательно, в общем случае $\sum_k \Pi'_k \Delta'_k$ представляет собой

разложение разности алгебраических дополнений $\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}$ по путям от i -го к l -у узлу через узлы j, k и дополнительную ветвь с единичной проводимостью (см. § 8.3). При исключении вольтметра и источника тока определитель $\Delta = \Delta^{(y)}$. Таким образом, передача $H = (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}) / \Delta^{(y)}$, т. е. согласно (7.53) она равна взаимному сопротивлению Z_{nm} .

Для расчета коэффициента передачи напряжения $K_{nm}^{(u)}$ измерительный прибор и источник включаются, как показано на рис. 8.14, б. Аналогично предыдущему случаю, $\sum_k \Pi'_k \Delta'_k$ представляет собой разложение разности алгебраических дополнений $\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}$ по путям от i -го к l -му узлу через узлы j, k и ветвь с единичной проводимостью (вольтметр). Определитель Δ схемы

при исключенном вольтметре и замкнутом источнике э. д. с. совпадает с алгебраическим дополнением $\Delta_{ii}^{(y)}$. Следовательно, передача $H = (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}) / \Delta_{ii}^{(y)}$, т. е. согласно формуле (7.54), равна коэффициенту передачи напряжения $K_{nm}^{(u)}$.

Если по топологической формуле (8.15) рассчитывают коэффициент передачи тока $K_{nm}^{(i)}$, то измерительный прибор и источник включают так, как показано на рис. 8.15, а. При вычислении числителя выражения (8.15) проводимость амперметра принимают равной единице. Если проводимость $Y_n = 1$, то $\sum_k P'_k \Delta'_k$ представляет собой разложение разности алгебраических дополнений $\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}$ по путям от i -го к l -му узлу через узлы j, k и ветвь с единичной проводимостью. Поскольку все пути передачи проходят через амперметр и проводимость Y_n , то в общем слу-

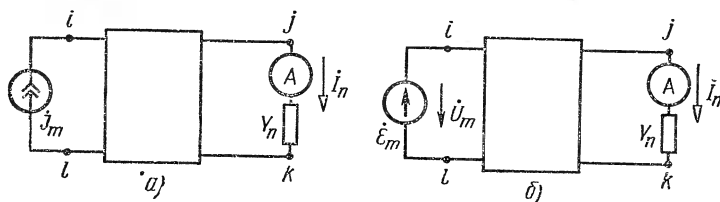


Рис. 8.15

чае при $Y_n \neq 1$ сумма $\sum_k P'_k \Delta'_k = (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}) Y_n$. При исключении источника тока и замыкании амперметра определитель $\Delta = \Delta^{(y)}$. Следовательно, передача $H = (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}) Y_n / \Delta^{(y)} = Z_{nm} Y_n$, что, согласно формуле (7.50), совпадает с выражением для коэффициента передачи тока $K_{nm}^{(i)}$.

Для расчета взаимной проводимости Y_{nm} источник э. д. с. и амперметр включают, как показано на рис. 8.15, б. При этом $\sum_k P'_k \Delta'_k = (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}) Y_n$. При замыкании амперметра и источника э. д. с. определитель $\Delta = \Delta_{ii}^{(y)}$. Передача $H = (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}) Y_n / \Delta_{ii}^{(y)} = K_{nm}^{(u)} Y_n$ и согласно формуле (7.51) равна взаимной проводимости Y_{nm} .

Таким образом, топологическая формула (8.15) получается как результат применения топологических методов расчета узлового определителя, алгебраических дополнений и их разностей к общим выражениям для входных и передаточных функций.

Следует отметить, что ток и напряжение любой ветви схемы с несколькими источниками могут быть найдены с помощью топологической формулы на основании принципа наложения.

Пример 8.6. Вычислить входное сопротивление относительно узлов 1 и 2 схемы на рис. 8.16, а.

Решение. По топологической формуле, входное сопротивление

$$Z = H = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{\Delta}.$$

Существует только один путь передачи, величина которого $\Pi'_1 = 1$. При замыкании этого пути получаем схему на рис. 8.16, б. Минор Δ'_1 , т. е. опре-

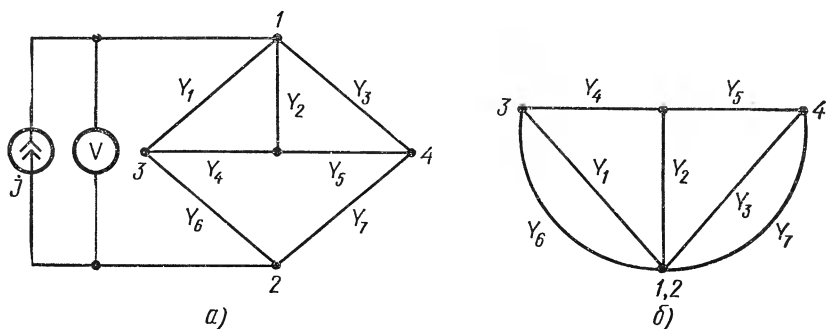


Рис. 8.16

делитель этой схемы, найдем с помощью разложения по путям между парой узлов 3, 4:

$$\Delta'_1 = \sum_{k=1}^4 \Pi_k \Delta_k,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= Y_4 Y_5; & \Delta_1 &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_6 + Y_7; \\ \Pi_2 &= Y_4 Y_2 (Y_3 + Y_7); & \Delta_2 &= 1; \\ \Pi_3 &= (Y_1 + Y_6) Y_2 Y_5; & \Delta_3 &= 1; \\ \Pi_4 &= (Y_1 + Y_6) (Y_3 + Y_7); & \Delta_4 &= Y_2 + Y_4 + Y_5. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta'_1 = Y_4 Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_6 + Y_7) + Y_2 Y_4 (Y_3 + Y_7) + Y_2 Y_5 (Y_1 + Y_6) + (Y_1 + Y_6) (Y_3 + Y_7) (Y_2 + Y_4 + Y_5).$$

Запишем выражение для определителя Δ (при исключенных вольтметре и источнике тока) с помощью разложения по путям между узлами 1, 2:

$$\Delta = \sum_{k=1}^6 \Pi_k \Delta_k,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= Y_1 Y_6; & \Delta_1 &= (Y_2 + Y_4) (Y_5 + Y_7 + Y_3) + Y_5 (Y_3 + Y_7); \\ \Pi_2 &= Y_1 Y_4 Y_5 Y_7; & \Delta_2 &= 1; \\ \Pi_3 &= Y_2 Y_4 Y_6; & \Delta_3 &= Y_3 + Y_5 + Y_7; \\ \Pi_4 &= Y_2 Y_5 Y_7; & \Delta_4 &= Y_1 + Y_4 + Y_6; \\ \Pi_5 &= Y_3 Y_5 Y_4 Y_6; & \Delta_5 &= 1; \\ \Pi_6 &= Y_3 Y_7; & \Delta_6 &= (Y_2 + Y_6) (Y_1 + Y_6 + Y_4) + Y_4 (Y_1 + Y_6). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta = Y_1 Y_6 [(Y_2 + Y_4)(Y_5 + Y_7 + Y_3) + Y_5(Y_3 + Y_7)] + Y_1 Y_4 Y_5 Y_7 + \\ + Y_2 Y_4 Y_6 (Y_3 + Y_5 + Y_7) + Y_2 Y_5 Y_7 (Y_1 + Y_4 + Y_6) + Y_3 Y_5 Y_4 Y_6 + \\ + Y_3 Y_7 [(Y_2 + Y_5)(Y_1 + Y_6 + Y_4) + Y_4(Y_1 + Y_6)].$$

Подстановка значений Π'_1 , Δ'_1 и Δ в формулу для передачи приводит к выражению для искомого сопротивления.

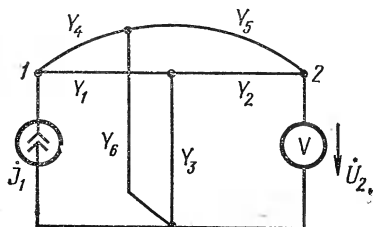


Рис. 8.17

Пример 8.7. Вычислить взаимное сопротивление $Z_{21} = \dot{U}_2 / \dot{J}_1$ схемы на рис. 8.17.

Решение. Взаимное сопротивление

$$Z_{21} = H = \frac{\Pi'_1 \Delta'_1 + \Pi'_2 \Delta'_2}{\Delta},$$

где

$$\Pi'_1 = Y_1 Y_2; \quad \Delta'_1 = Y_4 + Y_5 + Y_6;$$

$$\Pi'_2 = Y_4 Y_5; \quad \Delta'_2 = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Найдем определитель Δ схемы с исключенными вольтметром и источником тока с помощью разложения по путям между узлами 1 и 2:

$$\Delta = \sum_{k=1}^4 \Pi_k \Delta_k,$$

где

$$\Pi_1 = Y_1 Y_2; \quad \Delta_1 = (Y_4 + Y_5)(Y_3 + Y_6) + Y_3 Y_6;$$

$$\Pi_2 = Y_1 Y_3 Y_6 Y_5; \quad \Delta_2 = 1;$$

$$\Pi_3 = Y_4 Y_6 Y_3 Y_2; \quad \Delta_3 = 1;$$

$$\Pi_4 = Y_4 Y_5; \quad \Delta_4 = (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_6) + Y_3 Y_6.$$

Подстановка значений Π'_k , Δ'_k и Δ в формулу для передачи дает выражение для искомого сопротивления.

Пример 8.8. Рассчитать ток $\dot{I}_6$ в схеме на рис. 8.18, а.

Решение. По принципу наложения ток

$$\dot{I}_6 = Y_{61} \dot{E}_1 + K_{65}^{(i)} \dot{J}_5.$$

Взаимную проводимость Y_{61} и коэффициент передачи тока $K_{65}^{(i)}$ вычислим по топологической формуле.

В соответствии с рис. 8.18, б взаимная проводимость

$$Y_{61} = \frac{\Pi'_1 \Delta'_1 - \Pi'_2 \Delta'_2}{\Delta},$$

где

$$\Pi'_1 = Y_1 Y_2 Y_6 Y_5; \quad \Delta'_1 = 1;$$

$$\Pi'_2 = Y_1 Y_3 Y_6 Y_4; \quad \Delta'_2 = 1.$$

В соответствии с рис. 8.18, ϵ коэффициент передачи тока

$$K_{65}^{(i)} = \frac{\Pi'_1 \Delta'_1 + \Pi'_6 \Delta'_2}{\Delta},$$

где

$$\Pi'_1 = Y_1 Y_2 Y_6; \quad \Delta'_1 = 1;$$

$$\Pi'_2 = Y_4 Y_6; \quad \Delta'_2 = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

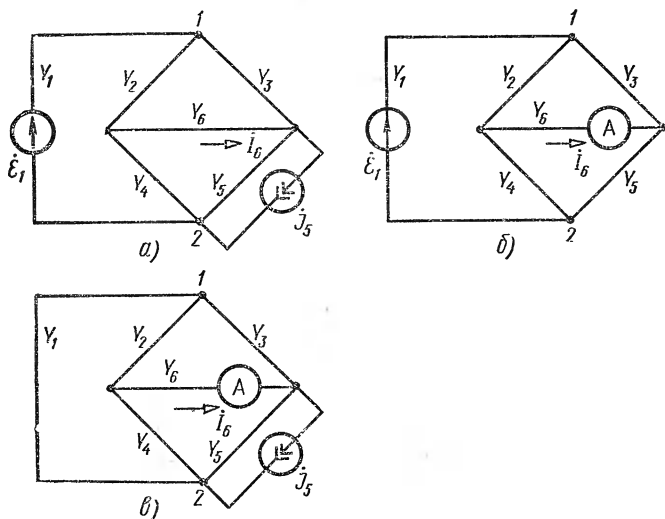


Рис. 8.18

Знаменатель Δ функций Y_{61} и $K_{65}^{(i)}$ найдем с помощью разложения по путям между узлами 1, 2 (рис. 8.18, а) при исключенных источниках:

$$\Delta = \sum_{k=1}^5 \Pi_k \Delta_k,$$

где

$$\Pi_1 = Y_1; \quad \Delta_1 = (Y_2 + Y_4)(Y_6 + Y_3 + Y_5) + Y_6(Y_3 + Y_5);$$

$$\Pi_2 = Y_2 Y_4; \quad \Delta_2 = Y_3 + Y_5 + Y_6;$$

$$\Pi_3 = Y_2 Y_6 Y_5; \quad \Delta_3 = 1;$$

$$\Pi_4 = Y_3 Y_6 Y_4; \quad \Delta_4 = 1;$$

$$\Pi_5 = Y_3 Y_5; \quad \Delta_5 = Y_2 + Y_4 + Y_6.$$

Подстановка значений Y_{61} и $K_{65}^{(i)}$ в выражение для тока приводит к иско-
мому результату.

§ 8.5. Топологические формулы для расчета контурного определителя и алгебраических дополнений его элементов

Топологическую формулу для определителя $\Delta^{(K)}$ матрицы контурных сопротивлений $Z^{(K)}$, называемого контурным опреде-

лителем, можно получить на основании выражения

$$\Delta^{(k)} = \det [\mathbf{BZ}^{(b)} \mathbf{B}^T] = \det (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2),$$

где $\mathbf{P}_1 = \mathbf{BZ}^{(b)}$; $\mathbf{P}_2 = \mathbf{B}^T$.

Если матрица $\mathbf{B}$ записана для главных контуров произвольной схемы, то ненулевые миноры порядка $k = e - y + 1$ этой матрицы соответствуют ветвям связи (дополнениям деревьев) и равны ± 1 (см. гл. 2). Это утверждение справедливо и для миноров матрицы $\mathbf{B}$ планарной схемы при условии, что контуры выбраны в виде ячеек. Ненулевые миноры порядка k матрицы $\mathbf{P}_1 = \mathbf{BZ}^{(b)}$ также соответствуют ветвям связи деревьев и равны взятым с положительным (отрицательным) знаком произведениям сопротивлений соответствующих ветвей связи.

Применяя теорему Бине—Коши к определителю произведения матриц $\mathbf{P}_1 = \mathbf{BZ}^{(b)}$ и $\mathbf{P}_2 = \mathbf{B}^T$, можно найти

$$\Delta^{(k)} = \sum_{j=1} Z_{j1} Z_{j2} \dots Z_{j, y-k+1}, \quad (8.16)$$

т. е. контурный определитель равен сумме произведений сопротивлений ветвей связи для всех деревьев.

Из формулы (8.16) следует важный вывод: для любой системы главных контуров произвольной схемы контурный определитель имеет единственное значение. Если схема планарная, то контурный определитель имеет единственное значение для любой системы главных контуров и для контуров, выбранных в виде ячеек.

В случае, когда контуры не являются главными контурами или ячейками планарной схемы, значение контурного определителя отличается от значения, данного в формуле (8.16). При этом ненулевые миноры порядка k матрицы $\mathbf{B}$ соответствуют ветвям связи деревьев и равны $\pm \delta$, где δ — целое число, которое может быть больше единицы. Например, для схемы, граф которой приведен на рис. 8.19, можно выбрать независимые контуры, состоящие из ветвей 1—7—9—3—8—5, 1—2—9—6—5, 2—3—4—5—6—7, 1—7—6—8—4. Эти контуры не представляют собой главные контуры или ячейки. Матрица таких контуров

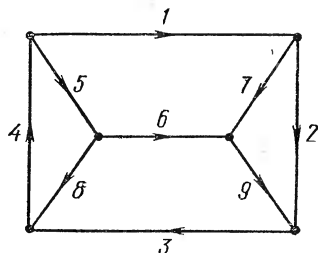


Рис. 8.19

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для дерева 5—6—7—8—9 ветвями связи являются ветви 1—2—3—4. Соответствующий им минор матрицы **B**

$$\det B_{1234} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Следовательно, любой ненулевой минор четвертого порядка записанной матрицы равен $\pm \delta = \pm 3$.

Для контуров-ячеек 1—7—6—5, 2—9—7, 3—8—6—9, 4—5—8 матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Минор, соответствующий ветвям связи 1—2—3—4, равен 1; все другие ненулевые миноры четвертого порядка равны ± 1 . В данной схеме ячейки являются главными контурами по отношению к дереву 5—6—7—8—9.

Если ненулевые миноры порядка k матрицы **B** равны $\pm \delta$ ($\delta \neq 1$), то определитель матрицы контурных сопротивлений $\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{Z}^{(b)}\mathbf{B}^T$ отличается от значения, приведенного в выражении (8.16), в δ^2 раз. Далее рассматриваются лишь матрицы **B** главных контуров произвольной схемы или контуров-ячеек планарной схемы; при этом $\delta = 1$ и для контурного определителя справедлива топологическая формула (8.16).

Следует установить связь между узловым определителем $\Delta^{(y)}$ и контурным определителем $\Delta^{(k)}$ одной и той же схемы. Для этого обе части равенства (8.1)

умножаем на произведение сопротивлений всех ветвей схемы $\prod_{k=1}^B Z_k$. При умножении каждого

слагаемого правой части равенства (8.1) на $\prod_{k=1}^B Z_k$ сопротивления

ветвей каждого дерева сократятся с проводимостями ветвей. В результате в правой части получим сумму произведений сопротивлений ветвей связи деревьев, т. е. контурный определитель. Таким образом,

$$\left(\prod_{k=1}^B Z_k \right) \Delta^{(y)} = \Delta^{(k)}. \quad (8.17)$$

Аналогично устанавливается соотношение

$$\left(\prod_{k=1}^B Y_k \right) \Delta^{(k)} = \Delta^{(y)}. \quad (8.18)$$

Число несокращающихся слагаемых определителей $\Delta^{(y)}$ и $\Delta^{(k)}$ одной и той же схемы одинаково, однако соответствующие слагаемые могут содержать различное число сомножителей (число сомножителей каждого слагаемого равно порядку определителя, т. е. числу независимых узловых или контурных уравнений).

Применяя соотношение (8.17), можно доказать формулы разложения контурного определителя, аналогичные (8.9) ÷ (8.14).

Если схема состоит из двух подсхем, имеющих один общий узел, то для узлового определителя справедливо разложение (8.9). Умножая обе части этого равенства на произведение сопротивлений всех ветвей схемы $\prod_{k=1}^B Z_k$, можно найти

$$\Delta^{(k)} = \Delta_1^{(k)} \Delta_2^{(k)}, \quad (8.19)$$

где $\Delta_1^{(k)}$ и $\Delta_2^{(k)}$ — контурные определители подсхем.

Если схема состоит из двух подсхем, имеющих два общих узла, то узловой определитель этой схемы определяют формулой (8.10). При умножении обеих частей этого равенства на $\prod_{k=1}^B Z_k$ получаем

$$\Delta^{(k)} = \Delta_1^{(k)} \Delta_{2k}^{(k)} + \Delta_2^{(k)} \Delta_{1k}^{(k)}, \quad (8.20)$$

где $\Delta_1^{(k)}(\Delta_2^{(k)})$ — контурный определитель подсхемы $N_1(N_2)$ при разомкнутых зажимах j, k ; $\Delta_{1k}^{(k)}(\Delta_{2k}^{(k)})$ — контурный определитель подсхемы $N_1(N_2)$ при короткозамкнутых зажимах j, k .

Умножая обе части равенства (8.11) на $\prod_{k=1}^B Z_k$, можно доказать, что для контурного определителя справедливо разложение по ветви с сопротивлением Z_j :

$$\Delta^{(k)} = Z_j \Delta^{(k)j} + \Delta_j^{(k)}, \quad (8.21)$$

где $\Delta^{(k)j}$ — контурный определитель схемы при разомкнутой ветви Z_j ; $\Delta_j^{(k)}$ — контурный определитель схемы при короткозамкнутой ветви Z_j . Действительно,

$$\left(\prod_{k=1}^B Z_k \right) Y_j \Delta_j = \left(\prod_{k \neq j} Z_k \right) \Delta_j = \Delta_j^{(k)},$$

$$\left(\prod_{k=1}^B Z_k \right) \Delta^j = Z_j \left(\prod_{k \neq j} Z_k \right) \Delta^j = Z_j \Delta^{(k)j}.$$

Если схема содержит три ветви с сопротивлениями Z_i, Z_j и Z_k , имеющие только один общий узел, то для узлового определителя справедливо разложение (8.13). При умножении обеих частей этого равенства на произведение сопротивлений всех вет-

вей схемы $\prod_{l=1}^B Z_l$ получается

$$\Delta^{(\kappa)} = Z_j Z_k \Delta_i^{(\kappa) jk} + Z_i Z_k \Delta_j^{(\kappa) ik} + Z_i Z_j \Delta_k^{(\kappa) ij} + \\ + Z_k \Delta_{ij}^{(\kappa) k} + Z_j \Delta_{ik}^{(\kappa) j} + Z_i \Delta_{jk}^{(\kappa) i} + \Delta^{(\kappa) ijk}, \quad (8.22)$$

где нижние индексы у контурных определителей в правой части выражения (8.22) указывают номера замкнутых ветвей, а верхние индексы — номера разомкнутых ветвей.

Для доказательства формулы (8.22) достаточно рассмотреть три произведения:

$$\left(\prod_{l=1}^B Z_l \right) Y_i \Delta_i^{jk} = \left(\prod_{l \neq i} Z_l \right) \Delta_i^{jk} = \Delta_i^{(\kappa) jk}; \\ \left(\prod_{l=1}^B Z_l \right) Y_i Y_j \Delta_{ij}^k = \left(\prod_{l \neq i, j} Z_l \right) \Delta_{ij}^k = \Delta_{ij}^{(\kappa) k}; \\ \left(\prod_{l=1}^B Z_l \right) Y_i Y_j Y_k \Delta^{ijk} = \left(\prod_{l \neq i, j, k} Z_l \right) \Delta^{ijk} = \Delta^{(\kappa) ijk}.$$

Если обе части равенства (8.14) умножить на $\prod_{l=1}^B Z_l$, то произведение проводимостей ветвей k -го пути в правой части этого равенства сократится с произведением сопротивлений ветвей того же пути. Произведение сопротивлений ветвей, которые не входят в k -й путь при умножении на k -й узловой определитель Δ_k схемы с замкнутым путем, дает контурный определитель схемы при нулевых сопротивлениях ветвей этого пути. Таким образом, для контурного определителя справедливо разложение

$$\Delta^{(\kappa)} = \sum_k \Delta_k^{(\kappa)}, \quad (8.23)$$

где $\Delta_k^{(\kappa)}$ — контурный определитель схемы, которая получается, если в исходной схеме приравнять нулю сопротивления ветвей k -го пути между парой узлов. Суммирование выполняют для всех возможных путей между выбранной парой узлов.

Топологическая формула для алгебраического дополнения $\Delta_{mm}^{(\kappa)}$ контурного определителя вытекает из равенства

$$\Delta_{mm}^{(\kappa)} = \det (\mathbf{B}_{-m} \mathbf{Z}^{(B)} \mathbf{B}_{-m}^T),$$

где $\mathbf{B}_{-m}$ — матрица, получаемая вычеркиванием m -й строки в матрице $\mathbf{B}$. Вычеркивание m -й строки означает размыкание m -го контура в схеме на рис. 7.37, т. е. размыкание m -й ветви. С помощью теоремы Бине—Коши легко установить, что алгебраическое дополнение $\Delta_{mm}^{(\kappa)}$ равно сумме произведений сопротивлений ветвей связи для деревьев схемы (см. рис. 7.37) с разомкнутой m -й ветвью.

Формулы для контурного определителя и его симметричного алгебраического дополнения дуальны формулам для узлового определителя и его симметричного алгебраического дополнения.

Докажем, что топологическая формула для алгебраического дополнения $\Delta_{mn}^{(\kappa)}$ ($m \neq n$) матрицы контурных сопротивлений схемы (см. рис. 7.36) дуальна формуле для разности $\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}$:

$$\Delta_{mn}^{(\kappa)} = V_{ij, kl} - V_{ik, jl}, \quad (8.24)$$

где $V_{ij, kl}$ ($V_{ik, jl}$) — сумма произведений сопротивлений ветвей, образуемых ветвями связи 2-деревьев типа $T_2(ij, kl)$ ($T_2(ik, jl)$) при разомкнутых m -й и n -й ветвях*.

Действительно, на основании формул (7.61) и (7.60) взаимное сопротивление

$$Z_{nm} = \frac{\Delta_{mn}^{(\kappa)}}{\Delta_{mm}^{(\kappa)}} Z_n.$$

Если числитель и знаменатель выражения (7.53) умножить на произведение сопротивлений всех ветвей схемы $\prod_{k=1}^B Z_k$, то

$$Z_{nm} = \frac{\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}}{\Delta^{(y)}} = \frac{\left(\prod_{k=1}^B Z_k \right) (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)})}{\left(\prod_{k=1}^B Z_k \right) \Delta^{(y)}}.$$

Так как $\Delta_{mm}^{(\kappa)}$ представляет собой контурный определитель схемы на рис. 7.36 при разомкнутой ветви m , а $\Delta^{(y)}$ — узловой определитель этой схемы при разомкнутой ветви m (при разомкнутых зажимах i, l), то $\Delta_{mm}^{(\kappa)} = \left(\prod_{k=1}^B Z_k \right) \Delta^{(y)}$ и, следовательно,

$$\Delta_{mn}^{(\kappa)} = \left(\prod_{k=1}^B Z_k \right) (\Delta_{ij}^{(y)} - \Delta_{ik}^{(y)}) / Z_n.$$

Учитывая равенство (8.8), можно записать

$$\Delta_{mn}^{(\kappa)} = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^B Z_k \right) (W_{ij, kl} - W_{ik, jl}).$$

Каждое слагаемое $W_{ij, kl}$ ($W_{ik, jl}$) есть произведение проводимостей ветвей 2-дерева типа $T_2(ij, kl)$ ($T_2(ik, jl)$). Проводимости ветвей 2-деревьев при умножении на произведение сопротивлений ветвей сокращаются с сопротивлениями тех же ветвей; в результате получается формула (8.24).

Необходимо отметить, что для практического расчета передаточных функций топологические формулы для контурного определителя и его алгебраических дополнений применяют реже, чем топологические формулы, рассмотренные в § 8.1 ÷ 8.5. В случае

* Ветвями связи 2-дерева называют совокупность ветвей схемы, не являющихся ветвями 2-дерева.

планарной схемы для вычисления передаточных функций с помощью контурного определителя и его алгебраических дополнений применима топологическая формула (8.15), если предварительно перейти к дуальной схеме.

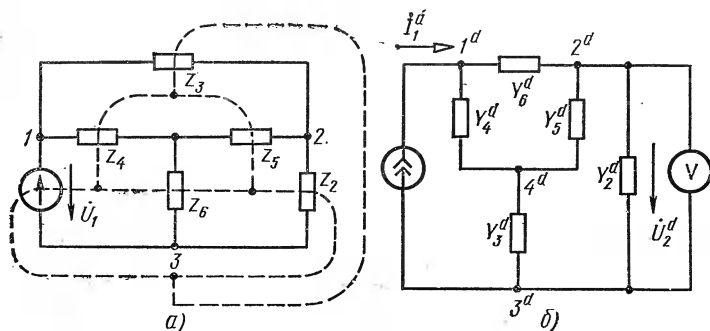


Рис. 8.20

Пример 8.9. Вычислить проводимость $Y_{21} = I_2 / U_1$ схемы на рис. 8.20, а. Решение. На рис. 8.20, б изображена схема, дуальная исходной. Проводимость $Y_{21} = Z_{21}^d = U_2^d / I_1^d$ дуальной схемы. Согласно формуле (8.15),

$$Z_{21}^d = \frac{P_1^{d'} \Delta_1^{d'} + P_2^{d'} \Delta_2^{d'}}{\Delta^d} = \frac{Y_6^d (Y_3^d + Y_4^d + Y_5^d) + Y_4^d Y_5^d}{\Delta^d}.$$

Определитель Δ^d дуальной схемы найдем с помощью разложения по путям между узлами $1^d - 3^d$:

$$\begin{aligned} \Delta^d &= \sum_{k=1}^4 P_k^d \Delta_k^d = Y_3^d Y_4^d (Y_2^d + Y_5^d + Y_6^d) + Y_4^d Y_5^d Y_2^d + \\ &+ Y_6^d Y_5^d Y_3^d + Y_6^d Y_2^d (Y_3^d + Y_4^d + Y_5^d). \end{aligned}$$

Если проводимости ветвей дуальной схемы заменить сопротивлениями ветвей исходной схемы, то

$$Y_{21} = \frac{Z_6 (Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5}{\Delta},$$

где

$$\Delta = Z_3 Z_4 (Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_4 Z_5 Z_2 + Z_6 Z_5 Z_3 + Z_6 Z_2 (Z_3 + Z_4 + Z_5).$$

§ 8.6. Применение сигнальных (направленных) графов к анализу электрических цепей

Как уже отмечалось, линейная электрическая цепь характеризуется различными системами линейных уравнений. Эти уравнения могут быть наглядно отображены в виде сигнального (направленного) графа. Применение сигнальных графов к анализу электрических цепей позволяет существенно уменьшить объем вычислений по сравнению с непосредственным разложением определителя и его алгебраических дополнений. Кроме того, сигнальный граф дает наглядную картину причинно-следственных свя-

Далее рассматриваются основные определения, преобразования и свойства сигнальных графов на примере графов, отображающих узловые уравнения цепи*.

Пусть дана система n линейных уравнений (индекс u для краткости опускается)

$$\left. \begin{aligned} Y_{11}\dot{\Phi}_1 + Y_{12}\dot{\Phi}_2 + \dots + Y_{1n}\dot{\Phi}_n &= J_1; \\ Y_{21}\dot{\Phi}_1 + Y_{22}\dot{\Phi}_2 + \dots + Y_{2n}\dot{\Phi}_n &= J_2; \\ \vdots &\quad \vdots \\ Y_{n1}\dot{\Phi}_1 + Y_{n2}\dot{\Phi}_2 + \dots + Y_{nn}\dot{\Phi}_n &= J_n. \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

$$\mathcal{Y}_{it} = 1 - Y_{it},$$
$$y_{ij} = -Y_{ij} \quad (i \neq j),$$
$$\left. \begin{aligned} \hat{\Phi}_1 &= \mathcal{Y}_{11}\hat{\Phi}_1 + \mathcal{Y}_{12}\hat{\Phi}_2 + \dots + \mathcal{Y}_{1n}\hat{\Phi}_n + \hat{J}_1; \\ \hat{\Phi}_2 &= \mathcal{Y}_{21}\hat{\Phi}_1 + \mathcal{Y}_{22}\hat{\Phi}_2 + \dots + \mathcal{Y}_{2n}\hat{\Phi}_n + \hat{J}_2; \\ &\vdots \\ \hat{\Phi}_n &= \mathcal{Y}_{n1}\hat{\Phi}_1 + \mathcal{Y}_{n2}\hat{\Phi}_2 + \dots + \mathcal{Y}_{nn}\hat{\Phi}_n + \hat{J}_n. \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Сигнальный граф строится по уравнениям (8,26), для чего каждой зависимой (φ_i) и каждой независимой (J_i) переменным ставится в соответствие узел графа. Если коэффициент $\mathcal{Y}_{ij} \neq 0$, то узлы φ_i и φ_j соединяют ветвью, которая направляется от узла φ_j к узлу φ_i и которой ставится в соответствие коэффициент $\mathcal{Y}_{ij}$, называемый передачей ветви. Узлы φ_i и J_i соединяют ветвью, направленной к узлу φ_i и имеющей единичную передачу.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= \mathcal{Y}_{11}\dot{\Phi}_1 + \mathcal{Y}_{12}\dot{\Phi}_2 + \mathcal{Y}_{13}\dot{\Phi}_3 + j_1; \\ \dot{\Phi}_2 &= \mathcal{Y}_{21}\dot{\Phi}_1 + \mathcal{Y}_{22}\dot{\Phi}_2 + \mathcal{Y}_{23}\dot{\Phi}_3 + j_2; \\ \dot{\Phi}_3 &= \mathcal{Y}_{31}\dot{\Phi}_1 + \mathcal{Y}_{32}\dot{\Phi}_2 + \mathcal{Y}_{33}\dot{\Phi}_3 + j_3 \end{aligned} \right\}$$

251

соответствует сигнальный граф на рис. 8.21. Ветви, которые начинаются и заканчиваются в одном и том же узле $\dot{\phi}_i$, называются петлями и имеют передачи, равные $\mathcal{Y}_{ii}$.

Если задан сигнальный граф, то можно записать систему уравнений, отображаемую графом. Уравнение, соответствующее узлу $\dot{\phi}_i$, получается приравниванием переменной $\dot{\phi}_i$ и суммы произведений передач всех ветвей, направленных к узлу $\dot{\phi}_i$, на переменные узлов, в которых эти ветви начинаются.

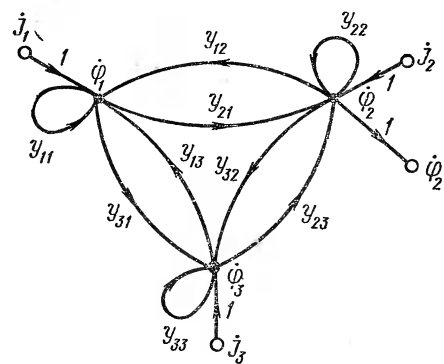


Рис. 8.21

Узел сигнального графа, к которому присоединены только исходящие ветви, называют истоком (узлом источника). Так, граф на рис. 8.21 имеет три узла (источка): $\dot{J}_1$, $\dot{J}_2$, $\dot{J}_3$. Узел графа, к которому направлены все примыкающие ветви, называют стоком (узлом стока). Узлы графа с входящими и выходящими ветвями будем

называть промежуточными. На рис. 8.21 промежуточным узлом является любой из узлов $\dot{\phi}_1$, $\dot{\phi}_2$, $\dot{\phi}_3$. Промежуточный узел легко преобразовать в сток, добавляя ветвь с единичной передачей, направленной из этого узла, и один узел (сток). Например, на рис. 8.21 узел $\dot{\phi}_2$ преобразован в сток.

Систему уравнений (8.26) можно решить методом исключения переменных. Исключению переменной $\dot{\phi}_i$ соответствует основное преобразование графа — исключение промежуточного узла.

Наиболее просто исключается узел $\dot{\phi}_k$, в котором нет петли ($\mathcal{Y}_{kk}=0$). Так, если $\mathcal{Y}_{nn}=0$, то уравнение для n -го узла имеет вид

$$\dot{\phi}_n = \mathcal{Y}_{n1}\dot{\phi}_1 + \mathcal{Y}_{n2}\dot{\phi}_2 + \dots + \mathcal{Y}_{n,n-1}\dot{\phi}_{n-1} + \dot{J}_n.$$

Подставляя выражение для $\dot{\phi}_n$ в другие уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= (\mathcal{Y}_{i1} + \mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{n1})\dot{\phi}_1 + (\mathcal{Y}_{i2} + \mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{n2})\dot{\phi}_2 + \dots + \\ &+ (\mathcal{Y}_{i,n-1} + \mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{n,n-1})\dot{\phi}_{n-1} + \dot{J}_i + \mathcal{Y}_{in}\dot{J}_n. \end{aligned}$$

Таким образом, после исключения n -го узла ветвь, соединяющая узлы $\dot{\phi}_i$ и $\dot{\phi}_j$ и направленная к $\dot{\phi}_i$, имеет передачу

$$\mathcal{Y}'_{ij} = \mathcal{Y}_{ij} + \mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{nj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8.27)$$

Ветвь, соединяющая узлы $\dot{\phi}_i$ и $\dot{J}_n$, не меняется, а между узлами $\dot{\phi}_i$ и $\dot{J}_n$ добавляется ветвь с передачей $\mathcal{Y}_{in}$.

На рис. 8.22, а показан граф, являющийся частным случаем графа на рис. 8.21 при $\mathcal{Y}_{33}=0$. Исключение переменной $\dot{\phi}_3$ приводит к графу на рис. 8.22, б, передачи ветвей которого найдены по сформулированным правилам.

Если $\mathcal{Y}_{kk} \neq 0$, то в узле ϕ_k имеется петля. Пусть $\mathcal{Y}_{nn} \neq 0$ и $\mathcal{Y}_{nn} \neq 1$. Тогда из n -го уравнения (8.26)

$$\dot{\phi}_n = \frac{\mathcal{Y}_{n1}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} \dot{\phi}_1 + \frac{\mathcal{Y}_{n2}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} \dot{\phi}_2 + \dots + \frac{\mathcal{Y}_{n,n-1}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} \dot{\phi}_{n-1} + \frac{1}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} J_n.$$

Подставляя выражение для $\dot{\phi}_n$ в i -е уравнение ($i=1, 2, \dots, n-1$), можно найти

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i = & \left(\mathcal{Y}_{i1} + \frac{\mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{n1}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} \right) \dot{\phi}_1 + \left(\mathcal{Y}_{i2} + \frac{\mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{n2}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} \right) \dot{\phi}_2 + \dots + \\ & + \left(\mathcal{Y}_{i,n-1} + \frac{\mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{n,n-1}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} \right) \dot{\phi}_{n-1} + J_i + \frac{\mathcal{Y}_{in}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} J_n. \end{aligned}$$

Следовательно, после исключения n -го узла с петлей $\mathcal{Y}_{nn}$ ветвь, соединяющая узлы ϕ_i и ϕ_j и направленная к ϕ_i , имеет передачу

$$\mathcal{Y}'_{ij} = \mathcal{Y}_{ij} + \frac{\mathcal{Y}_{in}\mathcal{Y}_{nj}}{1 - \mathcal{Y}_{nn}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8.28)$$

Ветвь, соединяющая узлы ϕ_i и $\hat{J}_i$, не изменяется; а между узлами ϕ_i и $\hat{J}_n$ добавляется ветвь с передачей $\mathcal{Y}_{in}/(1 - \mathcal{Y}_{nn})$.

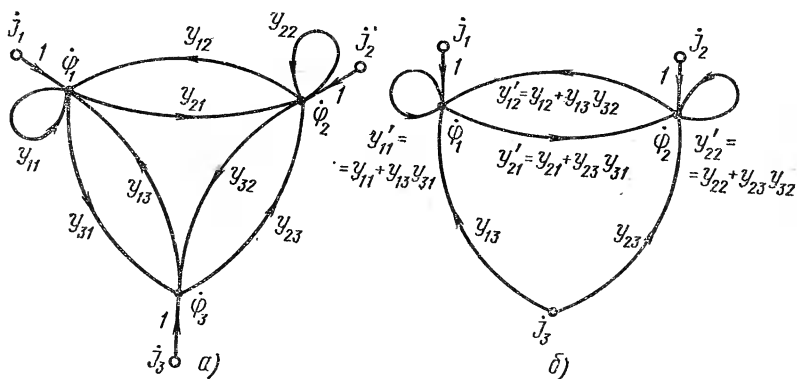


Рис. 8.22

Исключение узла ϕ_3 графа на рис. 8.21 приводит к новому графу (рис. 8.23), передачи ветвей которого записываются на основании сформулированных положений.

Исключение узлов графа не требует записи уравнений и их преобразования; узлы исключают путем непосредственного преобразования графа. Если граф содержит только один исток J_k , то, последовательно исключая все узлы ϕ_i , кроме одного, получаем граф, состоящий из одной ветви и двух узлов — узла источника и узла ϕ_l . Передачу этой ветви называют передачей графа H от истока J_k к стоку ϕ_l . Передача графа

$$H = \phi_l/J_k. \quad (8.29)$$

Таким образом, алгебраическому методу решения системы уравнений методом последовательного исключения неизвестных соответствует преобразование сигнального графа, отображающего эту систему, путем исключения узлов. Преобразование графа

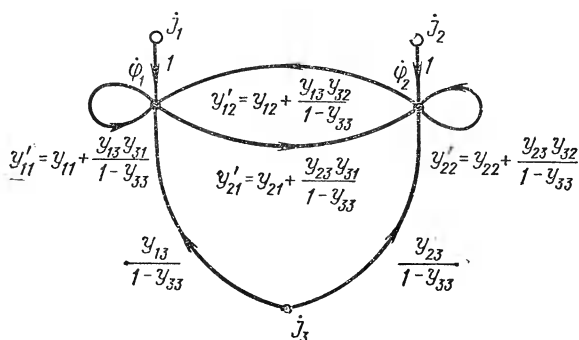


Рис. 8.23

позволяет найти необходимые передачи и, следовательно, переменные ϕ_i . Если граф имеет несколько узлов — истоков, то для определения с помощью графа переменных ϕ_i необходимо применять принцип наложения.

Пример 8.10. Определить ϕ_2 из графа на рис. 8.21 при $\dot{J}_2 = \dot{J}_3 = 0$.

Решение. Если $\dot{J}_2 = \dot{J}_3 = 0$, то в соответствии с рис. 8.23 после исключения узла ϕ_3 данного графа получим граф на рис. 8.24, а. Передачи ветвей графов на рис. 8.23 и 8.24, а, обозначенные одинаковыми буквами, равны.

В графе на рис. 8.24, а добавлены ветвь с единичной передачей и узел ϕ_2 в соответствии с уравнением $\phi_2 = \phi_2$.

Если исключить узел ϕ_2 с петлей $\mathcal{Y}'_{22}$ графа на рис. 8.24, а, то получим граф рис. 8.24, б, передачи $\mathcal{Y}''_{11}$ и $\mathcal{Y}''_{12}$ ветвей которого определим по формуле (8.28).

При исключении узла ϕ_1 графа на рис. 8.24, б результирующий граф будет состоять из одной ветви (рис. 8.24, в). Передача этой ветви представляет собой передачу графа от истока $\dot{J}_1$ к стоку ϕ_2 :

$$H = \phi_2 / \dot{J}_1 = \mathcal{Y}''_{21} / (1 - \mathcal{Y}''_{11}).$$

Следовательно, искомая переменная $\phi_2 = H \dot{J}_1$, где H определяется через передачи ветвей исходного графа.

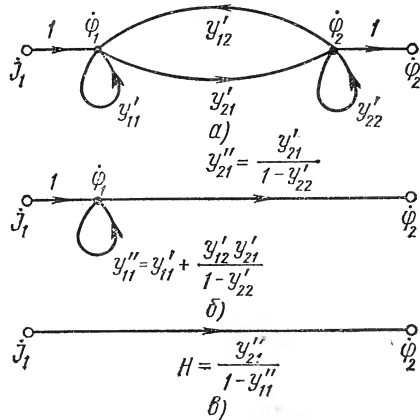


Рис. 8.24

Топологическая формула для передачи сигнального графа. Передача сигнального графа может быть найдена с помощью топологической формулы (формулы Мэсона), для чего необходимо ввести следующие понятия;

путь сигнального графа (направленный путь) — непрерывная последовательность ветвей графа между двумя различными узлами при условии, что начальный узел каждой ветви (кроме первой) совпадает с конечным узлом предыдущей и каждые узел и ветвь в этой последовательности встречаются только один раз; начало первой ветви (конец последней ветви) считают начальным (конечным) узлом пути;

прямой путь (путь передачи) сигнального графа — путь сигнального графа, начинающийся в истоке и заканчивающийся в стоке;

передача прямого пути P'_k — произведение передач ветвей этого пути;

контур сигнального графа — замкнутый путь сигнального графа;

передача контура L_k — произведение передач ветвей этого контура (в частном случае контур может состоять из одной ветви в виде петли);

определитель сигнального графа Δ — определитель системы уравнений, отображаемых графом;

минор прямого пути Δ'_k — определитель графа, получаемого из исходного графа при исключении ветвей, принадлежащих k -му прямому пути, и ветвей, имеющих с ним общие узлы (т. е. определитель той части исходного графа, которая не соприкасается с k -м прямым путем).

Согласно топологической формуле, передача сигнального графа

$$H = \frac{\sum_k P'_k \Delta'_k}{\Delta}, \quad (8.30)$$

где суммирование производят по всем прямым путям.

Определитель сигнального графа

$$\Delta = 1 - \sum_k P_k^{(1)} + \sum_k P_k^{(2)} - \sum_k P_k^{(3)} + \dots, \quad (8.31)$$

где $\sum_k P_k^{(1)} = \sum_k L_k$ — сумма передач всех контуров сигнального графа; $\sum_k P_k^{(r)} = \sum_k L_{k1} L_{k2} \dots L_{kr}$ — сумма произведений передач всех возможных комбинаций из r некасающихся контуров ($r = 2, 3, \dots$). Миноры Δ_k вычисляют по формуле (8.31).

В качестве примера расчета передачи графа по топологической формуле (8.30) можно рассмотреть расчет передачи от истока J_1 к стоку φ_2 для графа на рис. 8.21 при $J_2 = J_3 = 0$.

Граф на рис. 8.21 содержит 8 контуров. Определитель графа

$$\Delta = 1 - \sum_k P_k^{(1)} + \sum_k P_k^{(2)} - \sum_k P_k^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} \sum_k P_k^{(1)} = & \mathcal{Y}_{11} + \mathcal{Y}_{22} + \mathcal{Y}_{33} + \mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{21} + \mathcal{Y}_{23}\mathcal{Y}_{32} + \\ & + \mathcal{Y}_{31}\mathcal{Y}_{13} + \mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{23}\mathcal{Y}_{31} + \mathcal{Y}_{13}\mathcal{Y}_{32}\mathcal{Y}_{21} \end{aligned}$$

— сумма передач восьми контуров;

$$\sum_k P_k^{(2)} = \mathcal{Y}_{11}\mathcal{Y}_{22} + \mathcal{Y}_{22}\mathcal{Y}_{33} + \mathcal{Y}_{33}\mathcal{Y}_{11} + \mathcal{Y}_{11}\mathcal{Y}_{23}\mathcal{Y}_{32} + \\ + \mathcal{Y}_{22}\mathcal{Y}_{31}\mathcal{Y}_{13} + \mathcal{Y}_{33}\mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{21}$$

— сумма произведений передач шести пар не соприкасающихся контуров;

$$\sum_k P_k^{(3)} = \mathcal{Y}_{11}\mathcal{Y}_{22}\mathcal{Y}_{33}$$

— сумма произведений передач трех не соприкасающихся контуров.

Рассматриваемый граф не содержит комбинаций из четырех не соприкасающихся контуров, поэтому слагаемые $\sum_k P_k^{(r)}$ при $r > 3$ в определителе отсутствуют.

Существует два прямых пути от истока J_1 к стоку Φ_2 . Для первого пути передача и минор соответственно $P'_1 = \mathcal{Y}_{21}$; $\Delta'_1 = 1 - \mathcal{Y}_{33}$ (не соприкасающаяся с первым путем часть графа состоит из одной петли $\mathcal{Y}_{33}$); для второго пути передача и минор соответственно $P'_2 = \mathcal{Y}_{31}\mathcal{Y}_{23}$; $\Delta'_2 = 1$ (путь содержит все узлы графа).

Таким образом, искомая передача

$$H = \frac{\Phi_2}{J_1} = \frac{\mathcal{Y}_{21}(1 - \mathcal{Y}_{33}) + \mathcal{Y}_{31}\mathcal{Y}_{23}}{\Delta}.$$

Топологическую формулу (8.30) можно получить, применяя правило Крамера к решению системы линейных уравнений (8.25). Для случая трех уравнений систему (8.25) запишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \mathcal{Y}_{11})\Phi_1 - \mathcal{Y}_{12}\Phi_2 - \mathcal{Y}_{13}\Phi_3 &= J_1; \\ -\mathcal{Y}_{21}\Phi_1 + (1 - \mathcal{Y}_{22})\Phi_2 - \mathcal{Y}_{23}\Phi_3 &= 0; \\ -\mathcal{Y}_{31}\Phi_1 - \mathcal{Y}_{32}\Phi_2 + (1 - \mathcal{Y}_{33})\Phi_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(при $J_2 = J_3 = 0$).

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \mathcal{Y}_{11} & -\mathcal{Y}_{12} & -\mathcal{Y}_{13} \\ -\mathcal{Y}_{21} & 1 - \mathcal{Y}_{22} & -\mathcal{Y}_{23} \\ -\mathcal{Y}_{31} & -\mathcal{Y}_{32} & 1 - \mathcal{Y}_{33} \end{vmatrix} = \\ = 1 - (\mathcal{Y}_{11} + \mathcal{Y}_{22} + \mathcal{Y}_{33} + \mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{21} + \mathcal{Y}_{23}\mathcal{Y}_{32} + \mathcal{Y}_{31}\mathcal{Y}_{13} + \mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{23}\mathcal{Y}_{31} + \\ + \mathcal{Y}_{13}\mathcal{Y}_{32}\mathcal{Y}_{21}) + (\mathcal{Y}_{11}\mathcal{Y}_{22} + \mathcal{Y}_{22}\mathcal{Y}_{33} + \mathcal{Y}_{33}\mathcal{Y}_{11} + \mathcal{Y}_{11}\mathcal{Y}_{23}\mathcal{Y}_{32} + \\ + \mathcal{Y}_{22}\mathcal{Y}_{31}\mathcal{Y}_{13} + \mathcal{Y}_{33}\mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{21}) - \mathcal{Y}_{11}\mathcal{Y}_{22}\mathcal{Y}_{33},$$

что совпадает с выражением (8.31).

Переменная

$$\Phi_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 - \mathcal{Y}_{11} & J_1 & -\mathcal{Y}_{13} \\ -\mathcal{Y}_{21} & 0 & -\mathcal{Y}_{23} \\ -\mathcal{Y}_{31} & 0 & 1 - \mathcal{Y}_{33} \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{Y}_{21}(1 - \mathcal{Y}_{33}) + \mathcal{Y}_{23}\mathcal{Y}_{31}}{\Delta} J_1$$

и, следовательно, отношение $H = \Phi_2 / J_1$ совпадает с найденным ранее.

Справедливость формул (8.30) и (8.31) может быть доказана аналогично и в общем случае.

§ 8.7. Построение сигнальных графов для электрической цепи

Граф уравнений Кирхгофа электрической цепи. Анализ электрической цепи с помощью сигнальных графов сводится к построению графа, соответствующего системе уравнений цепи, и определению по нему передач от узлов источников к узлам зависимых переменных.

Любую цепь можно описать различными уравнениями, поэтому для нее могут быть построены различные сигнальные графы.

Сигнальный граф, соответствующий уравнениям Кирхгофа, строится следующим образом. Выбирается дерево схемы, после чего напряжения ветвей связи определяют через напряжения ветвей дерева по второму закону Кирхгофа, а токи ветвей дерева выражают через токи ветвей связи по первому закону Кирхгофа. Каждая ветвь дерева и ветвь связи в общем случае могут содержать сопротивление, источник э. д. с. и источник тока. Если напряжение каждой ветви дерева (ток каждой ветви связи) записать как функцию тока (напряжения) этой же ветви и параметров источников, то с учетом записанных ранее уравнений Кирхгофа получится система $2s$ уравнений с $2s$ неизвестными, которая легко отображается сигнальным графом.

Например, для схемы на рис. 8.25, а можно выбрать дерево, состоящее из ветвей 1, 2 и 3. Тогда ветви 4, 5 и 6 являются ветвями связи. Напряжения ветвей связи $\dot{U}_4$, $\dot{U}_5$ и $\dot{U}_6$ выражаем через напряжения $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ ветвей дерева:

$$\dot{U}_4 = -\dot{U}_1 - \dot{U}_3; \quad \dot{U}_5 = \dot{U}_2 + \dot{U}_3; \quad \dot{U}_6 = -\dot{U}_1 + \dot{U}_2.$$

Токи ветвей дерева $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ легко выразить через токи $\dot{I}_4$, $\dot{I}_5$ и $\dot{I}_6$ ветвей связи:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_4 + \dot{I}_6, \quad \dot{I}_2 = -\dot{I}_5 - \dot{I}_6, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_4 - \dot{I}_5.$$

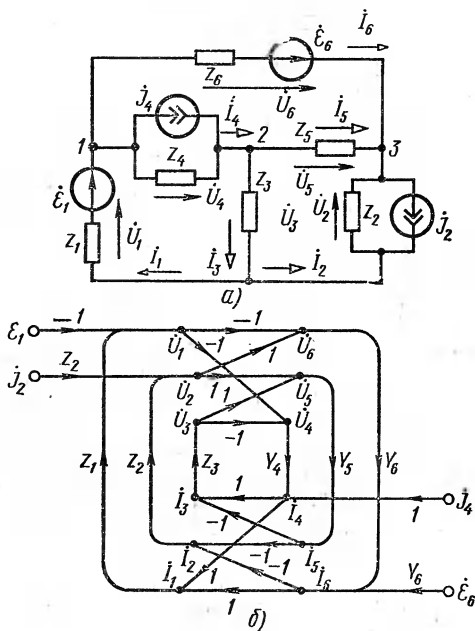


Рис. 8.25

Если напряжениям и токам ветвей схемы поставить в соответствие узлы сигнального графа, то записанные уравнения могут быть отображены с помощью связывающих эти узлы направленных ветвей графа с передачами $+1$ и -1 .

Напряжения ветвей дерева можно записать как функции токов этих же ветвей:

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 - \dot{\mathcal{E}}_1, \quad \dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2 + Z_2 \dot{I}_2, \quad \dot{U}_3 = Z_3 \dot{I}_3,$$

а токи ветвей связи представить как функции напряжений этих же ветвей:

$$\dot{I}_4 = Y_4 \dot{U}_4 + \dot{J}_4, \quad \dot{I}_5 = Y_5 \dot{U}_5, \quad \dot{I}_6 = Y_6 \dot{U}_6 + Y_6 \dot{\mathcal{E}}_6.$$

Введя узлы графа, соответствующие э. д. с. источников напряжений и токам источников токов, можно представить с помощью направленных ветвей графа, связывающих эти узлы, последние шесть уравнений схемы. В результате получают сигнальный граф, отображающий 12 уравнений с 12 неизвестными (рис. 8.25, б).

Следует обратить внимание, что узлы напряжения и тока каждой ветви дерева соединены ветвью графа с передачей, равной сопротивлению ветви дерева, а узлы напряжения и тока каждой ветви связи — ветвью графа с передачей, равной проводимости ветви связи. Кроме того, узел тока $\dot{J}_2$ источника тока в ветви дерева (узел э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_6$ в ветви связи) связан с узлом напряжения $\dot{U}_2$ (узлом тока $\dot{I}_6$) ветвью графа, передача которой равна сопротивлению Z_2 ветви дерева (проводимости Y_6 ветви связи), что соответствует преобразованию источника тока в ветви дерева (источника э. д. с. в ветви связи) в эквивалентный источник э. д. с. (источник тока). Таким образом, при построении сигнального графа с помощью уравнений Кирхгофа источники энергии в ветвях дерева схемы представляют как источники э. д. с., а в ветвях связи — как источники тока. Если в схеме имеются ветви, содержащие только источники э. д. с., и ветви, содержащие только источники тока, то первые должны быть включены в дерево, а вторые — в ветви связи.

Пример 8.11. Определить напряжение $\dot{U}_5$ в схеме на рис. 8.26, а с помощью сигнального графа уравнений Кирхгофа.

Решение. В качестве дерева схемы можно выбрать ветви $\dot{\mathcal{E}}_1$, $Z_3 = r_3$ и $Z_5 = r_5 + j\omega L_5$. Тогда ветви $Z_2 = r_2$, $Z_4 = r_4 - (1/j\omega C_4)$ и $\dot{J}_6$ являются ветвями связи. Для заданной схемы справедливы уравнения

$$\dot{U}_2 = \dot{\mathcal{E}}_1 - \dot{U}_3; \quad \dot{U}_4 = \dot{U}_3 - \dot{U}_5; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{I}_4;$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_4 + \dot{J}_6;$$

$$\dot{U}_3 = Z_3 \dot{I}_3; \quad \dot{U}_5 = Z_5 \dot{I}_5; \quad \dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}_2; \quad \dot{I}_4 = Y_4 \dot{U}_4,$$

которые отображаются графом на рис. 8.26, б.

По принципу наложения

$$\dot{U}_5 = H_{51} \dot{\mathcal{E}}_1 + H_{56} \dot{J}_6,$$

где H_{51} и H_{56} — передачи графа соответственно от источников $\dot{J}_6$ и $\dot{\mathcal{E}}_1$ к узлу $\dot{U}_5$.

Если $\dot{J}_6=0$, то передача

$$H_{51} = \frac{\dot{U}_5}{\dot{\mathcal{E}}_1} = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{\Delta},$$

где $\sum_k \Pi'_k \Delta'_k = \Pi'_1 \Delta'_1 = Y_2 Z_3 Y_4 Z_5$, так как имеется один прямой путь от узла $\dot{\mathcal{E}}_1$ к узлу $\dot{U}_5$, содержащий все узлы, кроме $\dot{J}_6$;

$$\Delta = 1 - (-Y_2 Z_3 - Z_3 Y_4 - Y_4 Z_5) + Y_2 Z_3 Y_4 Z_5,$$

поскольку граф содержит три контура, из которых два не соприкасаются.

Если $\dot{\mathcal{E}}_1=0$, то передача

$$H_{56} = \frac{\dot{U}_5}{\dot{J}_6} = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{\Delta},$$

где $\sum_k \Pi'_k \Delta'_k = \Pi'_5 \Delta'_1 = Z_5 (1 + Y_2 Z_3 + Z_3 Y_4)$, так как существует один прямой путь из узла $\dot{J}_6$ в узел $\dot{U}_5$, а не соприкасающаяся с этим путем часть графа содержит два контура; определитель Δ совпадает с записанным ранее.

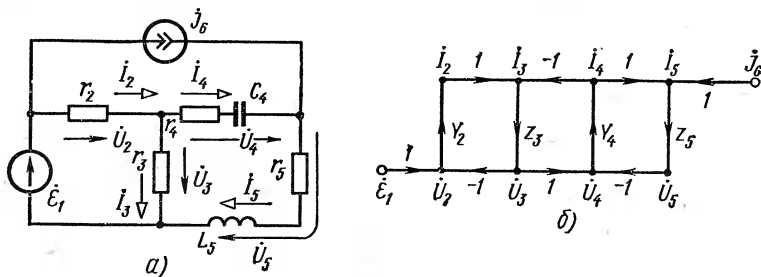


Рис. 8.26

Таким образом, искомое напряжение

$$\dot{U}_5 = [Y_2 Z_3 Y_4 Z_5 \dot{\mathcal{E}}_1 + Z_5 (1 + Y_2 Z_3 + Z_3 Y_4) \dot{J}_6] / \Delta.$$

Графы узловых уравнений, уравнений с напряжениями ветвей дерева и контурных уравнений. Недостатком графа уравнений Кирхгофа схемы является большое число ветвей и узлов графа. Если воспользоваться узловыми или контурными уравнениями или уравнениями с напряжениями ветвей дерева, то для заданной схемы можно построить более простые графы. При этом построение графа выполняется в соответствии с правилом, изложенным в § 8.6. Для схемы с четырьмя узлами граф узловых уравнений построен на рис. 8.21 ($\dot{\phi}_4=0$). Аналогично строят сигнальные графы уравнений с напряжениями ветвей дерева и контурных уравнений.

Граф узловых уравнений (см. рис. 8.21) содержит петли в узлах $\dot{\phi}_k$ с передачами $\mathcal{Z}_{kk} = 1 - Y_{kk}$ (слагаемое 1 имеет размерность проводимости). Для того чтобы построить граф узловых

уравнений без петель в узлах $\dot{\varphi}_k$, узловые уравнения преобразуют следующим образом:

$$\dot{\varphi}_1 = \mathcal{Y}'_{12}\dot{\varphi}_2 + \mathcal{Y}'_{13}\dot{\varphi}_3 + \frac{1}{Y_{11}} j_1^{(y)};$$

$$\dot{\varphi}_2 = \mathcal{Y}'_{21}\dot{\varphi}_1 + \mathcal{Y}'_{23}\dot{\varphi}_3 + \frac{1}{Y_{22}} j_2^{(y)};$$

$$\dot{\varphi}_3 = \mathcal{Y}'_{31}\dot{\varphi}_1 + \mathcal{Y}'_{32}\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{Y_{33}} j_3^{(y)},$$

где

$$\mathcal{Y}'_{ik} = -Y_{ik}/Y_{jj} \quad (j, k = 1, 2, 3; j \neq k).$$

Граф узловых уравнений без петель в узлах $\dot{\varphi}_k$ показан на рис. 8.27. Аналогично строят графы контурных уравнений и уравнений с напряжениями ветвей дерева, не содержащие петель*.

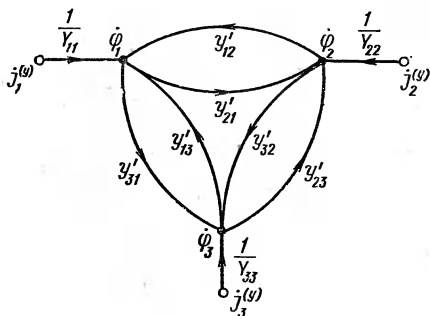
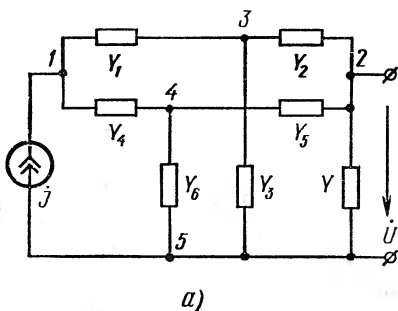


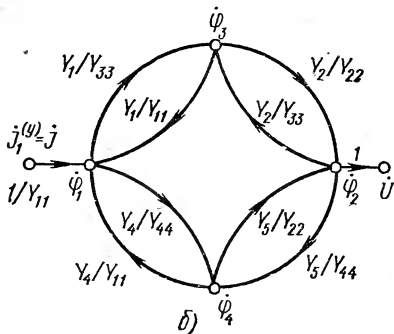
Рис. 8.27

Графы узловых и контурных уравнений, а также уравнений с напряжениями ветвей дерева могут быть построены без записи уравнений. Так, для построения графа узловых уравнений (аналогичного графу на рис. 8.21) потенциалам всех узлов схемы (кроме базисного узла) и узловым токам ставятся в соот-

ветствие узлы $\dot{\varphi}_k$ и $j_k^{(y)}$ сигнального графа. Каждую пару узлов графа $\dot{\varphi}_j$ и $\dot{\varphi}_k$ соединяют ветвью, направленной от узла $\dot{\varphi}_k$ к узлу $\dot{\varphi}_j$,



а)



б)

Рис. 8.28

имеющей передачу $\mathcal{Y}'_{jk} = -Y_{jk}/Y_{jj}$, где Y_{jk} — общая проводимость j -го и k -го узлов схемы; Y_{jj} — собственная проводимость j -го узла

* В дальнейшем при исключении узлов могут появиться петли.

схемы. Узел графа $J_k^{(y)}$ соединяют с узлом графа $\Phi_k^{(y)}$ ветвью с передачей $1/Y_{kk}$, направленной к узлу Φ_k . Вместо узлов $J_k^{(y)}$ графа можно ввести узлы, соответствующие токам источников тока и э. д. с. источников э. д. с. ветвей схемы, и соединить их ветвями с узлами Φ_k , передачи которых записывают из соотношений для $J_k^{(y)}$. Граф уравнений с напряжениями ветвей дерева и граф контурных уравнений строят аналогично.

Пример 8.12. Определить напряжение $\dot{U}$ в схеме на рис. 8.28, а с помощью графа узловых уравнений.

Решение. Пусть $\Phi_5 = 0$. Тогда для данной схемы строим граф узловых уравнений (рис. 8.28, б). В рассматриваемом случае

$$Y_{11} = Y_1 + Y_4;$$

$$Y_{22} = Y_2 + Y_5 + Y_6;$$

$$Y_{33} = Y_3 + Y_2 + Y_5;$$

$$Y_{44} = Y_4 + Y_5 + Y_6.$$

Передачи ветвей графа соответственно:

$$\mathcal{Y}'_{13} = Y_1/Y_{11}; \quad \mathcal{Y}'_{31} = Y_1/Y_{33};$$

$$\mathcal{Y}'_{14} = Y_4/Y_{11}; \quad \mathcal{Y}'_{41} = Y_4/Y_{44};$$

$$\mathcal{Y}'_{23} = Y_2/Y_{22}; \quad \mathcal{Y}'_{32} = Y_2/Y_{33};$$

$$\mathcal{Y}'_{24} = Y_5/Y_{22}; \quad \mathcal{Y}'_{42} = Y_5/Y_{44}.$$

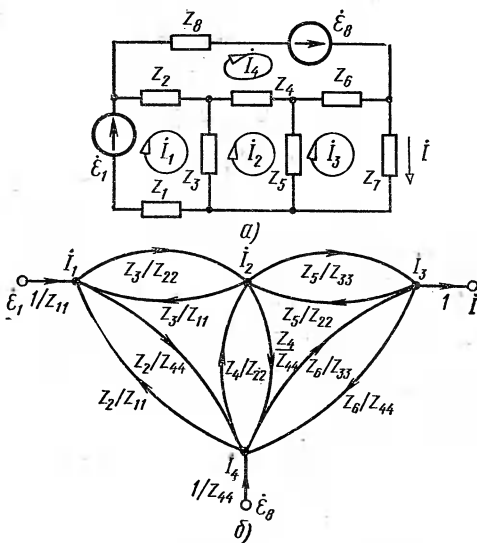


Рис. 8.29

Из графа найдем напряжение $\dot{U} = \Phi_2$:

$$\dot{U} = j \frac{\sum_k P'_k \Delta'_k}{\Delta},$$

где

$$\sum_k P'_k \Delta'_k = \left(\frac{Y_1 Y_2}{Y_{33} Y_{22}} + \frac{Y_5 Y_4}{Y_{44} Y_{22}} \right) / Y_{11},$$

так как существует два пути от узла J к узлу $\dot{U}$, причем части графа, не соприкасающиеся с ними, представляют собой изолированные узлы и имеют определители, равные единице;

$$\Delta = 1 - \left(\frac{Y_1^2}{Y_{11} Y_{33}} + \frac{Y_2^2}{Y_{22} Y_{33}} + \frac{Y_5^2}{Y_{22} Y_{44}} + \frac{Y_4^2}{Y_{11} Y_{44}} + 2 \frac{Y_1 Y_2 Y_5 Y_4}{Y_{11} Y_{22} Y_{33} Y_{44}} \right) + \frac{Y_1^2 Y_5^2}{Y_{11} Y_{33} Y_{22} Y_{44}} + \frac{Y_2^2 Y_4^2}{Y_{11} Y_{22} Y_{33} Y_{44}},$$

так как граф содержит 6 контуров, из которых две пары не соприкасаются.

Пример 8.13. Определить ток I в схеме на рис. 8.29, а с помощью графа контурных уравнений.

Решение. Если контуры схемы выбрать в соответствии с рис. 8.29 а, то искомым ток $I = I_3$. Контурный ток I_3 определим из графа контурных урав-

нений (рис. 8.29, б). В рассматриваемом случае справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + Z_2 + Z_3; & Z_{22} &= Z_3 + Z_4 + Z_5; \\ Z_{33} &= Z_5 + Z_6 + Z_7; & Z_{44} &= Z_2 + Z_4 + Z_6 + Z_8. \end{aligned}$$

Искомый ток

$$I = I_3 = H_{31} \dot{\mathcal{E}}_1 + H_{38} \dot{\mathcal{E}}_8,$$

где H_{31} и H_{38} — передачи графа соответственно от узла $\dot{\mathcal{E}}_1$ и от узла $\dot{\mathcal{E}}_8$ к узлу I_3 .

Граф на рис. 8.29, б содержит 11 контуров, из которых две пары не соприкасаются, поэтому определитель

$$\begin{aligned} \Delta = 1 - & \left(\frac{Z_3^2}{Z_{11}Z_{22}} + \frac{Z_3^2}{Z_{11}Z_{44}} + \frac{Z_4^2}{Z_{22}Z_{44}} + \frac{Z_5^2}{Z_{22}Z_{33}} + \frac{Z_6^2}{Z_{33}Z_{44}} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{Z_2Z_4Z_3}{Z_{11}Z_{44}Z_{22}} + 2 \frac{Z_4Z_5Z_6}{Z_{22}Z_{33}Z_{44}} + 2 \frac{Z_2Z_3Z_5Z_6}{Z_{11}Z_{22}Z_{33}Z_{44}} \right) + \frac{Z_3^2Z_5^2}{Z_{11}Z_{44}Z_{22}Z_{33}} + \frac{Z_3^2Z_6^2}{Z_{11}Z_{22}Z_{44}Z_{33}}. \end{aligned}$$

Имеются четыре прямых пути от узла $\dot{\mathcal{E}}_1$ в узел I_3 , причем миноры этих путей равны единице. Следовательно, передача

$$H_{31} = \left(\frac{Z_3Z_5}{Z_{22}Z_{33}} + \frac{Z_3Z_4Z_6}{Z_{44}Z_{22}Z_{33}} + \frac{Z_2Z_4Z_5}{Z_{44}Z_{22}Z_{33}} + \frac{Z_2Z_6}{Z_{44}Z_{33}} \right) / Z_{11}\Delta.$$

Существует также три прямых пути от узла $\dot{\mathcal{E}}_8$ в узел I_3 . Минор пути, содержащего ветви $1/Z_{44}$ и Z_6/Z_{33} , равен $1 - \frac{Z_3^2}{Z_{11}Z_{22}}$, а миноры других путей равны единице. Передача

$$H_{38} = \left[\frac{Z_6}{Z_{33}} \left(1 - \frac{Z_3^2}{Z_{11}Z_{22}} \right) + \frac{Z_4Z_5}{Z_{22}Z_{33}} + \frac{Z_2Z_3Z_5}{Z_{11}Z_{22}Z_{33}} \right] / (Z_{44}\Delta).$$

Подставляя выражения для H_{31} и H_{38} в формулу для тока I , получим искомый результат.

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ И ЭЛЕКТРОННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ (ТРЕХПОЛЮСНИКАМИ)

§ 9.1. Простейшие цепи с взаимной индукцией

Параметры и уравнения двух идеализированных катушек, расположенных на одном кольцевом сердечнике, были рассмотрены в § 1.8. Для любых двух катушек (контуров), не обязательно имеющих общий сердечник, аналогично можно ввести понятия собственной и взаимной индуктивностей при условии, что часть магнитного потока, обусловленного током одной катушки (одного контура), будет сцеплена с другой катушкой (другим контуром). При этом справедливы определения коэффициента связи и одноименных (однополярных) зажимов, данные в § 1.8.

В общем случае любое число катушек может иметь индуктивную связь. Каждая пара таких катушек характеризуется взаимной индуктивностью и коэффициентом связи.

Взаимную индуктивность пары катушек можно считать алгебраической величиной. Если индуктивно связаны только две катушки, то их зажимы можно разметить так, чтобы взаимная индуктивность была положительной ($M > 0$)*. Пусть одноименные зажимы двух катушек, для которых $M > 0$, известны и отмечены точками (рис. 9.1, а). Положительные направления для токов i_1 , i_2 и э. д. с. взаимной индукции e_{1M} и e_{2M} выбраны одинаковыми относительно одноименных зажимов. Тогда при $di_1/dt > 0$ э. д. с. взаимной индукции $e_{2M} = -M di_1/dt < 0$. Если $i_2 = 0$, то разность потенциалов зажимов второй катушки определяется только э. д. с. e_{2M} . Следовательно, потенциал одного зажима, отмеченного точкой, выше потенциала другого зажима.

Повышение потенциала на зажиме одной обмотки при наличии тока, возрастающего во времени и направленного к одноименному зажиму другой обмотки, учитывают при экспериментальном определении одноименных зажимов катушек. С этой целью одну из катушек присоединяют к источнику постоянной э. д. с., а другую — к вольтметру или гальванометру постоянного тока (рис. 9.1, б). Если в момент замыкания ключа ($di_1/dt > 0$) стрелка измерительного прибора постоянного тока отклоняется в положительную (отрицательную) сторону, то зажимы катушек, присоединенных соответственно к положительным (отрицательным) полюсам источника и прибора, будут одноименными. Для определенных таким способом одноименных зажимов $M > 0$.

В случае, когда число индуктивно связанных катушек больше двух, целесообразно произвольно отметить по одному зажиму каждой катушки (одноименные зажимы) и установить знак взаимной индуктивности для всех пар связанных катушек. Определение знака можно осуществить экспериментально с помощью схемы

* Предполагается, что катушки неподвижны относительно друг друга.

на рис. 9.1, б. Если при замыкании ключа стрелка измерительного прибора отклоняется в положительную (отрицательную) сторону, то взаимная индуктивность пары катушек с произвольно отмеченными зажимами положительна (отрицательна)*.

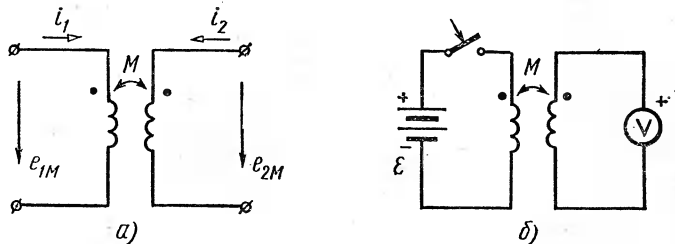


Рис. 9.1

На рис. 9.2, а, б показаны две схемы последовательного соединения катушек, имеющих индуктивности L_1 и L_2 , сопротивления r_1 и r_2 ; взаимная индуктивность $M > 0$. В схеме на рис. 9.2, а, называемой схемой согласного соединения, ток по отно-

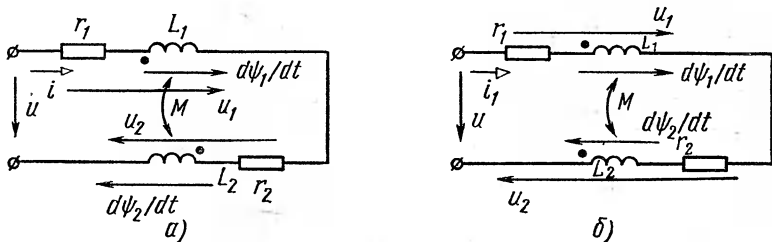


Рис. 9.2

шению к одноименным зажимам каждой катушки ориентирован одинаково, а в схеме на рис. 9.2, б, называемой схемой встречного соединения, — противоположно. Напряжение на зажимах схем

$$u = u_1 + u_2 = r_1 i + \frac{d\Psi_1}{dt} + r_2 i + \frac{d\Psi_2}{dt}.$$

При одинаковом (противоположном) направлении тока относительно одноименных зажимов потокоцепления самоиндукции и взаимной индукции складываются (вычитаются) и для потокоцеплений Ψ_1 и Ψ_2 справедливы выражения

$$\Psi_1 = L_1 i \pm M i;$$

$$\Psi_2 = L_2 i \pm M i,$$

* Взаимную индуктивность можно считать положительной при любом числе связанных катушек. В таком случае для каждой пары катушек необходимы специальная разметка одноименных зажимов: одноименные зажимы одной пары отмечаются, например, точками, другой — звездочками и т. д.

где знак плюс относится к схеме на рис. 9.2, а, знак минус — к схеме на рис. 9.2, б. С учетом выражений для Ψ_1 и Ψ_2 напряжение

$$u = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 \pm 2M) di/dt.$$

Если ток изменяется по гармоническому закону, то можно получить следующее соотношение для комплексных величин:

$$\dot{U} = [r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)] \dot{I} = (Z_1 + Z_2 + 2Z_M) \dot{I},$$

где $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = r_2 + j\omega L_2$ — комплексные сопротивления катушек; $Z_M = \pm j\omega M$ — комплексное сопротивление взаимной индукции. Величина $x_M = \omega M$ имеет размерность сопротивления и называется сопротивлением взаимной индукции.

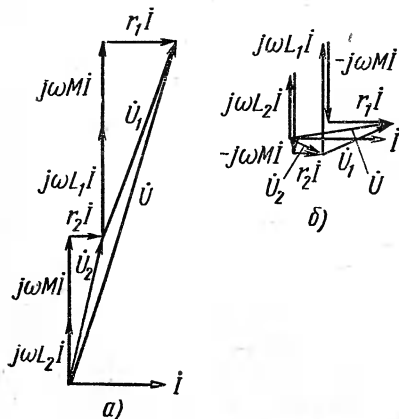


Рис. 9.3

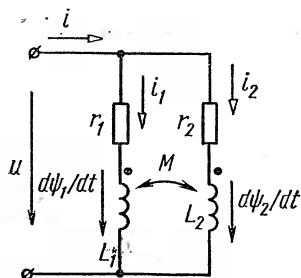


Рис. 9.4

Комплексное сопротивление цепи

$$Z = \dot{U} / \dot{I} = Z_1 + Z_2 + 2Z_M = r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M),$$

эквивалентная индуктивность

$$L_3 = L_1 + L_2 \pm 2M.$$

При согласном (встречном) соединении индуктивность L_3 больше (меньше) суммы $L_1 + L_2$.

Если напряжение $\dot{U}$ на зажимах цепей (рис. 9.2, а, б) задано, то ток $\dot{I} = \dot{U} / Z$. Напряжения $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ на зажимах катушек определяют из выражений

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1 + Z_M}{Z} \dot{U}; \quad \dot{U}_2 = \frac{Z_2 + Z_M}{Z} \dot{U}.$$

На рис. 9.3, а, б построены векторные диаграммы соответственно для согласного ($Z_M = j\omega M$) и встречного ($Z_M = -j\omega M$) соединений катушек. При встречном соединении напряжение на зажимах одной из катушек может отставать по фазе от тока (емкостной эффект). Например, напряжение $\dot{U}_2$ отстает от тока $\dot{I}$ (рис. 9.3, б), так как $L_2 < M$.

При параллельном соединении связанных катушек (рис. 9.4)

$$\begin{aligned}i &= i_1 + i_2; \\u &= r_1 i_1 + d\Psi_1/dt; \\u &= r_2 i_2 + d\Psi_2/dt.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$; $\Psi_2 = L_2 i_2 \pm M i_1$ [знак плюс (минус) соответствует случаю, когда токи i_1 и i_2 одинаково (противоположно) ориентированы относительно одноименных зажимов], $M > 0$, при гармонических токах получаем уравнения для комплексных величин:

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\\dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \\\dot{U} &= Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2.\end{aligned}$$

Если задан ток $\dot{I}$ в неразветвленной части схемы, то напряжение на зажимах цепи

$$\dot{U} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_\Sigma} \dot{I},$$

токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2 - Z_M}{Z_\Sigma} \dot{I}; \quad \dot{I}_2 = \frac{Z_1 - Z_M}{Z_\Sigma} \dot{I},$$

где $Z_\Sigma = Z_1 + Z_2 - 2Z_M$. Входное сопротивление цепи

$$Z = \dot{U}/\dot{I} = (Z_1 Z_2 - Z_M^2)/Z_\Sigma.$$

Пример 9.1. Определить токи в ветвях и построить векторную диаграмму для схемы на рис. 9.5. Составить уравнение баланса активных мощностей для этой схемы и определить активную мощность, передаваемую из одной ветви в другую. Параметры схемы: $1/\omega C = \omega L_1 = 10$ Ом; $r_2 = \omega L_2 = \omega M = 8$ Ом; $\dot{U} = 120$ В.

Решение. Комплексные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right) = 0; \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = 8 + j8 \text{ Ом},$$

комплексное сопротивление взаимной индукции

$$Z_M = j\omega M = j8 \text{ Ом}.$$

Уравнения цепи имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\\dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2 = Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U} = \frac{(8 + j8 - j8) \cdot 120}{(-j8)^2} = 15 \text{ А}; \\\dot{I}_2 &= \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U} = \frac{(-j8) \cdot 120}{(-j8)^2} = -j15 \text{ А}; \\\dot{I} &= 15 - j15 \text{ А}.\end{aligned}$$

На рис. 9.6 построена векторная диаграмма токов и напряжений. Активная мощность, потребляемая цепью,

$$P = \operatorname{Re} \dot{U} \dot{I}^* = \operatorname{Re} [120 (15 - j15)] = 1800 \text{ Вт.}$$

Активная мощность, потребляемая каждой ветвью,

$$P_1 = \operatorname{Re} \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = 120 \cdot 15 = 1800 \text{ Вт;}$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \dot{U}_2 \dot{I}_2^* = \operatorname{Re} (120 j15) = 0.$$

Таким образом, активная мощность потребляется от источника только первой ветвью, однако активное сопротивление и тепловые потери имеются только во второй ветви. Следовательно, активная мощность, потребляемая от

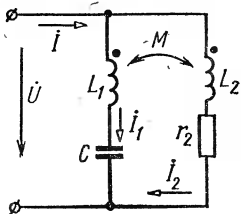


Рис. 9.5

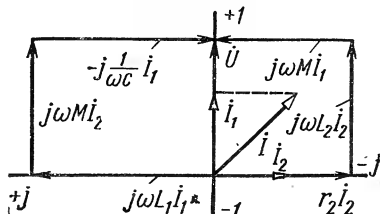


Рис. 9.6

источника первой ветвью, полностью передается за счет индуктивной связи во вторую ветвь. Мощность, передаваемую от первой во вторую ветвь, можно найти, если напряжение $\dot{U}$ представить в виде двух составляющих. При этом

$$P_1 = \operatorname{Re} [Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2] \dot{I}_1^* = \operatorname{Re} (Z_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^*) + \operatorname{Re} (Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1^*);$$

$$P_2 = \operatorname{Re} [Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2] \dot{I}_2^* = \operatorname{Re} (Z_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^*) + \operatorname{Re} (Z_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^*).$$

Слагаемые $\operatorname{Re} (Z_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^*) = r_1 I_1^2$ и $\operatorname{Re} (Z_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^*) = r_2 I_2^2$ определяют потери мощности в активных сопротивлениях соответственно первой и второй ветвей. Величина $\operatorname{Re} (Z_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^*) = P_{12}$ представляет собой активную мощность, передаваемую из первой во вторую ветвь. Если $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\alpha_1}$, $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\alpha_2}$, то

$$P_{12} = \operatorname{Re} [j\omega M I_1 I_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)}] = \omega M I_1 I_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Составляющая мощности P_2

$$\operatorname{Re} (Z_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^*) = -\omega M I_1 I_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2) = -P_{12}.$$

Следовательно,

$$P_1 = r_1 I_1^2 + P_{12}; \quad P_2 = -P_{12} + r_2 I_2^2.$$

Так как $r_1 = 0$,

$$P_1 = P_{12} = \operatorname{Re} (-j8 \cdot 15 \cdot j15) = 1800 \text{ Вт,}$$

$$P_2 = -P_{12} + r_2 I_2^2 = -1800 + 8 \cdot 15^2 = 0.$$

Вся активная мощность, передаваемая из первой ветви во вторую, рассеивается в сопротивлении r_2 .

§ 9.2. Трансформатор в линейном режиме. Индуктивно связанные контуры

Уравнения трансформатора. В простейшем случае трансформатор представляет собой две индуктивно связанные катушки, которые называются обмотками и расположены на общем сердеч-

нике *. Обмотки обладают активными сопротивлениями r_1 и r_2 и индуктивностями L_1 и L_2 (рис. 9.7). В комплексной форме уравнения трансформатора имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2; \end{cases} \quad (9.1)$$

где $Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = r_1 + jx_1$, $Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = r_2 + jx_2$ — сопротивления первичной и вторичной обмоток; $Z_M = j\omega M = jx_M$ — сопротивление индуктивной связи (взаимной индукции).

Если $Z_H = r_H + jx_H$ — сопротивление нагрузки, то к уравнениям (9.1) добавляется уравнение

$$\dot{U}_2 = -Z_H \dot{I}_2. \quad (9.2)$$

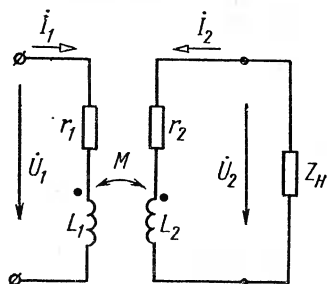


Рис. 9.7

Из уравнений (9.1) и (9.2)

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 - \frac{Z_M^2}{Z_2 + Z_H}}; \quad \dot{I}_2 = -\frac{Z_M}{Z_2 + Z_H} \dot{I}_1.$$

Входное сопротивление трансформатора

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_1 - \frac{Z_M^2}{Z_2 + Z_H}.$$

Выражение для $Z_{\text{вх}}$ можно преобразовать, разделяя вещественную и мнимую части:

$$Z_{\text{вх}} = r_1 + \frac{x_M^2 (r_2 + r_H)}{(r_2 + r_H)^2 + (x_2 + x_H)^2} + j \left[x_1 - \frac{x_M^2 (x_2 + x_H)}{(r_2 + r_H)^2 + (x_2 + x_H)^2} \right]. \quad (9.3)$$

Составляющие входного сопротивления

$$r_{\text{вх}} = \frac{x_M^2 (r_2 + r_H)}{(r_2 + r_H)^2 + (x_2 + x_H)^2}; \quad (9.4a)$$

$$x_{\text{вх}} = -\frac{x_M^2 (x_2 + x_H)}{(r_2 + r_H)^2 + (x_2 + x_H)^2} \quad (9.4b)$$

называют соответственно вносимыми активным и реактивным сопротивлениями. Сопротивление $r_{\text{вх}}$ увеличивает входное активное сопротивление со стороны зажимов первичной обмотки по сравнению с величиной r_1 . Увеличение активного сопротивления обусловлено рассеиванием энергии в активном сопротивлении второго контура. Сопротивление $x_{\text{вх}}$ увеличивает или уменьшает входное реактивное сопротивление по сравнению с величиной x_1 в зависи-

* Как правило, сердечник выполняется из ферромагнитного материала с высокой магнитной проницаемостью μ ; в линейном режиме $\mu = \text{const}$. Находят применение также трансформаторы с сердечником из неферромагнитного материала ($\mu = 1$).

мости от знака реактивного сопротивления $x_2 + x_n$. Увеличению (уменьшению) входного реактивного сопротивления соответствует увеличение (уменьшение) общего магнитного потока по сравнению с потоком самоиндукции за счет потока взаимной индукции.

Активная мощность, отдаваемая источником напряжения $\dot{U}_1$,

$$P_1 = \operatorname{Re}(\dot{U}_1 \dot{I}_1^*) = \operatorname{Re}(Z_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^*) + \operatorname{Re}(Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1^*) = r_1 I_1^2 + P_{12},$$

где $P_{12} = \operatorname{Re}(Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1^*)$. Составляющая $r_1 I_1^2$ мощности P_1 расходуется на тепловые потери в первом контуре; составляющая P_{12} передается во второй контур вследствие индуктивной связи. Если $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\alpha_1}$, $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\alpha_2}$, то

$$P_{12} = \operatorname{Re}[j x_M I_1 I_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)}] = x_M I_1 I_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Активная мощность, потребляемая нагрузкой,

$$P_2 = \operatorname{Re}(-\dot{U}_2 \dot{I}_2^*) = \operatorname{Re}(-Z_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^*) + \operatorname{Re}(-Z_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^*).$$

Составляющая мощности P_2

$$\operatorname{Re}(-Z_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^*) = \operatorname{Re}[-j x_M I_1 I_2 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}] = x_M I_1 I_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = P_{12},$$

следовательно, $P_2 = P_{12} - r_2 I_2^2$, т. е. активная мощность нагрузки меньше мощности, передаваемой во второй контур, на величину потерь в сопротивлении r_2 . Выражение баланса активных мощностей можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 + r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 = \\ &= r_1 I_1^2 + (r_1 + r_2) I_2^2. \end{aligned}$$

Для расчета разветвленных цепей с трансформаторами можно воспользоваться матричным способом, для чего составляют неопределенные матрицы узловых проводимостей и контурных сопротивлений трансформатора. Схема четырехконечного трансформатора (рис. 9.8, а) характеризуется уравнениями, аналогичными (9.1):

$$\dot{U}_{ii} = Z_1 \dot{I}_i + Z_M \dot{I}_j;$$

$$\dot{U}_{jk} = Z_M \dot{I}_i + Z_2 \dot{I}_j,$$

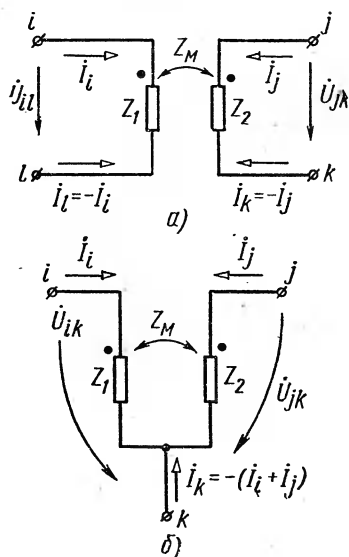


Рис. 9.8

откуда

$$\dot{I}_i = \frac{1}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} (Z_2 \dot{U}_{ii} - Z_M \dot{U}_{jk});$$

$$\dot{I}_j = \frac{1}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} (Z_1 \dot{U}_{jk} - Z_M \dot{U}_{ii}).$$

Учитывая, что $\dot{U}_{il} = \dot{\phi}_l - \dot{\phi}_i$, $\dot{U}_{jk} = \dot{\phi}_j - \dot{\phi}_k$, $\dot{I}_l = -I_l$, $\dot{I}_k = -\dot{I}_j$, получаем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{I}_j \\ \dot{I}_k \\ \dot{I}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \begin{bmatrix} Z_2 & -Z_M & Z_M - Z_2 \\ -Z_M & Z_1 & -Z_1 & Z_M \\ Z_M - Z_1 & Z_1 & -Z_M \\ -Z_2 & Z_M - Z_M & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_l \\ \dot{\phi}_j \\ \dot{\phi}_k \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, неопределенная матрица узловых проводимостей четырехполюсного трансформатора

$$Y_n^{(y)} = \begin{bmatrix} Y_{il} & Y_{ij} & Y_{ik} & Y_{il} \\ Y_{ji} & Y_{jj} & Y_{jk} & Y_{jl} \\ Y_{kl} & Y_{kj} & Y_{kk} & Y_{kl} \\ Y_{li} & Y_{lj} & Y_{lk} & Y_{li} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_2 & -Z_M & Z_M - Z_2 \\ -Z_M & Z_1 & -Z_1 & Z_M \\ Z_M - Z_1 & Z_1 & -Z_M \\ -Z_2 & Z_M - Z_M & Z_2 \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

где $\Delta = Z_1 Z_2 - Z_M^2$.

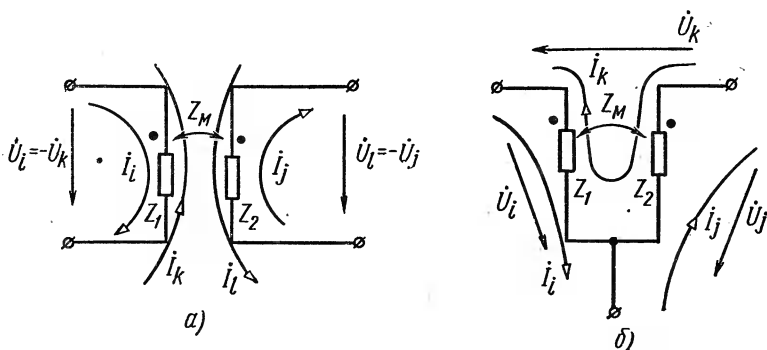


Рис. 9.9

Аналогично находят матрицу $Y_n^{(y)}$ трехполюсного трансформатора (рис. 9.8, б):

$$Y_n^{(y)} = \begin{bmatrix} Y_{il} & Y_{ij} & Y_{ik} \\ Y_{ji} & Y_{jj} & Y_{jk} \\ Y_{kl} & Y_{kj} & Y_{kk} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_2 & -Z_M & -Z_2 + Z_M \\ -Z_M & Z_1 & Z_M - Z_1 \\ -Z_2 + Z_M & Z_M - Z_1 & Z_1 + Z_2 - 2Z_M \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

В матрицах (9.5) и (9.6) сопротивление $Z_M = j\omega M$ ($M > 0$). Если у одной из обмоток изменить расположение зажима, отмеченного точкой, то $Z_M = -j\omega M$. При вычеркивании одного столбца и одной строки из неопределенной матрицы получается определенная матрица. Например, вычеркивая третий столбец и третью

строку в матрице (9.6), получаем

$$\mathbf{Y}^{(y)} = \begin{bmatrix} Y_{ii} & Y_{ij} \\ Y_{ji} & Y_{jj} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_2 & -Z_M \\ -Z_M & Z_1 \end{bmatrix}. \quad (9.6a)$$

Вычеркивание k -го столбца и k -й строки в матрице проводимостей означает, что заземляется k -й узел ($\phi_k = 0$) и не учитывается уравнение для тока $\dot{I}_k$.

В схеме на рис. 9.9, а $\dot{I}_i$, $\dot{I}_j$, $\dot{I}_k$, $\dot{I}_l$ — контурные токи. Схема описывается уравнениями

$$\dot{U}_i = Z_1(\dot{I}_i - \dot{I}_k) + Z_M(\dot{I}_l - \dot{I}_j);$$

$$\dot{U}_l = Z_M(\dot{I}_i - \dot{I}_k) + Z_2(\dot{I}_l - \dot{I}_j).$$

Учитывая $\dot{U}_k = -\dot{U}_i$, $\dot{U}_j = -\dot{U}_l$, нетрудно записать матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_j \\ \dot{U}_k \\ \dot{U}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_M & -Z_1 & Z_M \\ -Z_M & Z_2 & Z_M & -Z_2 \\ -Z_1 & Z_M & Z_1 & -Z_M \\ Z_M & -Z_2 & -Z_M & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{I}_j \\ \dot{I}_k \\ \dot{I}_l \end{bmatrix},$$

откуда неопределенная матрица контурных сопротивлений четырехполюсного трансформатора

$$\mathbf{Z}_H^{(K)} = \begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} & Z_{ik} & Z_{il} \\ Z_{ji} & Z_{jj} & Z_{jk} & Z_{jl} \\ Z_{ki} & Z_{kj} & Z_{kk} & Z_{kl} \\ Z_{li} & Z_{lj} & Z_{lk} & Z_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_M & -Z_1 & Z_M \\ -Z_M & Z_2 & Z_M & -Z_2 \\ -Z_1 & Z_M & Z_1 & -Z_M \\ Z_M & -Z_2 & -Z_M & Z_2 \end{bmatrix}. \quad (9.7)$$

Аналогично вычисляется матрица $\mathbf{Z}_H^{(K)}$ трехполюсного трансформатора (рис. 9.9, б):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_H^{(K)} &= \begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} & Z_{ik} \\ Z_{ji} & Z_{jj} & Z_{jk} \\ Z_{ki} & Z_{kj} & Z_{kk} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_M & -Z_1 + Z_M \\ -Z_M & Z_2 & Z_M - Z_2 \\ -Z_1 + Z_M & Z_M - Z_2 & Z_1 + Z_2 - 2Z_M \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Следует отметить, что матрицы $\mathbf{Y}_H^{(y)}$ и $\mathbf{Z}_H^{(K)}$ симметричны, т. е. трансформатор удовлетворяет принципу взаимности.

При вычеркивании одной строки и одного столбца из матрицы $\mathbf{Z}_H^{(K)}$ получается определенная матрица контурных сопротивлений. Вычеркивание k -го столбца и k -й строки означает, что контурный ток $\dot{I}_k = 0$ и уравнение для напряжения $\dot{U}_k$ не учитывается.

Совершенный и идеальный трансформаторы. Совершенный трансформатор, рассмотренный в § 1.8, представляет собой част-

ный случай трансформатора (см. рис. 9.7) при $r_1 = r_2 = 0$; $M = \sqrt{L_1 L_2}$ (или $K_c = M/\sqrt{L_1 L_2} = 1$). Уравнениям (1.28) соответствуют уравнения в комплексной форме (9.1) при $Z_1 = j\omega L_1$; $Z_2 = j\omega L_2$; $Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2}$. Отношение напряжений совершенного трансформатора

$$n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\sqrt{Z_2}(\sqrt{Z_1} i_1 + \sqrt{Z_2} i_2)}{\sqrt{Z_1}(\sqrt{Z_1} i_1 + \sqrt{Z_2} i_2)} = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

не зависит от нагрузки и называется коэффициентом трансформации; $n = w_2/w_1$ (см. § 1.8).

Пусть магнитная проницаемость сердечника совершенного трансформатора $\mu \rightarrow \infty$. Тогда $L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$; коэффициент трансформации $n = \sqrt{L_2/L_1} = w_2/w_1$ — конечная величина. Из уравнений (9.1) можно найти

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} i_2 = -n i_2$$

или

$$i_2 = \frac{U_2}{j\omega L_2} - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} i_1 = -\frac{1}{n} i_1,$$

т. е. отношение токов i_1/i_2 также не зависит от нагрузки.

Трансформатор, характеризуемый уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= n \dot{U}_1; \\ i_2 &= -\frac{1}{n} i_1, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

называют идеальными. Идеальный трансформатор представляет собой предельный случай совершенного трансформатора при $\mu \rightarrow \infty$ (рис. 9.10, а, б).

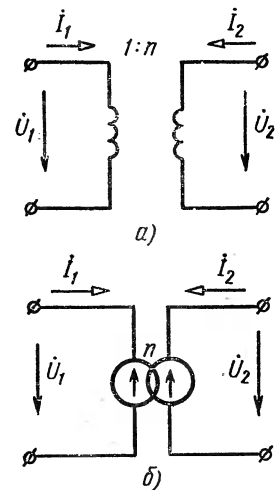
Входное сопротивление идеального трансформатора, нагруженного на сопротивление $Z_n = \dot{U}_2/(-\dot{I}_2)$,

$$Z_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = Z_n/n^2, \quad (9.10)$$

т. е. трансформатор обладает свойством преобразования сопротивления в $1/n^2$ раз и может применяться для согласования сопротивлений.

Так как для совершенного и идеального трансформаторов $Z_1 Z_2 - Z_M^2 = 0$, то матрицы узловых проводимостей (9.5) и (9.6) не существуют. Для совершенного трансформатора применимы выражения (9.7) и (9.8) матриц контурных сопротивлений; в случае идеального трансформатора матрицы (9.7) и (9.8) также не существуют. Идеальный трансформатор часто применяют как многополюсный элемент для построения различных схем замещения.

Рис. 9.10



Резонанс в индуктивно связанных контурах. В радиотехнике и технике связи применяют колебательные контуры высокой добротности с индуктивной связью (рис. 9.11). Входное сопротивление $Z_{вх}$ связанных контуров, вносимые активное и реактивное сопротивления можно найти соответственно из выражений (9.3), (9.4а) и (9.4б), если $r_n = 0$; $x_n = 0$, $x_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$, $x_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2$.

В связанных контурах различают несколько видов резонанса, которые достигаются при изменениях реактивных параметров или частоты. Если изменять емкость C_1 первого контура, то при $x_1 + x_{вн} = 0$ токи I_1 и I_2 принимают максимальные значения:

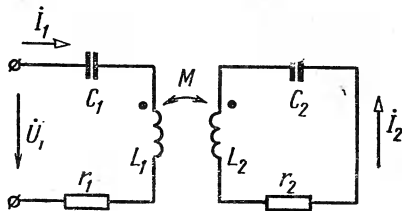


Рис. 9.11

$$I_{1\max} = \frac{U_1}{r_1 + r_{вн}}; \quad I_{2\max} = \frac{x_M I_{1\max}}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}};$$

Такой режим цепи называют первым частным резонансом. Аналогично можно определить второй частный резонанс, когда достигается максимум тока I_2 с помощью изменения емкости C_2 при неизменных параметрах первого контура.

Значения $I_{1\max}$ и $I_{2\max}$ зависят от сопротивления взаимной индукции x_M , т. е. от величины коэффициента связи K_c . Учитывая, что

$$I_{2\max} = \frac{x_M U_1}{\left(r_1 + \frac{x_M^2 r_2}{z_2^2}\right) z_2} = \frac{z_2 x_M U_1}{r_1 z_2^2 + r_2 x_M^2},$$

где $z_2^2 = r_2^2 + x_2^2$, из уравнения $\partial I_{2\max} / \partial x_M = 0$ можно определить значение x_M , при котором $I_{2\max}$ будет наибольшим: $x_M = z_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$. Наибольшее значение тока $I_{2\max}$

$$(I_{2\max})_{\max} = \frac{U_1}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

При этом

$$I_{1\max} = U_1 / 2r_1.$$

Режим цепи, при котором $x_1 + x_{вн} = 0$ и установлена оптимальная связь $x_M = z_2 \sqrt{r_1 / r_2}$, называют сложным резонансом.

Можно настроить в резонанс каждый из контуров в отдельности. При этом $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Если затем устанавливается оптимальная связь $x_M = z_2 \sqrt{r_1 / r_2} = r_2 \sqrt{r_1 / r_2} = \sqrt{r_1 r_2}$, то режим цепи называют полным резонансом. При полном резонансе значения токов I_1 и I_2 те же, что и при сложном резонансе.

Целесообразно рассмотреть частотную характеристику модуля взаимной проводимости $y_{21} = I_2 / U_1$ для двух контуров с одина-

ковыми параметрами $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, $r_1 = r_2 = r$ и, следовательно, $x_1 = x_2 = x$ (данная частотная характеристика аналогична частотной характеристике тока I_2). Комплексная взаимная проводимость $Y_{21} = I_2/\dot{U}_1 = -Z_M/(Z_1 Z_2 - Z_M^2)$ или ($Z_1 = Z_2 = r + jx$, $Z_M = jx_M$)

$$Y_{21} = \frac{-jx_M}{r^2 - x^2 + x_M^2 + j2rx} = \frac{-jx_M/r^2}{1 - (x/r)^2 + (x_M/r)^2 + 2j(x/r)}.$$

Отношение $a = x/r$ — обобщенная расстройка контуров (см. § 7.6). При резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $a = 0$. При небольших отклонениях частоты ω от резонансной (небольших расстройках)

$$a = \frac{1}{r} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{\omega_0 L}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega \omega_0} \approx \frac{2Q}{\omega_0} (\omega - \omega_0).$$

В области частот, близких к ω_0 , отношение

$$x_M/r = \omega M/r = K_c \omega L/r \approx K_c \omega_0 L/r = K_c Q.$$

Модуль взаимной проводимости

$$y_{21} = \frac{K_c Q/r}{\sqrt{[1 - a^2 + (K_c Q)^2]^2 + (2a)^2}}.$$

Наибольшее значение взаимной проводимости $y_{21\max} = 1/2r$ имеет место при полном или сложном резонансе [если контуры одинаковые, то $(I_{2\max})_{\max} = U_1/2r$]. Разделив y_{21} на $y_{21\max}$, получаем нормированную характеристику связанных контуров:

$$\frac{y_{21}}{y_{21\max}} = \frac{2K_c Q}{\sqrt{(1 - a^2 + K_c^2 Q^2)^2 + 4a^2}}. \quad (9.11)$$

Величина отношения (9.11) при любой расстройке a зависит от произведения $K_c Q$. В частности, при резонансе ($a = 0$)

$$\left(\frac{y_{21}}{y_{21\max}} \right)_p = \frac{2K_c Q}{1 + K_c^2 Q^2}. \quad (9.12)$$

Отношение (9.12) принимает наибольшее значение, равное единице (при $K_c Q = 1$), т. е. в случае оптимальной связи. Если $K_c Q \geq 1$, то $(y_{21}/y_{21\max}) < 1$.

Дифференцируя функцию (9.11) по a и прирав-

нявая производную к нулю, вычисляем значения a , соответствующие максимумам функции (9.11):

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{K_c^2 Q^2 - 1}.$$

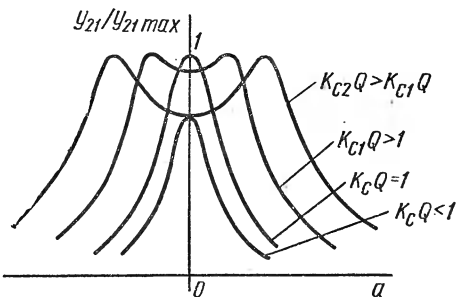


Рис. 9.12

Функция имеет максимумы только при сильной связи, т. е. при $K_c Q > 1$. Если $K_c Q < 1$, то $a_{1,2}$ — мнимые числа. Максимальные значения функции (9.11) равны единице. При сильной связи функция (9.11) имеет также минимум, определяемый выражением (9.12). При $K_c Q < 1$ (слабая и оптимальная связь) функция (9.11) имеет только один максимум для $a = 0$.

Семейство зависимостей $y_{21}/y_{21\max}$ для различных значений $K_c Q$ приведено на рис. 9.12. Связанные контуры при $K_c Q \geq 1$ позволяют получить более широкую полосу пропускания, чем у одиночного контура. Изменяя коэффициент связи, можно изменять форму частотной характеристики.

§ 9.3. Разветвленные цепи с взаимной индукцией

Уравнения разветвленных цепей. Для разветвленной цепи с взаимной индукцией матрица комплексных сопротивлений ветвей

$$\mathbf{Z}^{(B)} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & \dots & Z_{1B} \\ Z_{21} & Z_2 & \dots & Z_{2B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{B1} & Z_{B2} & \dots & Z_B \end{bmatrix}, \quad (9.13)$$

где элементы главной диагонали $Z_1, Z_2, \dots, Z_B$ — комплексные сопротивления всех ветвей; элементы вне главной диагонали $Z_{ij} = Z_{ji}$ ($i \neq j$) — комплексные сопротивления индуктивной связи i -й и j -й ветвей. Сопротивление $Z_{ij} = jx_{ij} = j\omega M$ ($Z_{ij} = -jx_{ij} = -j\omega M$), если ориентация i -й и j -й ветвей по отношению к одноименным зажимам одинакова (противоположна). Для ветвей, не имеющих индуктивной связи, $Z_{ij} = 0$.

Матрица проводимостей ветвей цепи с взаимной индукцией определяется как матрица, обратная матрице (9.13):

$$\mathbf{Y}^{(B)} = [\mathbf{Z}^{(B)}]^{-1}. \quad (9.14)$$

Зная матрицы $\mathbf{Y}^{(B)}$ и $\mathbf{Z}^{(B)}$, можно составить узловые уравнения, уравнения с напряжениями ветвей дерева и контурные уравнения (7.27), (7.28) и (7.29). Матрицы этих уравнений вычисляют, как и в цепи без взаимной индукции, по выражениям (7.30) ÷ (7.35). Однако в отличие от цепей без индуктивных связей матрицы $\mathbf{Z}^{(B)}$ и $\mathbf{Y}^{(B)}$ не являются диагональными. Матрицы $\mathbf{Y}^{(Y)}$, $\mathbf{Y}^{(C)}$, $\mathbf{Z}^{(K)}$ цепей с взаимной индукцией симметричны, так как симметричны матрицы $\mathbf{Z}^{(B)}$ и $\mathbf{Y}^{(B)}$, т. е. такие цепи удовлетворяют принципу взаимности.

Во многих случаях не все ветви цепи имеют индуктивную связь, поэтому с помощью надлежащей нумерации ветвей матрице $\mathbf{Z}^{(B)}$ нетрудно придать квазидиагональную форму:

$$\mathbf{Z}^{(B)} = \begin{bmatrix} Z_{11} & & & \\ & Z_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_{mm} \end{bmatrix},$$

где подматрицы $Z_{11}, Z_{22}, \dots, Z_{mm}$ могут быть квадратными недиагональными или диагональными. Такое представление матрицы $Z^{(B)}$ облегчает ее обращение, так как обратная матрица

$$Y^{(B)} = \begin{bmatrix} Z_{11} & & \\ & Z_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & Z_{mm} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{-1} & & \\ & Z_{22}^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & Z_{mm}^{-1} \end{bmatrix}.$$

В качестве примера составления матричных уравнений можно рассмотреть схему на рис. 9.13, а, граф которой показан на

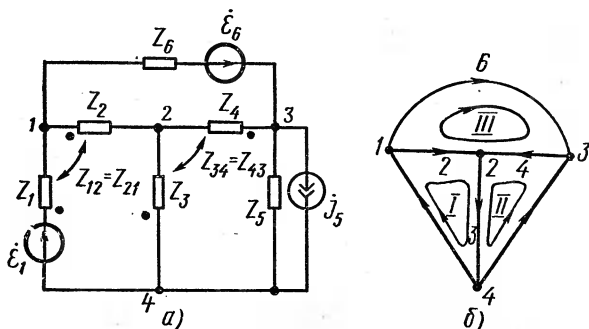


Рис. 9.13

рис. 9.13, б. Матрица сопротивлений ветвей

$$Z^{(B)} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & & & & \\ Z_{12} & Z_2 & & & & \\ & & Z_3 & Z_{34} & & \\ & & Z_{34} & Z_4 & & \\ & & & & Z_5 & \\ & & & & & Z_6 \end{bmatrix}.$$

В этой матрице выделены три подматрицы, которые легко обращаются:

$$Z_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{11}} \begin{bmatrix} Z_2 & -Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_2 \end{bmatrix};$$

$$Z_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_3 & Z_{34} \\ Z_{34} & Z_4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{22}} \begin{bmatrix} Z_4 & -Z_{34} \\ -Z_{34} & Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_3 & Y_{34} \\ Y_{34} & Y_4 \end{bmatrix};$$

$$Z_{33}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta_{11} = Z_1 Z_2 - Z_{12}^2; \quad \Delta_{22} = Z_3 Z_4 - Z_{34}^2;$$

$$Y_1 = Z_2 / \Delta_{11}; \quad Y_2 = Z_1 / \Delta_{11}; \quad Y_3 = Z_4 / \Delta_{22}; \quad Y_4 = Z_3 / \Delta_{22};$$

$$Y_{12} = -Z_{12} / \Delta_{11}; \quad Y_{34} = -Z_{34} / \Delta_{22}; \quad Y_5 = 1 / Z_5; \quad Y_6 = 1 / Z_6.$$

Таким образом, матрица проводимостей ветвей

$$\mathbf{Y}^{(B)} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_{12} & & & & \\ Y_{12} & Y_2 & & & & \\ & & Y_3 & Y_{34} & & \\ & & Y_{34} & Y_4 & & \\ & & & & Y_5 & \\ & & & & & Y_6 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что для принятой ориентации ветвей (рис. 9.13, б) $Z_{12} = j\omega M_{12}$; $Z_{34} = -j\omega M_{34}$.

Для составления узловых уравнений необходимо записать узловую матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

и вычислить матрицы узловых проводимостей $\mathbf{Y}^{(Y)} = \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(B)}\mathbf{A}^{(T)}$ и узловых токов $\mathbf{J}^{(Y)} = \mathbf{A}\mathbf{J}^{(B)} - \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(B)}\mathcal{E}^{(B)}$, где $\mathbf{J}^{(B)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dot{J}_5 \ 0]^T$, $\mathcal{E}^{(B)} = [\dot{\mathcal{E}}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dot{\mathcal{E}}_6]^T$.

В результате вычислений получают узловые уравнения

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_6 - 2Y_{12} & -Y_2 + Y_{12} & -Y_6 \\ -Y_2 + Y_{12} & Y_2 + Y_3 + Y_6 - 2Y_{34} & -Y_4 + Y_{34} \\ -Y_6 & -Y_4 + Y_{34} & Y_4 + Y_5 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} (Y_1 - Y_{12})\dot{\mathcal{E}}_1 - Y_6\dot{\mathcal{E}}_6 \\ Y_{12}\dot{\mathcal{E}}_1 \\ -\dot{J}_5 + Y_6\dot{\mathcal{E}}_6 \end{bmatrix}.$$

Записывая матрицу контуров

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \text{I} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{II} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \text{III} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и вычисляя матрицы контурных сопротивлений $\mathbf{Z}^{(K)} = \mathbf{B}\mathbf{Z}^{(B)}\mathbf{B}^{(T)}$ и контурных э. д. с. $\mathcal{E}^{(K)} = \mathbf{B}\mathcal{E}^{(B)} - \mathbf{B}\mathbf{Z}^{(B)}\mathbf{J}^{(B)}$, легко получить контурные уравнения

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 + 2Z_{12} & Z_3 + Z_{34} & -Z_2 - Z_{12} + Z_{34} \\ Z_3 + Z_{34} & Z_3 + Z_4 + Z_5 + 2Z_{34} & Z_4 + Z_{34} \\ -Z_2 - Z_{12} + Z_{34} & Z_4 + Z_{34} & Z_2 + Z_4 + Z_6 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \dot{J}_1^{(K)} \\ \dot{J}_2^{(K)} \\ \dot{J}_3^{(K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{E}}_1 \\ -Z_5\dot{J}_5 \\ \dot{\mathcal{E}}_6 \end{bmatrix}.$$

Для выбранных контуров (рис. 9.13, б) контурные токи соответственно равны токам ветвей: $i_1^{(к)} = i_1$; $i_2^{(к)} = i_5$; $i_3^{(к)} = i_6$. Таким же образом могут быть составлены уравнения с напряжениями ветвей дерева.

Как видно из рассмотренного примера, уравнения цепи с взаимной индукцией составляют аналогично уравнениям цепи без индуктивных связей. Для простых цепей с взаимной индукцией контурные уравнения или уравнения по законам Кирхгофа можно записать непосредственно при рассмотрении схемы. При записи уравнений для контуров наряду с напряжениями на активных сопротивлениях, емкостях и составляющими напряжений на индуктивностях, обусловленными э. д. с. самоиндукции, необходимо учитывать составляющие напряжений на индуктивностях, обусловленные э. д. с. взаимной индукции. Эти составляющие имеют вид $j\omega M_{ik} \dot{i}_k$ ($-j\omega M_{ik} \dot{i}_k$), если направление обхода

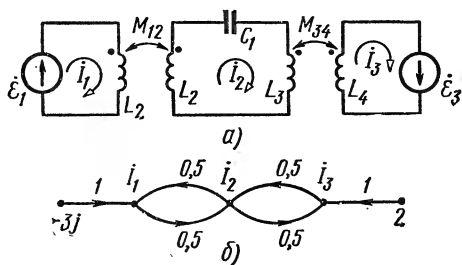


Рис. 9.14

i -й ветви и положительное направление тока $\dot{i}_k$ в k -й ветви одинаковы (противоположны) относительно одноименных зажимов связанных индуктивностей L_i и L_k . Если схема содержит только источники э. д. с., то контурные э. д. с. записывают так же, как и для цепи без индуктивных связей. При наличии источников тока в связанных

ветвях токи таких источников можно рассматривать как известные контурные токи и учитывать напряжения на индуктивностях в виде составляющих, обусловленных э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции. Преобразования источников тока (э. д. с.) ветвей, связанных с другими ветвями взаимной индукцией, в источники э. д. с. (тока) по правилам преобразования источников в цепях без индуктивных связей могут привести к ошибочному результату.

Следует отметить, что для цепей с взаимной индукцией непосредственно неприменимы топологические методы расчета, изложенные в гл. 8, за исключением метода сигнальных графов.

Пример 9.2. Рассчитать токи в схеме на рис. 9.14, а. Параметры схемы: $\omega L_1 = \omega L_3 = \omega L_4 = 8$ Ом; $\omega L_2 = 1/\omega C_1 = 10$ Ом; $\omega M_{12} = \omega M_{34} = 4$ Ом; $\mathcal{E}_1 = 24$ В; $\mathcal{E}_3 = j16$ В.

Решение. Контурные уравнения для заданной схемы имеют вид

$$\begin{aligned} j\omega L_1 \dot{i}_1 - j\omega M_{12} \dot{i}_2 &= \mathcal{E}_1; \\ -j\omega M_{12} \dot{i}_1 + j \left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \dot{i}_2 - j\omega M_{34} \dot{i}_3 &= 0; \\ -j\omega M_{34} \dot{i}_2 + j\omega L_4 \dot{i}_3 &= \mathcal{E}_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} j8I_1 - j4I_2 &= 24; \\ -j4I_1 + j8I_2 - j4I_3 &= 0; \\ -j4I_2 + j8I_3 &= j16. \end{aligned}$$

Выражая из этих уравнений токи $I_1 = -3j + 0,5I_2$; $I_2 = 0,5I_1 + 0,5I_3$; $I_3 = 2 - 0,5I_2$, строим сигнальный граф (рис. 9.14, б).

Определитель графа $\Delta = 1 - 0,5^2 - 0,5^2 = 0,5$.

Вычислим токи в схеме:

$$I_1 = \frac{1}{0,5} [-3j(1 - 0,25) + 2 \cdot 0,25] = 1 - j4,5 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{1}{0,5} [-3j0,5 + 2 \cdot 0,5] = 2 - j3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{1}{0,5} [-3j0,25 + 2(1 - 0,25)] = 3 - j1,5 \text{ А}.$$

§ 9.4. Эквивалентные схемы и преобразования цепей с взаимной индукцией

В ряде случаев целесообразно преобразовать цепь с взаимной индукцией в эквивалентную цепь, не содержащую индуктивных связей, после чего для расчета цепи можно применить топологические формулы или исключение узлов с помощью замены многолучевой звезды многоугольником.

В качестве простого примера преобразования цепи при наличии индуктивной связи полезно получить эквивалентную схему для трансформатора (см. рис. 9.8, б). Уравнения трансформатора можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ik} &= Z_1 \dot{I}_i + Z_M \dot{I}_j = Z_1 \dot{I}_i + Z_M (-\dot{I}_i - \dot{I}_k); \\ \dot{U}_{jk} &= Z_M \dot{I}_i + Z_2 \dot{I}_j = Z_M (-\dot{I}_j - \dot{I}_k) + Z_2 \dot{I}_j \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{U}_{ik} \\ \dot{U}_{jk} \end{aligned}} \right\}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ik} &= (Z_1 - Z_M) \dot{I}_i - Z_M \dot{I}_k; \\ \dot{U}_{jk} &= (Z_2 - Z_M) \dot{I}_j - Z_M \dot{I}_k. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Уравнениям (9.15) соответствует эквивалентная схема на рис. 9.15, а. Учитывая $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = r_2 + j\omega L_2$, $Z_M = j\omega M$, легко прийти к схеме на рис. 9.15, б. При изменении полярности одной из обмоток исходной схемы (см. рис. 9.8, б) в эквивалентной схеме на рис. 9.15, а знак сопротивления Z_M изменится на противоположный.

Пример 9.3. Найти входное сопротивление $Z_{вх} = \dot{U}/\dot{I}$ схемы на рис. 9.16, а. Параметры схемы: $x_1 = \omega L_1 = 20 \text{ Ом}$; $x_2 = \omega L_2 = 10 \text{ Ом}$; $x_M = \omega M = 10 \text{ Ом}$; $x_3 = 1/\omega C_3 = 20 \text{ Ом}$; $r_3 = 10 \text{ Ом}$; $Z_4 = 10 + j10 \text{ Ом}$.

Решение. Входное сопротивление найдем из эквивалентной схемы на рис. 9.16, б. Эту схему строим в соответствии с рис. 9.15, б при $r_1 = r_2 = 0$. Если $Z_1 = j(x_1 - x_M)$; $Z_2 = j(x_2 - x_M)$; $Z_3 = r_3 + j(x_M - x_3)$, то

$$Z_{вх} = Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} = 10 + j10 \text{ Ом}.$$

На рис. 9.17, а показаны три связанные катушки, соединенные звездой, к свободным узлам которых приложены напряжения

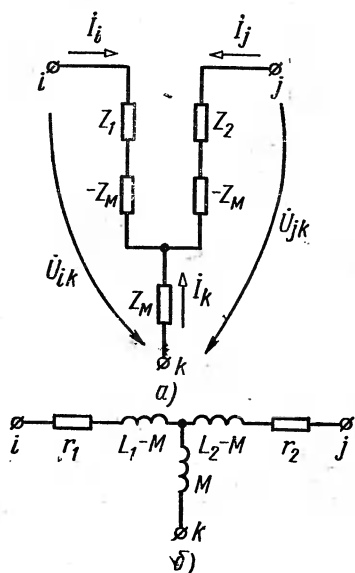


Рис. 9.15

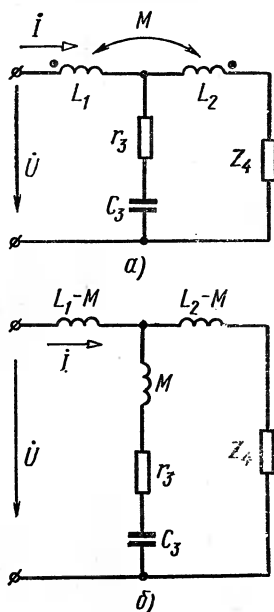


Рис. 9.16

$\dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}, \dot{U}_{31}$. Напряжения на зажимах ветвей определяются из следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{10} &= Z_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 + j\omega M_{13} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{20} &= Z_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{30} &= Z_3 \dot{I}_3 + j\omega M_{31} \dot{I}_1 + j\omega M_{32} \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

где $Z_k = r_k + j\omega L_k$; $M_{ik} = M_{ki}$ ($k, i = 1, 2, 3$).

По второму закону Кирхгофа,

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20} = (Z_1 - j\omega M_{21}) \dot{I}_1 - \\ &\quad - (Z_2 - j\omega M_{12}) \dot{I}_2 + j\omega (M_{13} - M_{23}) \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{23} &= \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30} = (Z_2 - j\omega M_{32}) \dot{I}_2 - \\ &\quad - (Z_3 - j\omega M_{23}) \dot{I}_3 + j\omega (M_{21} - M_{31}) \dot{I}_1; \\ \dot{U}_{31} &= \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10} = (Z_3 - j\omega M_{13}) \dot{I}_3 - \\ &\quad - (Z_1 - j\omega M_{31}) \dot{I}_1 + j\omega (M_{32} - M_{12}) \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.17a)$$

На основании уравнения $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ из первого уравнения можно исключить ток $\dot{I}_3$, из второго — ток $\dot{I}_1$, а из третьего —

ток $\dot{I}_2$. В результате уравнения (9.17а) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= Z'_1 \dot{I}_1 - Z'_2 \dot{I}_2; \\ \dot{U}_{23} &= Z'_2 \dot{I}_2 - Z'_3 \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{31} &= Z'_3 \dot{I}_3 - Z'_1 \dot{I}_1, \end{aligned} \right\} \quad (9.17б)$$

где

$$Z'_1 = r_1 + j\omega(L_1 - M_{21} - M_{13} + M_{23}) = r_1 + jx_1;$$

$$Z'_2 = r_2 + j\omega(L_2 - M_{32} - M_{21} + M_{31}) = r_2 + jx_2;$$

$$Z'_3 = r_3 + j\omega(L_3 - M_{13} - M_{23} + M_{12}) = r_3 + jx_3.$$

Уравнениям (9.17б) удовлетворяет эквивалентная схема на рис. 9.17, б. Из сравнения заданной и эквивалентной схем следует, что, несмотря на равенство токов в соответствующих ветвях

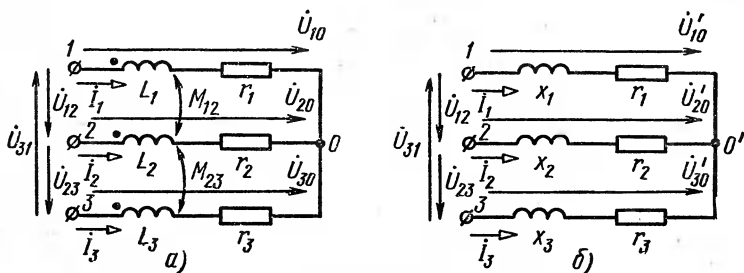


Рис. 9.17

этих схем и равенство напряжений $\dot{U}_{12}$, $\dot{U}_{23}$, $\dot{U}_{31}$, напряжения на зажимах ветвей эквивалентной схемы не равны соответствующим напряжениям на зажимах ветвей заданной схемы, т. е. $\dot{U}_{10} \neq \dot{U}_{10'}$, $\dot{U}_{20} \neq \dot{U}_{20'}$ и $\dot{U}_{30} \neq \dot{U}_{30'}$. Однако это не мешает применять эквивалентные схемы при расчете цепей с взаимной индукцией, так как после определения токов в ветвях эквивалентной схемы можно найти напряжения на зажимах ветвей заданной цепи.

Аналогично нетрудно получить эквивалентную схему без взаимных индуктивностей для трех связанных катушек, соединенных треугольником (рис. 9.18, а). Эта схема характеризуется контурными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= Z_1 \dot{I}_{12} + jx_{12} \dot{I}_{23} + jx_{13} \dot{I}_{31}; \\ \dot{U}_{23} &= Z_2 \dot{I}_{23} + jx_{21} \dot{I}_{12} + jx_{23} \dot{I}_{31}; \\ \dot{U}_{31} &= Z_3 \dot{I}_{31} + jx_{31} \dot{I}_{12} + jx_{32} \dot{I}_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (9.18а)$$

При помощи соотношений $\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12}$ и $\dot{I}_3 = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23}$ из первого уравнения (9.18а) можно исключить токи $\dot{I}_{23}$ и $\dot{I}_{31}$, из второго — токи $\dot{I}_{31}$ и $\dot{I}_{12}$ и из третьего — токи $\dot{I}_{12}$ и $\dot{I}_{23}$.

В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= [Z_1 + j(x_{12} + x_{13})] \dot{I}_{12} + jx_{12} \dot{I}_2 - jx_{13} \dot{I}_1; \\ \dot{U}_{23} &= [Z_2 + j(x_{21} + x_{23})] \dot{I}_{23} + jx_{23} \dot{I}_3 - jx_{21} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_{31} &= [Z_3 + j(x_{31} + x_{32})] \dot{I}_{31} + jx_{31} \dot{I}_1 - jx_{32} \dot{I}_3. \end{aligned} \right\} \quad (9.186)$$

Уравнениям (9.186) удовлетворяет эквивалентная схема на рис. 9.18, б, в которой напряжения $\dot{U}_{1'2'}$, $\dot{U}_{2'3'}$ и $\dot{U}_{3'1'}$ не равны соответственно напряжениям исходной схемы $\dot{U}_{12}$, $\dot{U}_{23}$ и $\dot{U}_{31}$.

Применение эквивалентных схем без индуктивных связей облегчает расчет цепей с взаимной индукцией. Кроме того, с помощью эквивалентных схем можно моделировать цепи с взаимной индукцией цепями без взаимной индукции. При этом отрицательные реактивные сопротивления $-j\omega M_{ik}$ ($M_{ik} > 0$) для заданной частоты ω заменяют емкостными сопротивлениями $-j1/\omega C_{ik} = -j\omega M_{ik}$.

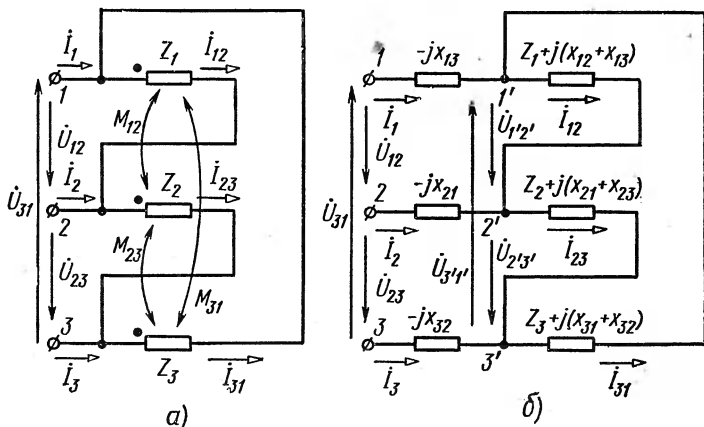


Рис. 9.18

Для расчета схем с взаимной индукцией можно воспользоваться дуальными схемами без индуктивных связей. Такие схемы могут быть построены при фиксированной частоте по матрице узловых проводимостей, равной матрице контурных сопротивлений заданной цепи с взаимной индукцией. Схемы, дуальные цепям с индуктивными связями, аналогичны дуальным схемам для цепей с условными связями между контурами (см. § 5.9).

Пример 9.4. Построить схему, дуальную схеме на рис. 9.19.

Решение. Для контуров, указанных на рис. 9.19, можно записать следующую матрицу контурных сопротивлений:

$$\mathbf{Z}^{(K)} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 + Z_5 & -Z_5 - Z_{14} - Z_{23} & -Z_3 + Z_{14} \\ -Z_5 - Z_{14} - Z_{23} & Z_2 + Z_4 + Z_5 & -Z_4 + Z_{23} \\ -Z_3 + Z_{14} & -Z_4 + Z_{23} & Z + Z_3 + Z_4 \end{bmatrix},$$

где $Z_{14} = j\omega M_{14}$; $Z_{23} = j\omega M_{23}$. Так как исходная схема содержит три независимых контура, дуальная схема должна иметь четыре узла (рис. 9.20). Матрица

узловых проводимостей дуальной схемы ($\phi_4=0$)

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 + Y_5 & -Y_5 & -Y_3 \\ -Y_5 & Y_2 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ -Y_3 & -Y_4 & Y + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix}.$$

Приравняв вначале соответствующие внедиагональные элементы матриц $Z^{(K)}$ и $Y^{(Y)d}$, определим следующие параметры дуальной схемы:

$$Y_3 = Z_3 - Z_{14}; \quad Y_4 = Z_4 - Z_{23}; \quad Y_5 = Z_5 + Z_{14} + Z_{23}.$$

Из сравнения соответствующих диагональных элементов матриц $Z^{(K)}$ и $Y^{(Y)d}$ получим:

$$Y_1 = Z_1 + Z_3 + Z_5 - (Z_3 - Z_{14}) - (Z_5 + Z_{14} + Z_{23}) = Z_1 - Z_{23};$$

$$Y_2 = Z_2 + Z_4 + Z_5 - (Z_4 - Z_{23}) - (Z_5 + Z_{14} + Z_{23}) = Z_2 - Z_{14};$$

$$Y = Z + Z_3 + Z_4 - (Z_3 - Z_{14}) - (Z_4 - Z_{23}) = Z + Z_{14} + Z_{23}.$$

В исходной схеме матрица контурных э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}^{(K)} = [0 \ 0 \ \dot{\mathcal{E}}]^T$, поэтому в дуальной схеме необходимо включить источник тока $\dot{J} = \dot{\mathcal{E}}$ между базисным узлом 4 и узлом 3. Матрица узловых токов дуальной схемы

$$\dot{J}^{(Y)d} = [0 \ 0 \ J]^T = \dot{\mathcal{E}}^{(K)}.$$

Приведенные выражения для проводимостей дуальной схемы показывают, что индуктивным (емкостным) сопротивлениям исходной схемы соответствуют емкостные (индуктивные) проводимости в дуальной схеме.

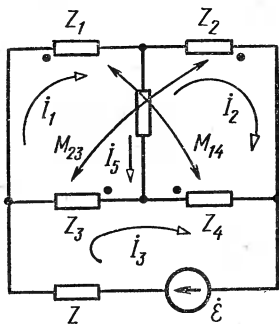


Рис. 9.19

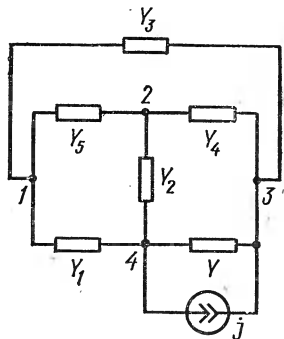


Рис. 9.20

С помощью дуальных схем для цепей с взаимной индукцией можно применять топологические методы анализа и методы преобразования схем.

Пример 9.5. Определить ток i_5 в схеме на рис. 9.19.

Решение. Ток i_5 найдем с помощью дуальной схемы на рис. 9.20. В исходной схеме ток $i_5 = i_1 - i_2$. Контурные токи i_1 и i_2 равны соответственно потенциалам ϕ_1 и ϕ_2 дуальной схемы.

Включив вольтметр между узлами 1—2, определим разность

$$\phi_1 - \phi_2 = - \frac{\sum_k P'_k \Delta'_k}{\Delta},$$

$$\text{где } \sum_k P'_k \Delta'_k = Y_3 Y_2 - Y_4 Y_1.$$

Определитель Δ вычислим с помощью разложения по путям между узлами 1—3:

$$\Delta = Y_1 Y (Y_2 + Y_4 + Y_5) + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_5 Y_2 Y + Y_5 Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y) + Y_3 [Y_2 (Y_4 + Y_5 + Y_1 + Y) + (Y + Y_1) (Y_4 + Y_5)].$$

Таким образом,

$$\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2 = \frac{Y_2 Y_3 - Y_1 Y_4}{\Delta} j = I_b.$$

Подставляя соотношения для проводимостей дуальной схемы (см. пример 9.4) и заменяя j на $\dot{\Phi}$, выразим ток I_b через параметры исходной схемы.

Дуальные схемы могут быть применены и для моделирования процессов в цепях с индуктивными связями с помощью цепей без индуктивных связей.

§ 9.5. Расчет цепей с невзаимными элементами

Матричные уравнения*. В различных областях техники широкое применение находят электрические цепи, содержащие трехполюсные элементы — электронные лампы и транзисторы. Принцип действия электронной лампы и транзистора, их основные уравнения в линейном режиме и эквивалентные схемы для переменных составляющих напряжений и токов были рассмотрены в гл. 1 (см. § 1.8).

Цепи с электронными лампами и транзисторами содержат источники постоянной и переменной э. д. с. (тока). В линейном режиме при расчете переменных составляющих напряжений и токов источники постоянной э. д. с. исключаются (замыкаются). Постоянные составляющие напряжений и токов позволяют определить параметры эквивалентных схем для переменных составляющих (далее эти параметры предполагают заданными).

Трехполюсный элемент (рис. 9.21, а) можно характеризовать уравнениями (для гармонических переменных составляющих)

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ii} & Y_{ij} \\ Y_{ji} & Y_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{ik} \\ \dot{U}_{jk} \end{bmatrix}; \quad (9.19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{ik} \\ \dot{U}_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} \\ Z_{ji} & Z_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{I}_j \end{bmatrix}. \quad (9.20)$$

Переменными составляющими в уравнениях (9.19) и (9.20) служат токи зажимов i , j трехполюсника и напряжения между зажимами $i-k$, $j-k$. Зажим k , относительно которого отсчитывают напряжения

$\dot{U}_{ik}$, $\dot{U}_{jk}$, называют базисным зажимом. Если зажим i рассматривают как входной, а зажим j — как выходной зажимы трехполюсника, то зажим k называют также общим зажимом (по отношению к входу и выходу).

Рис. 9.21

* В данной главе рассматриваются особенности расчета цепей с электронными трехполюсниками в предположении линейности их режима.

Матрицы

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{ii} & Y_{ij} \\ Y_{ji} & Y_{jj} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Z = \begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} \\ Z_{ji} & Z_{jj} \end{bmatrix}$$

в уравнениях (9.19) и (9.20) представляют собой определенные матрицы параметров трехполюсника при базисном зажиме k (матрицу проводимостей и матрицу сопротивлений)*, причем $Y = Z^{-1}$ и $Z = Y^{-1}$. Если зажим i совпадает с зажимом сетки, зажим j — с зажимом анода, а зажим k — с зажимом катода лампы, то в соответствии с уравнениями (1.18) матрица проводимостей лампы

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & g_l \end{bmatrix}. \quad (9.21)$$

Матрица (9.21) является особенной (ее определитель равен нулю), следовательно, матрица $Z = Y^{-1}$ не существует.

Если зажим i совпадает с зажимом эмиттера, зажим j — с зажимом коллектора, а зажим k — с зажимом базы транзистора, то в соответствии с уравнениями (1.21) матрица сопротивлений транзистора

$$Z = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_9 + r_6 & r_6 \\ r_6 + \alpha r_k & r_6 + r_k \end{bmatrix}. \quad (9.22)$$

Вычисляя матрицу, обратную матрице (9.22), можно получить матрицу проводимостей транзистора:

$$Y = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} r_6 + r_k & -r_6 \\ -(r_6 + \alpha r_k) & r_9 + r_6 \end{bmatrix}, \quad (9.23)$$

где

$$\Delta = (r_9 + r_6)(r_6 + r_k) - r_6(r_6 + \alpha r_k) = r_9(r_k + r_6) + (1 - \alpha)r_6 r_k. \quad (9.23a)$$

С помощью матриц Y и Z трехполюсника могут быть составлены узловые и контурные уравнения или уравнения с напряжениями ветвей дерева (7.27)–(7.29). Для этого каждый трехполюсник (рис. 9.21, а) заменяют его графом (рис. 9.21, б), двухполюсные ветви схемы — отрезками линий. Для полученного графа цепи составляют матрицы A , B или Q . В матрице проводимостей ветвей $Y^{(b)}$ (сопротивлений ветвей $Z^{(b)}$) на главной диагонали записываются проводимости Y_i (сопротивления Z_i) двухполюсных ветвей, проводимости Y_{ii} , Y_{jj} (сопротивления Z_{ii} , Z_{jj}), соответствующие ветвям i и j графа трехполюсника с базисным зажимом k (рис. 9.21, б); вне главной диагонали записывают проводимости Y_{ij} , Y_{ji} (сопротивления Z_{ij} , Z_{ji}). Матрицы узловых проводимостей, проводимостей сечений, контурных сопротивлений,

* Матрицы Y и Z трехполюсников в общем случае отличаются от матриц узловых проводимостей и контурных сопротивлений. Матрицу Y называют матрицей проводимостей короткого замыкания (при короткозамкнутых зажимах), а матрицу Z — матрицей сопротивлений при разомкнутых зажимах.

а также матрицы узловых токов, токов сечений и контурных э. д. с. вычисляются соответственно по соотношениям (7.30) ÷ (7.35).

Следует отметить, что записать непосредственно матрицу $Y^{(B)}$ возможно только при отсутствии индуктивно связанных ветвей. Если в цепи имеются индуктивно связанные ветви, можно записать матрицу $Z^{(B)}$; при этом $Y^{(B)} = [Z^{(B)}]^{-1}$, как и в цепи без многополюсных элементов. В случае, когда индуктивно связанные ветви представляют собой трехполюсные трансформаторы, они могут быть учтены при составлении уравнений с помощью графа (рис. 9.21, б) аналогично электронным трехполюсникам.

Пример 9.6. Составить узловые уравнения для ламповой схемы на рис. 9.22, а (источники постоянной э. д. с. на схеме не показаны).

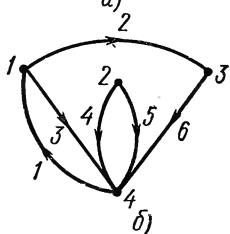
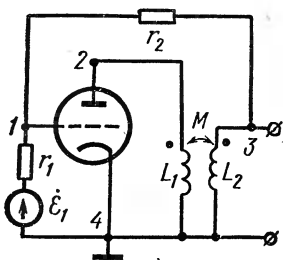


Рис. 9.22

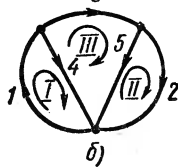
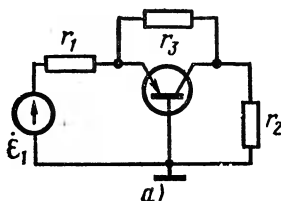


Рис. 9.23

Решение. Граф схемы приведен на рис. 9.22, б. Ветви 1 и 2 графа соответствуют ветвям цепи, содержащим элементы E_1 — r_1 и r_2 ; ветви 3 и 4 — лампе; ветви 5 и 6 — трансформатору.

Узловая матрица схемы ($\psi_4 = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Учитывая, что лампа и трансформатор характеризуются матрицами (9.21) и (9.6а), запишем матрицу проводимостей ветвей:

$$Y^{(B)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & g_1 & & & & \\ 3 & & g_2 & & & \\ 4 & & & 0 & 0 & \\ 5 & & & S & g_i & \\ 6 & & & & Y_1 & Y_M \\ & & & & Y_M & Y_2 \end{bmatrix}$$

где

$$g_1 = 1/r_1; \quad g_2 = 1/r_2; \quad g_i = 1/r_i;$$

$$Y_1 = \frac{-j\omega L_2}{\omega^2 L_1 L_2 - \omega^2 M^2}; \quad Y_2 = \frac{-j\omega L_1}{\omega^2 L_1 L_2 - \omega^2 M^2}; \quad Y_M = \frac{j\omega M}{\omega^2 L_1 L_2 - \omega^2 M^2}.$$

Для составления узловых уравнений вычислим матрицы $\mathbf{Y}^{(Y)} = \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(B)}\mathbf{A}^T$ и $\mathbf{j}^{(Y)} = \mathbf{A}\mathbf{j}^{(B)} - \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(B)}\dot{\mathcal{E}}^{(B)}$, где $\mathbf{j}^{(B)} = \mathbf{0}$; $\dot{\mathcal{E}}^{(B)} = [\dot{\mathcal{E}}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. В результате

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_2 & 0 & -g_2 \\ S & g_i + Y_1 & Y_M \\ -g_2 & Y_M & g_2 + Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \dot{\mathcal{E}}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 9.7. Составить контурные уравнения для транзисторной схемы на рис. 9.23, а.

Решение. Граф схемы приведен на рис. 9.23, б. Ветви 1, 2 и 3 графа соответствуют ветвям схемы, содержащим элементы $\mathcal{E}_1 - r_1$, r_2 и r_3 ; ветви 4 и 5 — транзистору. Для указанных контуров матрица

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица сопротивлений ветвей

$$\mathbf{Z}^{(B)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_1 & & & & \\ & r_2 & & & \\ & & r_3 & & \\ & & & r_{11} & r_{12} \\ & & & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где r_{11} , r_{22} , r_{12} и r_{21} — параметры транзистора.

Для составления контурных уравнений вычислим матрицы

$$\mathbf{Z}^{(K)} = \mathbf{B}\mathbf{Z}^{(B)}\mathbf{B}^T \quad \text{и} \quad \dot{\mathcal{E}}^{(K)} = \mathbf{B}\dot{\mathcal{E}}^{(B)} - \mathbf{B}\mathbf{Z}^{(B)}\mathbf{j}^{(B)},$$

где $\dot{\mathcal{E}}^{(B)} = [\dot{\mathcal{E}}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; $\mathbf{j}^{(B)} = \mathbf{0}$.

В результате получим уравнения:

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_{11} & -r_{12} & -r_{11} + r_{12} \\ -r_{21} & r_2 + r_{22} & -r_{22} + r_{21} \\ -r_{11} + r_{21} & r_{12} - r_{22} & r_3 + r_{11} + r_{22} - r_{12} - r_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1^{(K)} \\ j_2^{(K)} \\ j_3^{(K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{E}}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей электронной лампы и матрицы проводимостей и сопротивлений транзистора несимметричны: $Y_{ij} \neq Y_{ji}$, $Z_{ij} \neq Z_{ji}$. Цепи, содержащие электронные трехполосники, имеют несимметричные матрицы $\mathbf{Y}^{(B)}$ и $\mathbf{Z}^{(B)}$ и, следовательно, матрицы $\mathbf{Y}^{(Y)}$, $\mathbf{Y}^{(C)}$ и $\mathbf{Z}^{(K)}$. Указанная несимметрия матриц означает, что электронные лампы и транзисторы представляют собой невзаимные элементы электрической цепи. Цепи с такими элементами не удовлетворяют принципу взаимности (см. рис. 1.25 и 1.31).

Таким образом, матричные уравнения для цепей с лампами и транзисторами составляются аналогично уравнениям цепей, со-

державших только двухполюсные элементы. Для простых схем с электронными трехполюсниками уравнения по законам Кирхгофа, узловые и контурные уравнения могут быть составлены без применения матричных соотношений (7.30) ÷ (7.35). При этом независимые источники учитываются аналогично независимым.

Неопределенные матрицы узловых проводимостей и контурных сопротивлений. При $\dot{U}_{ik} = \dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k$, $\dot{U}_{jk} = \dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_k$, $\dot{I}_k = -\dot{I}_i - \dot{I}_j$ (см. рис. 9.21, а) вместо уравнения (9.19) можно записать уравнение трехполюсника в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{I}_j \\ \dot{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ii} & Y_{ij} & -(Y_{ii} + Y_{ij}) \\ Y_{ji} & Y_{jj} & -(Y_{ji} + Y_{jj}) \\ -(Y_{ii} + Y_{ji}) & -(Y_{ij} + Y_{jj}) & Y_{ii} + Y_{jj} + Y_{ij} + Y_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_i \\ \dot{\varphi}_j \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix}. \quad (9.24)$$

Матрицу

$$\mathbf{Y}_n^{(y)} = \begin{bmatrix} Y_{ii}Y_{ij}Y_{ik} \\ Y_{ji}Y_{jj}Y_{jk} \\ Y_{ki}Y_{kj}Y_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ii} & Y_{ij} & -(Y_{ii} + Y_{ij}) \\ Y_{ji} & Y_{jj} & -(Y_{ji} + Y_{jj}) \\ -(Y_{ii} + Y_{ji}) & -(Y_{ij} + Y_{jj}) & Y_{ii} + Y_{jj} + Y_{ij} + Y_{ji} \end{bmatrix}$$

называют неопределенной матрицей узловых проводимостей трехполюсника. Сумма элементов каждого столбца и каждой строки этой матрицы и, следовательно, ее определитель равны нулю.

Зная определенную матрицу узловых проводимостей трехполюсника, легко составить

неопределенную матрицу. Так, добавляя третью строку и третий столбец в матрице (9.21), можно получить неопределенную матрицу проводимостей лампы

$$\mathbf{Y}_n^{(y)} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ S & g_i & -(S + g_i) \\ -S & -g_i & S + g_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}. \quad (9.25)$$

Матрица (9.25) соответствует нумерации зажимов на рис. 9.24, а (i — сетка, j — анод, k — катод). Взаимное изменение номеров двух зажимов приводит к перестановке местами двух строк и двух столбцов неопределенной матрицы. Поэтому при нумерации зажимов, данной на рис. 9.24, б (i — сетка, j — катод, k — анод),

$$\mathbf{Y}_n^{(y)} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ -S & S + g_i & -g_i \\ S & -(S + g_i) & g_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}. \quad (9.26)$$

Нумерации зажимов на рис. 9.24, *в* (*i* — катод, *j* — анод, *k* — сетка) соответствует матрица

$$Y_H^{(y)} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ S + g_i & -g_i & -S \\ -(S + g_i) & g_i & S \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} \quad (9.27)$$

Добавляя третью строку и третий столбец в матрице (9.23), нетрудно записать неопределенную матрицу проводимостей транзистора:

$$Y_H^{(y)} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} i & j & k \\ r_6 + r_k & -r_6 & -r_k \\ -(r_6 + \alpha r_k) & r_6 + r_6 & \alpha r_k - r_6 \\ (\alpha - 1) r_k & -r_6 & (1 - \alpha) r_k + r_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} \quad (9.28)$$

где Δ находят по формуле (9.23а). Матрица (9.28) составлена при нумерации зажимов, приведенной на рис. 9.25, *а* (*i* — эмит-

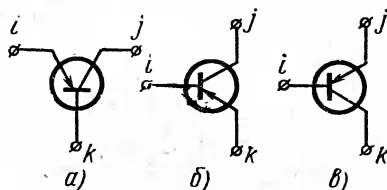


Рис. 9.25

тер, *j* — коллектор, *k* — база). Если зажимы транзистора пронумеровать, как показано на рис. 9.25, *б* (*i* — база, *j* — коллектор, *k* — эмиттер) или на рис. 9.25, *в* (*i* — база, *j* — эмиттер, *k* — коллектор), то

$$Y_H^{(y)} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} i & j & k \\ (1 - \alpha) r_k + r_6 & -r_6 & (\alpha - 1) r_k \\ \alpha r_k - r_6 & r_6 + r_6 & -(r_6 + \alpha r_k) \\ -r_k & -r_6 & r_6 + r_k \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} \quad (9.29)$$

или

$$Y_H^{(y)} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} i & j & k \\ (1 - \alpha) r_k + r_6 & (\alpha - 1) r_k & -r_6 \\ -r_k & r_6 + r_k & -r_6 \\ \alpha r_k - r_6 & -(r_6 + \alpha r_k) & r_6 + r_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} \quad (9.30)$$

Считая зажим *i* входным, зажим *j* выходным, а зажим *k* общим (базисным), можно говорить о трех схемах включения лампы и транзистора. Схемы включения лампы на рис. 9.24, *а* — *в* называют соответственно схемой с общим катодом, схемой

с общим анодом и схемой с общей сеткой. Схемы включения транзистора на рис. 9.25, *а*—*в* называют соответственно схемой с общей базой, схемой с общим эмиттером и схемой с общим коллектором. Схемы включения лампы описываются неопределенными матрицами проводимостей (9.25) ÷ (9.27), а транзистора — матрицами (9.28) ÷ (9.30). При вычеркивании *k*-й строки и *k*-го столбца из матриц (9.25) ÷ (9.30) получают определенные матрицы для соответствующих схем включения.

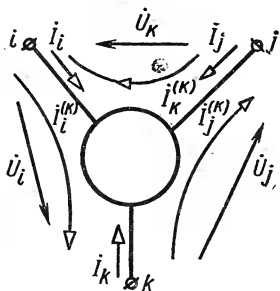


Рис. 9.26

Трехполосник можно характеризовать также неопределенными матрицами контурных сопротивлений. Если известно уравнение (9.20) трехполосника и выбрана система контуров, то неопределенную матрицу контурных сопротивлений можно выразить через элементы матрицы **Z**. Так, в случае трех контуров (рис. 9.26) справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \dot{U}_i &= \dot{U}_{ik}; \quad \dot{U}_j = -\dot{U}_{jk}; \quad \dot{U}_k = \dot{U}_{jk} - \dot{U}_{ik}; \\ i_i &= i_i^{(k)} - i_k^{(k)}; \quad i_j = -i_j^{(k)} + i_k^{(k)}, \quad i_k = i_j^{(k)} - i_i^{(k)}. \end{aligned}$$

На основании этих равенств вместо уравнения (9.20) можно записать уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_j \\ \dot{U}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ii} & -Z_{ij} & -Z_{ii} + Z_{ij} \\ -Z_{ji} & Z_{jj} & Z_{ji} - Z_{jj} \\ -Z_{ii} + Z_{ji} & Z_{ij} - Z_{jj} & Z_{ii} + Z_{jj} - Z_{ij} - Z_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i^{(k)} \\ i_j^{(k)} \\ i_k^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (9.31)$$

Матрицу

$$\mathbf{Z}_H^{(k)} = \begin{bmatrix} Z_{ii}^{(k)} & Z_{ij}^{(k)} & Z_{ik}^{(k)} \\ Z_{ji}^{(k)} & Z_{jj}^{(k)} & Z_{jk}^{(k)} \\ Z_{ki}^{(k)} & Z_{kj}^{(k)} & Z_{kk}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ii} & -Z_{ij} & -Z_{ii} + Z_{ij} \\ -Z_{ji} & Z_{jj} & Z_{ji} - Z_{jj} \\ -Z_{ii} + Z_{ji} & Z_{ij} - Z_{jj} & Z_{ii} + Z_{jj} - Z_{ij} - Z_{ji} \end{bmatrix}$$

называют неопределенной матрицей контурных сопротивлений трехполосника. Сумма элементов каждой строки и каждого столбца этой матрицы, а следовательно, и ее определитель равны нулю. Матрице (9.22) транзистора соответствует неопределенная матрица

$$\mathbf{Z}_H^{(k)} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ r_9 + r_6 & -r_6 & -r_9 \\ - (r_6 + \alpha r_k) & r_6 + r_k & (\alpha - 1) r_k \\ \alpha r_k - r_9 & -r_k & (1 - \alpha) r_k + r_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}. \quad (9.32)$$

С помощью неопределенных матриц можно составить узловые и контурные уравнения схем, содержащих многополосники. Так,

для составления узловых уравнений сначала исключают многополюсники (сохраняя узлы) и для полученной схемы записывают неопределенную матрицу узловых проводимостей; затем в соответствующие клетки записанной матрицы добавляют элементы неопределенных матриц узловых проводимостей каждого многополюсника. Аналогично, при составлении контурных уравнений сначала закорачивают зажимы всех многополюсников (сохраняя контуры) и для полученной схемы записывают неопределенную матрицу контурных сопротивлений, затем в соответствующие клетки записанной матрицы добавляют элементы неопределенных матриц многополюсников.

Таким образом, неопределенная матрица узловых проводимостей (контурных сопротивлений) сложной схемы может быть получена в результате суммирования неопределенных матриц отдельных подсхем, так как при составлении узловых (контурных) уравнений суммируют токи ветвей, соединенных в узлах (напряжения на элементах, образующих контуры). Для перехода к определенной матрице необходимо вычеркнуть одну строку и один столбец из неопределенной матрицы.

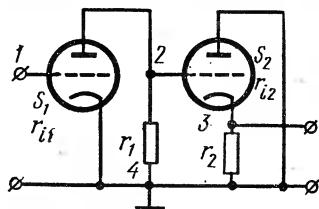


Рис. 9.27

Пример 9.8. Составить неопределенную матрицу узловых проводимостей для ламповой схемы на рис. 9.27.

Решение. Исключим лампы из общей схемы (сохраняя узлы). Тогда неопределенная матрица узловых проводимостей

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & g_1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & g_2 \\ 4 & 0 & -g_1 & -g_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -g_1 \\ -g_2 \end{matrix}.$$

С учетом равенств (9.25) и (9.26) матрицы ламп запишем следующим образом:

$$Y'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & S_1 & g_{11} \\ 4 & -S_1 & -g_{11} \end{bmatrix}; \quad Y''' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -S_2 & S_2 + g_{12} \\ 4 & S_2 & -(S_2 + g_{12}) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -g_{12} \\ g_{12} \end{matrix}.$$

Суммируя соответствующие элементы матриц Y' , Y'' и Y''' (т. е. элементы, которые имеют одинаковые номера строк и номера столбцов), получим искомую матрицу для всей схемы:

$$Y^{(Y)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & S_1 & g_1 + g_{11} & 0 \\ 3 & 0 & -S_2 & g_2 + S_2 + g_{12} \\ 4 & -S_1 & -(g_1 + g_{11} - S_2) & -(g_2 + S_2 + g_{12}) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(S_1 + g_{11} + g_1) \\ -(g_2 + g_{12}) \\ g_1 + g_2 + S_1 + g_{11} + g_{12} \end{matrix}.$$

Применение сигнальных графов к расчету невзаимных цепей. Уравнения цепи с электронными лампами и транзисторами можно поставить в соответствие сигнальные графы. Если составлена система узловых уравнений, то граф можно построить по общим правилам (см. § 8.6, 8.7). Во многих случаях уравнения для построения графа записывают непосредственно по эквивалентной схеме.

Пример 9.9. Определить коэффициент передачи напряжения ламповой схемы на рис. 9.28, а.

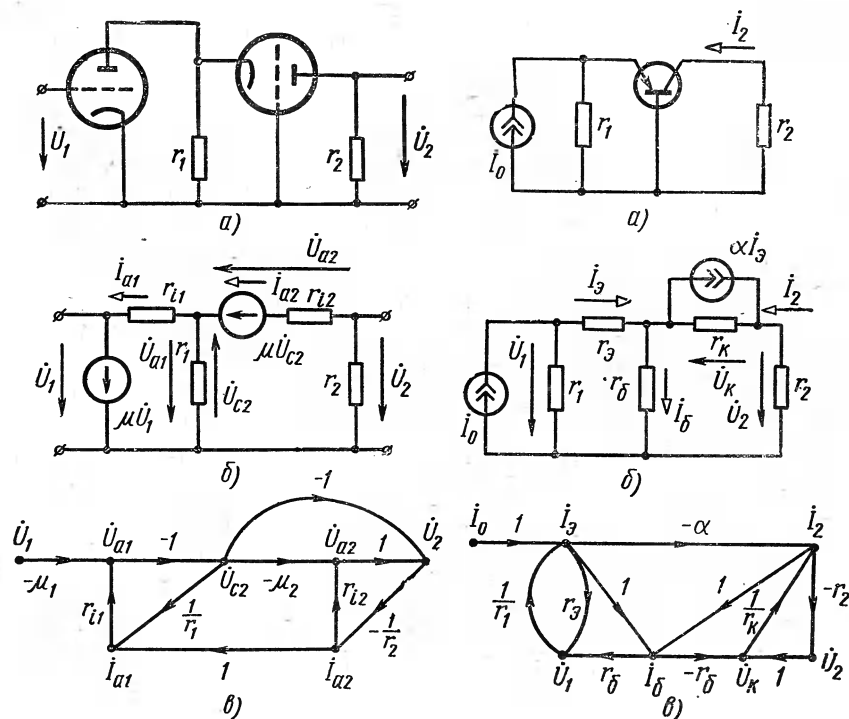


Рис. 9.28

Рис. 9.29

Решение. Схема, эквивалентная заданной, показана на рис. 9.28, б. Составим для этой схемы уравнения:

$$\dot{U}_{a1} = r_{i1} i_{a1} - \mu_1 \dot{U}_1;$$

$$\dot{U}_{c2} = -\dot{U}_{a1};$$

$$\dot{U}_{a2} = r_{i2} i_{a2} - \mu_2 \dot{U}_{c2};$$

$$i_{a1} = i_{a2} + (\dot{U}_{c2}/r_1);$$

$$i_{a2} = -\dot{U}_2/r_2;$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{a2} - \dot{U}_{c2}.$$

Записанным уравнениям соответствует граф на рис. 9.28, в. Из этого графа находим

$$K^{(u)} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\sum P'_k \Delta'_k}{\Delta} = \frac{-\mu_1 (\mu_2 + 1)}{1 + \frac{r_{11}}{r_1} + \frac{r_{11} + r_{12} + \mu_2 r_{11}}{r_2} + \frac{r_{11} r_{12}}{r_1 r_2}}.$$

Пример 9.10. Определить коэффициент передачи тока транзисторной схемы на рис. 9.29, а.

Решение. Схема, эквивалентная заданной, показана на рис. 9.29, б. Для эквивалентной схемы справедливы уравнения:

$$\dot{U}_1 = r_3 \dot{I}_3 + r_6 \dot{I}_6;$$

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_3 + \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_2 = -\alpha \dot{I}_3 + (\dot{U}_k / r_k);$$

$$\dot{U}_k = \dot{U}_2 - r_6 \dot{I}_6;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_0 - (\dot{U}_1 / r_1);$$

$$\dot{U}_2 = -r_2 \dot{I}_2.$$

Записанным уравнениям соответствует граф на рис. 9.29, в. Из этого графа определяем

$$K^{(i)} = \frac{I_2}{I_0} = \frac{\sum P'_k \Delta'_k}{\Delta} = \frac{-\left(\alpha + \frac{r_6}{r_k}\right)}{1 + \frac{r_3 + r_6 - \alpha r_6}{r_1} + \frac{r_6 + r_2}{r_k} + \frac{r_3 (r_2 + r_6) + r_6 r_2}{r_1 r_k}}.$$

§ 9.6. Топологические формулы для расчета цепей с невзаимными элементами

Унисторные эквивалентные схемы. К цепям, содержащим электронные лампы и транзисторы, применимы топологические методы расчета, аналогичные методам, рассмотренным для взаимных цепей в гл. 8. При топологическом анализе невзаимные многополюсники могут быть представлены в виде эквивалентных схем, состоящих из схемных элементов — унисторов.

Унистором называют трехполюсник (рис. 9.30), ток $\dot{I}$ которого определяется проводимостью трехполюсника и потенциалом ϕ_1 входного зажима относительно заземленного зажима:

$$\dot{I} = y \phi_1.$$

Унистор можно рассматривать как источник тока, управляемый потенциалом одного зажима.

На рис. 9.31, а—г показаны простейшие схемы с унисторами. Унистор, у которого заземлен узел 2, эквивалентен обычной ветви с таким же узлом (рис. 9.31, а). Два параллельных унистора с проводимостями y_1 и y_2 эквивалентны одному униктору, имеющему проводимость $y_1 + y_2$ (рис. 9.31, б). Если унисторы с одинаковой проводимостью y , имеющие противоположное направление, соединены параллельно, то они эквивалентны обычной ветви с про-

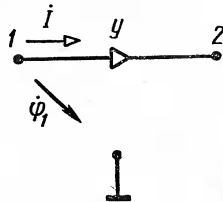


Рис. 9.30

водимостью y (рис. 9.31, в). Два противоположно направленных параллельных унистора с различной проводимостью эквивалентны обычной ветви и унистору, соединенным параллельно (рис. 9.31, г).

В правильности приведенных схем можно убедиться, суммируя токи унисторов. Например, для двух параллельных унисторов (рис. 9.31, г) суммарный ток

$$\begin{aligned} I &= y_1 \dot{\varphi}_1 - (y_1 + y_2) \dot{\varphi}_2 = \\ &= y_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - y_2 \dot{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Записанному выражению для тока соответствует эквивалентная схема, состоящая из обычной ветви с проводимостью y_1 и унистора с проводимостью y_2 (рис. 9.31, г).

Если заземленный узел совпадает с зажимом 1 унистора (рис. 9.30), то ток $I = 0$ и унистор исключается из схемы.

Унисторная эквивалентная схема трехполюсника в общем виде показана на рис. 9.32. Если

$\dot{\varphi}_1 \neq 0$, $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = 0$, то данную унисторную схему можно заменить схемой на рис. 9.33, в которой

$$\dot{I}_1 = (y_{12} + y_{13}) \dot{\varphi}_1; \quad \dot{I}_2 = -y_{12} \dot{\varphi}_1; \quad \dot{I}_3 = -y_{13} \dot{\varphi}_1.$$

Разделив токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ на потенциал $\dot{\varphi}_1$, получаем элементы первого столбца неопределенной матрицы проводимостей унистор-

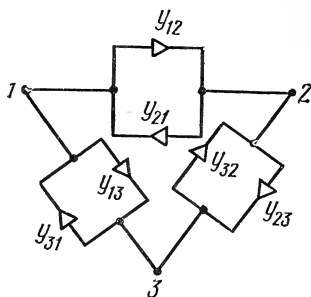


Рис. 9.32

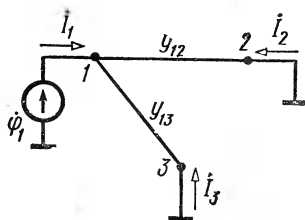


Рис. 9.33

ного трехполюсника. Аналогично при $\dot{\varphi}_2 \neq 0$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3 = 0$ ($\dot{\varphi}_3 \neq 0$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$) определяем элементы второго (третьего) столбца неопределенной матрицы проводимостей. В результате получаем

матрицу

$$\mathbf{Y}_H^{(y)} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} & -y_{21} & -y_{31} \\ -y_{12} & y_{21} + y_{23} & -y_{32} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{31} + y_{32} \end{bmatrix}. \quad (9.33)$$

Если задана неопределенная матрица проводимостей лампы или транзистора, то, приравнявая соответствующие элементы этой матрицы и элементы матрицы (9.33), можно определить параметры унисторной эквивалентной схемы. Например, приравнявая эле-

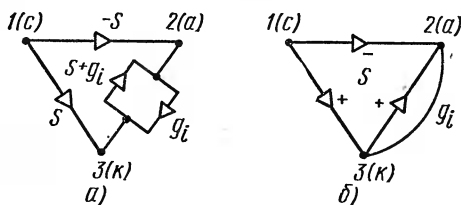


Рис. 9.34

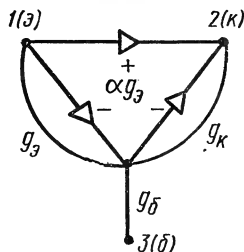


Рис. 9.35

менты матриц (9.25) и (9.33), находим: $y_{12} = -S$; $y_{13} = S$; $y_{23} = g_i$; $y_{32} = S + g_i$; $y_{21} = y_{31} = 0$. По полученным значениям проводимостей строится унисторная схема лампы (рис. 9.34, а или 9.34 б)

Приравнявая элементы матриц (9.28) и (9.33), нетрудно аналогично получить трехузловую унисторную схему транзистора. Часто применяют четырехузловую унисторную схему транзистора (рис. 9.35), соответствующую Т-образной схеме на рис. 1.31, б. В эквивалентности схем на рис. 1.31, б и рис. 9.35 можно убедиться, составив матрицы узловых проводимостей для четырех узлов.

Топологические формулы для унисторных схем. Пусть схема состоит из обычных (рис. 9.36, а) и унисторных (рис. 9.36, б) ветвей, содержащих источники тока*. Рассматривая унисторные ветви как обычные, можно составить узловую матрицу $\mathbf{A}$ и записать первый закон Кирхгофа в виде $\mathbf{A}\mathbf{i}^{(a)} = \mathbf{0}$. Произведение $\mathbf{A}^{(r)}\Phi$ определяет матрицу напряжений на зажимах всех ветвей, т. е. матрицу разностей потенциалов. Если в каждом столбце матрицы $\mathbf{A}$,

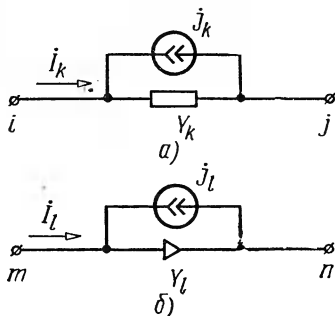


Рис. 9.36

* Предполагается, что между обычными ветвями нет индуктивных связей; источники э. д. с. заменены эквивалентными источниками тока.

соответствующем унисторной ветви, заменить -1 на 0 и обозначить полученную матрицу через $\bar{A}$, то произведение $\bar{A}^{(r)}\dot{\phi}$ будет представлять матрицу, в которой обычным ветвям соответствуют разность потенциалов, а унисторным ветвям — потенциалы входных зажимов.

Ток обычной ветви зависит от разности потенциалов:

$$I_k = Y_k (\phi_l - \phi_j) - J_k,$$

а ток унисторной ветви — от потенциала входного зажима:

$$I_l = Y_l \phi_m - J_l.$$

Поэтому матрицу токов всех ветвей можно записать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{I}}^{(b)} = \mathbf{Y}^{(b)} \bar{\mathbf{A}}^{(r)} \dot{\phi} - \mathbf{J}^{(b)},$$

где $\mathbf{Y}^{(b)}$ — диагональная матрица проводимостей обычных и унисторных ветвей. При умножении обеих частей записанного равенства на матрицу $\mathbf{A}$ с учетом соотношения $\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}^{(b)} = 0$ получается узловое уравнение

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}^{(b)} \bar{\mathbf{A}}^{(r)} \dot{\phi} = \mathbf{A} \mathbf{J}^{(b)}. \quad (9.34)$$

Произведение

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}^{(b)} \bar{\mathbf{A}}^{(r)} = \mathbf{Y}^{(y)} \quad (9.35)$$

представляет собой матрицу узловых проводимостей цепи с обычными и унисторными ветвями.

Ненулевые миноры матрицы $\mathbf{A}$ порядка $y-1$ соответствуют деревьям схемы и равны ± 1 (см. гл. 2).

Ненулевые миноры матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ порядка $y-1$ соответствуют таким деревьям схемы, в которых все унисторы направлены к заземленному узлу; величина этих миноров равна ± 1 .

Для дерева, содержащего одну обычную и три унисторных ветви (рис. 9.37, а), узловая матрица

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет треугольную форму. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, расположенных на главной диагонали. В данном случае определитель равен 1 . Заменяя в столбцах матрицы $\mathbf{A}_d$, соответствующих унисторным ветвям, все

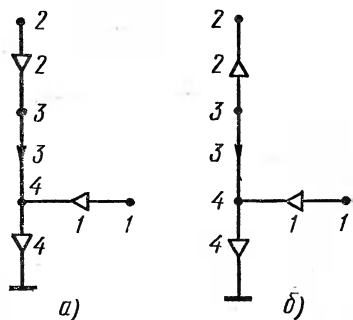


Рис. 9.37

— 1 на 0, можно получить матрицу

$$\bar{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

которая также является треугольной с определителем, равным 1. Если изменить направление одного из унисторов (рис. 9.37, б), то узловая матрица

$$A'_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет определитель, равный — 1. Определитель матрицы

$$\bar{A}'_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

полученный из матрицы A'_d путем замены — 1 на 0 в столбцах, которые соответствуют унисторным ветвям, равен 0.

В общем случае с помощью надлежащей нумерации узлов и ветвей матрице A_d дерева также можно придать треугольную форму. Если все унисторы в дереве направлены к заземленному узлу, то определители матриц A_d и $\bar{A}_d$, т. е. миноры матриц A и $\bar{A}$, соответствующие деревьям, равны +1 или — 1. Если дерево содержит унисторы, направленные от заземленного узла (хотя бы один унистор), то определитель матрицы $\bar{A}_d$ равен 0.

Учитывая отмеченные свойства матриц A и $\bar{A}$ и применяя для вычисления определителя узловой матрицы (9.35) теорему об определителе произведения двух матриц $P_1 = AY^{(b)}$, $P_2 = \bar{A}^{(c)}$ (см. гл. 8), можно сформулировать топологическое правило: *определитель матрицы узловых проводимостей $\Delta^{(y)}$ схемы, содержащей обычные и унисторные ветви, равен сумме произведений проводимостей ветвей таких деревьев, в которых все унисторы направлены к заземленному узлу.*

На основании выражения (9.35) можно также доказать топологическое правило для расчета алгебраического дополнения $\Delta_{jk}^{(y)}$ элемента узлового определителя: *алгебраическое дополнение $\Delta_{jk}^{(y)}$ равно сумме произведений проводимостей ветвей таких 2-деревьев $T_{2(ik, y)}$, которые при соединении узла k с заземленным узлом y образуют деревья, имеющие только направленные к заземленному узлу унисторы, а также обычные ветви.*

Сформулированные топологические правила для расчета определителя и алгебраических дополнений цепи с унисторами аналогичны соответствующим правилам для цепи с обычными ветвями (см. гл. 8). Отличие состоит лишь в том, что в цепях с унисторами учитываются лишь «ориентированные» деревья и 2-деревья.

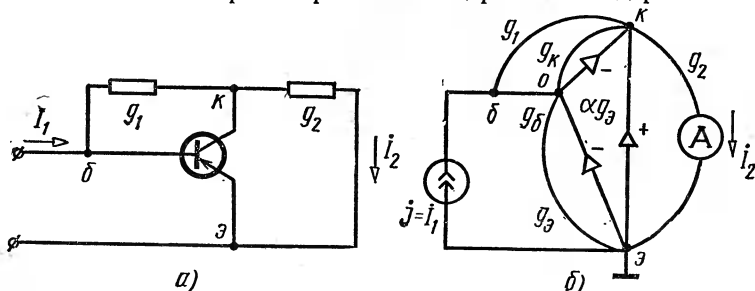


Рис. 9.38

Применяя разложение определителя и алгебраических дополнений по путям, можно доказать, что для расчета схемных функций цепи с унисторами справедлива топологическая формула (8.15). При расчете числителя $\sum_k \Pi'_k \Delta'_k$ функции необходимо заземлять один из узлов измерительного прибора и учитывать только такие пути передачи Π'_k , в которых все унисторы направлены к зазем-

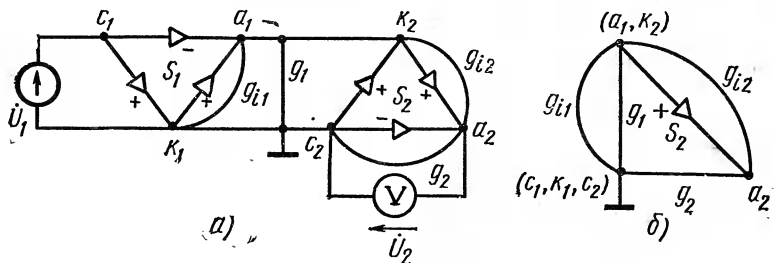


Рис. 9.39

ленному узлу. Для унисторных схем, эквивалентных цепям с электронными лампами и транзисторами, знаменатель Δ функции (8.15) не зависит от выбора заземленного узла и может вычисляться при любом заземленном узле. Знаменатель Δ удобно определять с помощью разложения по путям между парой узлов; заземленный узел должен быть граничным узлом путей.

Пример 9.11. Определить коэффициент передачи тока транзисторной схемы на рис. 9.38, а.

Решение. Унисторная схема, эквивалентная исходной, показана на рис. 9.38, б. Согласно топологической формуле,

$$K(i) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{\Delta},$$

Определим пути передачи и их миноры (унисторы, направленные от заземленного узла ε не учитываются):

$$P'_1 = g_1 g_2; \quad \Delta'_1 = g_K + g_6 + g_\varepsilon - \alpha g_\varepsilon;$$

$$P'_2 = g_6 (g_K - \alpha g_\varepsilon) g_2; \quad \Delta'_2 = 1.$$

Для расчета определителя исключим источник тока и закоротим амперметр. Если воспользоваться разложением по путям между узлами o и ε , то

$$\Delta = \sum_k P_k \Delta_k = g_6 g_1 g_2 + (g_K - \alpha g_\varepsilon) g_2 (g_6 + g_1) + g_\varepsilon [(g_K + g_2) (g_6 + g_1) + g_6 g_1].$$

Таким образом,

$$K^{(u)} = \frac{g_1 g_2 (g_K + g_6 + g_\varepsilon - \alpha g_\varepsilon) + g_6 (g_K - \alpha g_\varepsilon) g_2}{\Delta}.$$

Пример 9.12. Определить коэффициент передачи напряжения схемы на рис. 9.28, а.

Решение. Унисторная схема, эквивалентная данной, показана на рис. 9.39, а. Согласно топологической формуле,

$$K^{(u)} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\sum P'_k \Delta'_k}{\Delta}.$$

В схеме имеется один путь передачи

$$P'_1 = -S_1 (g_{i2} + S_2); \quad \Delta'_1 = 1.$$

Для вычисления определителя Δ закоротим источник ε . д. с., исключим вольтметр и унисторы, направленные от заземленного узла (рис. 9.39, б). При разложении по путям между узлами (a_1, κ_2) и (c_1, κ_1, c_2)

$$\Delta = \sum_k P_k \Delta_k = (g_{i1} + g_1) (g_2 + g_{i2}) + (S_2 + g_{i2}) g_2.$$

Таким образом,

$$K^{(u)} = \frac{-S_1 (g_{i2} + S_2)}{(g_{i1} + g_1) (g_2 + g_{i2}) + (S_2 + g_{i2}) g_2}.$$

§ 10.1. Основные понятия и определения

Для передачи электрической энергии от источника к приемнику требуется два соединительных провода — «прямой» и «обратный». Поскольку в реальных условиях источник и приемники электрической энергии очень часто значительно удалены относительно друг друга, соединительные провода имеют большую протяженность и сложную схему соединений.

Если объединить несколько одинаковых цепей, в каждой из которых имеется источник и приемник, а ток изменяется с одной общей частотой, но сдвинут по фазе относительно токов в других цепях, то можно получить сумму тока в обратных проводах, равную нулю. Тогда можно удалить все обратные провода и тем самым повысить экономичность системы электроснабжения. Это, в частности, дало основание для развития так называемых многофазных систем.

Совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные э. д. с. одной и той же частоты, сдвинутые относи-

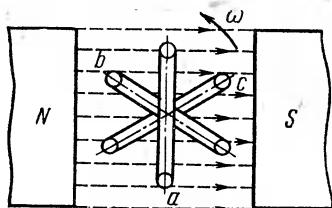


Рис. 10.1

тельно друг друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии, называют многофазной системой. Каждую из цепей (называемую однофазной), входящую в состав многофазной системы, называют фазой многофазной системы. Совокупность синусоидальных э. д. с. одной частоты, взаимно сдвинутых по фазе и действующих в многофазной системе, называют мн

гофазной системой э. д. с., а совокупность синусоидальных токов в этих цепях — многофазной системой токов.

Элементарный многофазный генератор устроен аналогично однофазному генератору с несколькими обмотками (витками), сдвинутыми в пространстве относительно друг друга на некоторые углы. При вращении такой системы, состоящей из m обмоток, с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле в каждой из обмоток индуцируется синусоидальная э. д. с., сдвинутая по фазе относительно э. д. с. в других обмотках на соответствующие углы, определяемые числом пар полюсов и пространственными углами между осями обмоток. На рис. 10.1 изображена принципиальная схема устройства элементарного трехфазного генератора. На рис. 10.2 приведены синусоидальные кривые э. д. с., индуцируемых в обмотках этого генератора и взаимно сдвинутых в пространстве на одинаковые углы, равные 120° ; на рис. 10.3 показана векторная диаграмма э. д. с. трехфазной системы.

Суммарный ток в обратных проводах, объединенных в один провод многофазной системы, равен нулю только в том случае, когда соответствующие векторы на комплексной плоскости образуют замкнутый многоугольник. Если число объединенных фаз равно m , причем все токи равны по величине и в каждой последующей фазе ток сдвинут по отношению к току в предыдущей на одинаковый угол, то указанный многоугольник — правильный. При этом сдвиг по фазе между токами предыдущей и последующей фаз равен $2\pi/m$, а соответствующая часть периода составляет T/m . Наименьшее число объединенных фаз, при котором получают качественно новую многофазную систему, равно трем (рис. 10.4). Систему, полученную после объединения всех трех фаз, называют трехфазной. Возможность устранения всех трех обратных проводов при объединении фаз системы приводит к значительным технико-экономическим преимуществам трехфазной системы перед однофазной.

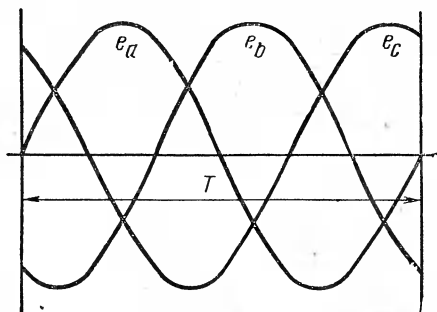


Рис. 10.2

Равные по величине токи отдельных фаз трехфазной системы на векторной диаграмме должны образовывать правильный треугольник (рис. 10.5). Для того чтобы при одинаковых сопротивлениях отдельных фаз токи были одинаковы по величине и сдвинуты по фазе на угол $\frac{2}{3}\pi$, э. д. с. должны быть равны по величине и сдвинуты по фазе на угол $\frac{2}{3}\pi$. Если

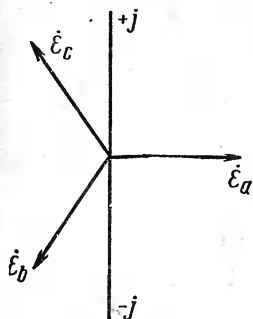


Рис. 10.3

при симметричной системе э. д. с. сопротивления фаз разные, то получается несимметричная система токов. По тому же принципу можно определить и многофазную систему с большим числом фаз. Однако такие системы получаются более сложными с точки зрения технического выполнения и не находят широкого применения. Увеличение числа фаз целесообразно в случае преобразования переменного тока в постоянный с помощью выпрямителей. При этом число фаз может быть равно 6, 12, 24, 48.

Многофазную систему э. д. с., в которой все фазные э. д. с. одинаковы по амплитуде и каждая последующая отстает от предыдущей на угол, равный $2\pi/m$, называют симметричной системой э. д. с. Аналогично определяют симметричную систему токов.

Для симметричных систем э. д. с. и токов справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^m \dot{\mathcal{E}}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^m I_i = 0.$$

При графическом изображении многофазной цепи отдельные фазы источников и приемников показывают на плоскости под теми же углами, которые характерны для параметров режима (э. д. с., токов и напряжений).

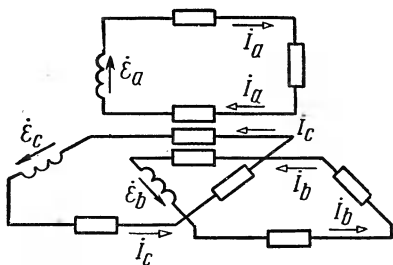


Рис. 10.4

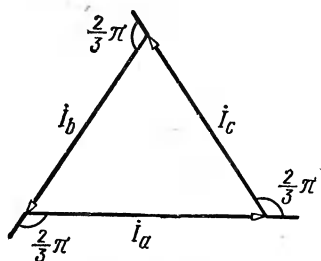


Рис. 10.5

Находят применение и несимметричные многофазные системы. Примером такой несимметричной многофазной системы является двухфазная система на рис. 10.6, а. Э. д. с. в фазах (рис. 10.6, б),

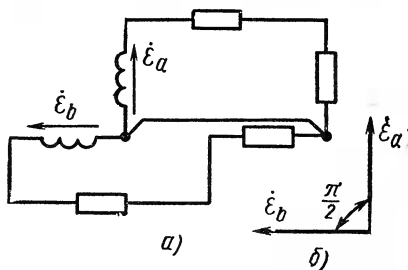


Рис. 10.6



Рис. 10.7

а также токи при одинаковых сопротивлениях фаз сдвинуты друг относительно друга на $1/4$ периода или на угол, равный $\pi/2$:

$$\dot{\mathcal{E}}_b = j\dot{\mathcal{E}}_a; \quad I_b = jI_a.$$

Существуют и несимметричные многофазные системы, для которых, так же как и для симметричных систем, сумма фазных э. д. с. и токов равна нулю (рис. 10.7). Многофазную систему э. д. с. и токов, при которой суммарная мгновенная мощность в цепи постоянна (сумма мгновенных мощностей отдельных фаз),

называют уравновешенной многофазной системой. Симметричные системы являются уравновешенными.

Связанную систему на рис.

10.8 называют системой, соединенной в звезду, или звездой. Для такой системы характерно наличие общей точки O , называемой нулевой (нейтральной). Нулевые точки источника питания и потребителя электрической энергии могут быть соединены проводом,

называемым нулевым (нейтральным). Ток в нулевом проводе обычно значительно меньше, чем токи в фазных проводах.

Таким образом, m -фазная система может быть как m - (без нулевого провода), так и $m+1$ -проводной (при наличии нулевого провода).

Напряжение между любой из фаз многофазной системы и нейтралью источника питания (нейтралью нагрузки) называют фазным, а напряжение между фазами в любом месте цепи — междуфазным (линейным). Соотношения между действующими

(амплитудными) значениями этих напряжений зависят от числа фаз и вида соединения многофазной системы. Для симметричной многофазной цепи характерным является равенство комплексных сопротивлений всех фаз системы.

Для многофазных цепей возможно также соединение многоугольником. На рис. 10.9 показана связанная трехфазная цепь, соединенная треугольником. Такая трехфазная цепь может быть только трехпроводной (в общем случае m -проводной).

Источник питания и приемник электрической энергии не обязательно имеют одинаковую схему соединений. Так, например, на рис. 10.10 показана трехфазная цепь, источник питания которой соединен звездой, а приемник электрической энергии — треугольником. Поскольку симметричную многофазную цепь составляют из одинаковых элементов во всех фазах, то схематически ее можно изображать однолинейной,

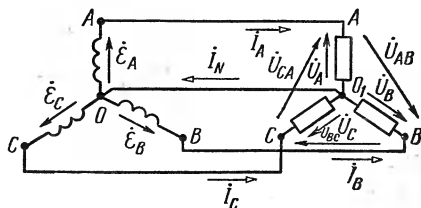


Рис. 10.8

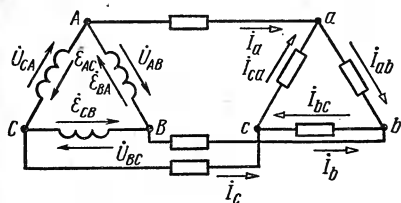


Рис. 10.9

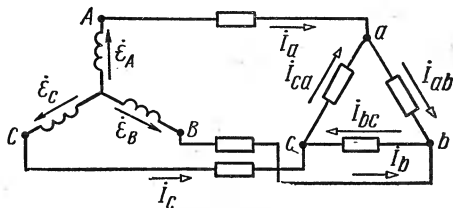


Рис. 10.10

§ 10.2. Симметричные трехфазные цепи и методы их расчета

В симметричной трехфазной системе э. д. с. в фазах a , b и c связаны между собой следующими соотношениями:

$$\dot{\mathcal{E}}_a = \mathcal{E} e^{j\psi_a}; \quad \dot{\mathcal{E}}_b = \mathcal{E} e^{j\psi_b}; \quad \dot{\mathcal{E}}_c = \mathcal{E} e^{j\psi_c},$$

где

$$\psi_a - \psi_b = \psi_b - \psi_c = \psi_c - \psi_a = 2\pi/m = 2\pi/3$$

или

$$\psi_a - \psi_b = \psi_c - \psi_b = \psi_b - \psi_a = 2\pi/m = 2\pi/3.$$

Первую систему называют системой прямой последовательности чередования фаз (системой прямой последовательности э. д. с.), а вторую — системой обратной последовательности чередования фаз (системой обратной последовательности э. д. с.). Для упрощения записи вводят оператор поворота

$$a = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

который при умножении на какое-либо комплексное число приводит к изменению аргумента последнего на $2\pi/3$. Таким образом, систему прямой последовательности э. д. с. можно записать в виде

$$\dot{\mathcal{E}}_a = a\dot{\mathcal{E}}_b; \quad \dot{\mathcal{E}}_b = a\dot{\mathcal{E}}_c; \quad \dot{\mathcal{E}}_c = a\dot{\mathcal{E}}_a$$

или

$$\dot{\mathcal{E}}_a = a\dot{\mathcal{E}}_b = a^2\dot{\mathcal{E}}_c,$$

а систему обратной последовательности э. д. с. — в виде

$$\dot{\mathcal{E}}_a = a^2\dot{\mathcal{E}}_b = a\dot{\mathcal{E}}_c.$$

Оператор поворота a обладает следующими основными свойствами:

$$1 + a + a^2 = 0; \quad a - a^2 = j\sqrt{3};$$

$$a^2 = a^*; \quad 1 - a = a^2j\sqrt{3};$$

$$a^3 = 1; \quad a^2 - 1 = aj\sqrt{3}.$$

Достаточно взаимно изменить индексы у векторов любых двух фаз, чтобы получить систему величин противоположной последовательности. Обычно симметричную трехфазную систему рассматривают в качестве системы прямой последовательности.

Если известно, что рабочий режим цепи симметричен, то, определив значение какого-либо параметра одной из фаз (обычно за исходную принимают фазу a), находят значения того же

параметра и для остальных фаз. Например, если э. д. с. фазы a равна $\dot{\mathcal{E}}$, то всю симметричную систему э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}$ определяют путем умножения значения $\dot{\mathcal{E}}$ на матрицу соответствующих коэффициентов S , характеризующих данную систему параметров:

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{E}} S.$$

Для системы прямой последовательности э. д. с. (или любой другой величины) матрица коэффициентов (операторов поворота)

$$S_1 = [1 \ a^2 \ a],$$

для системы обратной последовательности

$$S_2 = [1 \ a \ a^2].$$

Матрицы коэффициентов дают возможность изображать трехфазную цепь однофазной схемой замещения (составленной для

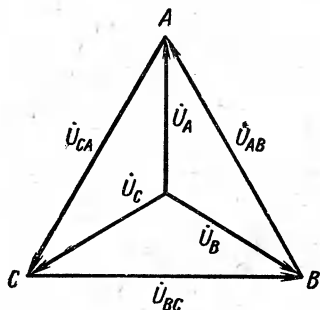


Рис. 10.11

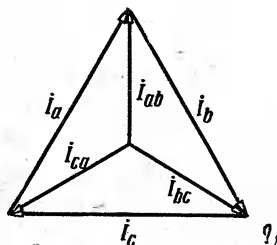


Рис. 10.12

одной фазы цепи). Умножая параметры режима однофазной схемы на эти матрицы, можно получить параметры режима для заданной трехфазной цепи (оригинала).

Если симметричные фазные напряжения (рис. 10.11) для соединения звездой (см. рис. 10.8) при симметричной нагрузке записывают в виде

$$\dot{U}_A = a \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_C,$$

то междуфазные напряжения по второму закону Кирхгофа равны разности фазных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = -aj\sqrt{3} \dot{U}_A;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = -j\sqrt{3} \dot{U}_A;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = -a^2 j\sqrt{3} \dot{U}_A.$$

Следовательно, при соединении звездой междуфазные напряжения по модулю больше фазных в $\sqrt{3}$ раз. Кроме того, эти

напряжения также составляют симметричную трехфазную систему $\dot{U}_{AB} = a\dot{U}_{BC} = a^2\dot{U}_{CA}$. Если токи в фазах приемника электрической энергии, соединенного треугольником, обозначить и задать их положительные направления так, как показано на рис. 10.10, то при одинаковых сопротивлениях фаз и симметричной системе междуфазных напряжений будет симметричной и система токов в фазах (рис. 10.12): $\dot{I}_{ab} = a\dot{I}_{bc} = a^2\dot{I}_{ca}$.

Линейные токи в подводящих проводах определяют по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = (1 - a)\dot{I}_{ab} = a^2j\sqrt{3}\dot{I}_{ab};$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = (a^2 - 1)\dot{I}_{ab} = aj\sqrt{3}\dot{I}_{ab};$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = (a - a^2)\dot{I}_{ab} = j\sqrt{3}\dot{I}_{ab}.$$

Таким образом, линейные токи также образуют симметричную систему $\dot{I}_a = a\dot{I}_b = a^2\dot{I}_c$ и по величине в $\sqrt{3}$ раз больше токов в фазах.

В этом случае суммарная комплексная мощность для всех трех фаз приемника электрической энергии

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \dot{U}_{ab}\dot{I}_{ab}^* + \dot{U}_{bc}\dot{I}_{bc}^* + \dot{U}_{ca}\dot{I}_{ca}^* \\ &= 3U_{\phi}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = 3U_{\phi}I_{\phi}e^{j\varphi} = \sqrt{3}UIe^{j\varphi},\end{aligned}$$

где U — модуль междуфазного или линейного напряжения; I — модуль тока в фазе приемника; U_{ϕ} — модуль фазного напряжения; I_{ϕ} — модуль линейного тока; φ — сдвиг фаз между током приемника и фазным напряжением.

Полученные выражения показывают, что для характеристики рабочего режима симметричной трехфазной цепи достаточно иметь три величины, определяемые вещественными числами: модули фазного напряжения U_{ϕ} и тока в фазе приемника (нагрузки) I_{ϕ} , сдвиг фаз между фазным током и фазным напряжением φ . Если фазные напряжения симметричной трехфазной системы, соединенной звездой:

$$\dot{U}_a = U_{\phi}; \dot{U}_b = U_{\phi}a^2; \dot{U}_c = U_{\phi}a,$$

то токи в фазах равны линейным токам: $\dot{I}_a = I_{\phi}e^{j\varphi}$; $\dot{I}_b = a^2\dot{I}_a$; $\dot{I}_c = a\dot{I}_a$, а междуфазные напряжения:

$$\dot{U}_{ab} = -aj\sqrt{3}U_{\phi}; \dot{U}_{bc} = -j\sqrt{3}U_{\phi}; \dot{U}_{ca} = -a^2j\sqrt{3}U_{\phi}.$$

Комплексные мощности фаз:

$$\tilde{S}_a = \tilde{S}_b = \tilde{S}_c = U_{\phi}I_{\phi}e^{j\varphi}.$$

Суммарная комплексная мощность трех фаз

$$\tilde{S} = 3U_{\phi}I_{\phi}e^{j\varphi} = \sqrt{3}UIe^{j\varphi}.$$

Если источник питания или приемник электрической энергии соединен треугольником, то ток в каждой его фазе в $\sqrt{3}$ раз меньше линейного тока.

Пример 10.1. На рис. 10.13 изображен элемент трехфазной цепи, соединенной звездой. В каждой фазе этого элемента включены источник э. д. с. и комплексное сопротивление. Заданные э. д. с. образуют систему прямой последовательности: $\dot{\mathcal{E}}_a = a\dot{\mathcal{E}}_b = a^2\dot{\mathcal{E}}_c$. Определить параметры эквивалентного элемента, соединенного треугольником (рис. 10.14).

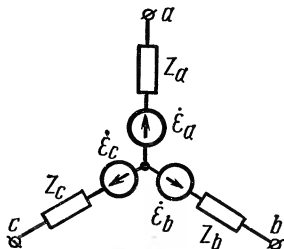


Рис. 10.13

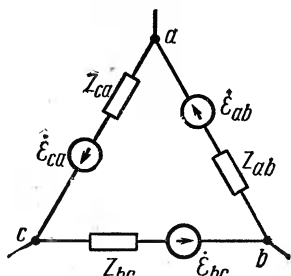


Рис. 10.14

Решение. Комплексные эквивалентные сопротивления найдем по формулам преобразования пассивной звезды в треугольник (при отсутствии э. д. с.):

$$Z_{ab} = Z_a + Z_b + (Z_a Z_b / Z_c);$$

$$Z_{bc} = Z_b + Z_c + (Z_b Z_c / Z_a);$$

$$Z_{ca} = Z_c + Z_a + (Z_c Z_a / Z_b).$$

Если $Z_a = Z_b = Z_c = Z$, то $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = 3Z$. Эквивалентные э. д. с. треугольника должны составлять систему векторов прямой последовательности:

$$\dot{\mathcal{E}}_{ab} = a\dot{\mathcal{E}}_{bc} = a^2\dot{\mathcal{E}}_{ca},$$

где

$$\dot{\mathcal{E}}_{ab} = \dot{\mathcal{E}}_a - \dot{\mathcal{E}}_b; \quad \dot{\mathcal{E}}_{bc} = \dot{\mathcal{E}}_b - \dot{\mathcal{E}}_c \quad \text{и} \quad \dot{\mathcal{E}}_{ca} = \dot{\mathcal{E}}_c - \dot{\mathcal{E}}_a.$$

Тогда

$$\dot{\mathcal{E}}_{ab} = \sqrt{3} \dot{\mathcal{E}}_a e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

Пример 10.2. Рассчитать симметричную трехфазную цепь на рис. 10.15, если заданы все сопротивления ветвей схемы и линейные напряжения на входных зажимах трехфазной цепи ($\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$).

Решение. Заменяем треугольник эквивалентной звездой: $r' = \frac{1}{3} r$ (на рис. 10.15 сопротивления r' показаны пунктиром). Нейтральная точка O эквивалентной звезды и точка O_1 имеют один и тот же потенциал, поэтому две звезды можно заменить одной эквивалентной, каждая фаза которой состоит из двух параллельных ветвей. Комплексные сопротивления этих ветвей $Z_1 = jx$, $Z' = r'$, а комплексное сопротивление эквивалентной звезды

$$Z_\Phi = \frac{Z_1 Z'}{Z_1 + Z'} = \frac{r' jx}{r' + jx} = \frac{r' x^2}{(r')^2 + x^2} + j \frac{x (r')^2}{(r')^2 + x^2}.$$

Упростим полученную схему, заменив ее тремя сопротивлениями, соединенными звездой. Комплексное фазное сопротивление эквивалентной звезды

$$Z_\Phi = r_d + Z_\Phi = r_d + \frac{r' x^2}{(r')^2 + x^2} + j \frac{x (r')^2}{(r')^2 + x^2};$$

Линейные токи схемы

$$I_A = I_B = I_C = I = U_\phi / z_\phi = U_\lambda / \sqrt{3} z_\phi,$$

где

$$z_\phi = \sqrt{\left[r_\lambda + \frac{r' x^2}{(r')^2 + x^2} \right]^2 + \left[\frac{x (r')^2}{(r')^2 + x^2} \right]^2}.$$

Фазные напряжения эквивалентной звезды

$$U_a = U_b = U_c = z_\phi I = \sqrt{\left[\frac{r' x^2}{(r')^2 + x^2} \right]^2 + \left[\frac{x (r')^2}{(r')^2 + x^2} \right]^2} \frac{U_\lambda}{\sqrt{3} z_\phi}.$$

Токи в фазах заданной звезды с сопротивлением z_1

$$I_a = I_b = I_c = U_a / z_1 = U_a / x.$$

Линейные напряжения звезды равны фазным напряжениям треугольника:

$$U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = \sqrt{3} U_a.$$

Определим фазные и линейные токи треугольника:

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = U_{ab} / r;$$

$$I'_a = I'_b = I'_c = \sqrt{3} U_{ab} / r.$$

Для симметричных трехфазных цепей характерно постоянство суммарной мгновенной мощности трехфазной цепи.

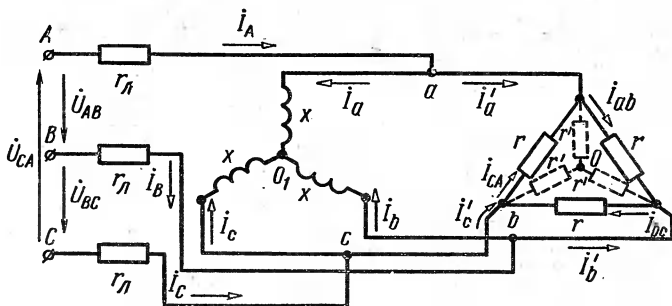


Рис. 10.15

Фазные мгновенные мощности симметричной трехфазной цепи определяем по формулам

$$p_a = u_a i_a; p_b = u_b i_b; p_c = u_c i_c,$$

где

$$u_a = U_m \sin(\omega t + \psi); u_b = U_m \sin(\omega t + \psi - 120^\circ);$$

$$u_c = U_m \sin(\omega t + \psi - 240^\circ); i_a = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

$$i_b = I_m \sin(\omega t + \psi - 120^\circ - \varphi); i_c = I_m \sin(\omega t + \psi - 240^\circ - \varphi).$$

После подстановки значений напряжений и токов в выражения для мгновенных мощностей и суммирования мощностей получаем

следующее уравнение:

$$p_a + p_b + p_c = 3UI \cos \varphi - UI \{ \cos [2(\omega t + \psi) - \varphi] + \\ + \cos [2(\omega t + \psi - 120^\circ) - \varphi] + \cos [2(\omega t + \psi - 240^\circ) - \varphi] \}.$$

В фигурных скобках записана сумма трех косинусов с одинаковыми амплитудами, сдвинутыми на 120° , которая для любого момента времени равна нулю. Поэтому $p_a + p_b + p_c = 3UI \cos \varphi = \text{const}$. Трехфазную систему, для которой справедливо это равенство, называют, как отмечалось, уравновешенной.

§ 10.3. Расчет несимметричных трехфазных цепей

Задача расчета рабочего режима трехфазной цепи усложняется, если хотя бы в одном ее месте нарушено условие симметрии: система э. д. с. или задающих токов несимметрична или различны пассивные параметры для разных фаз. Это может привести к нарушению симметрии всех параметров режима трехфазной цепи. В таких случаях всю трехфазную цепь рассматривают как разветвленную цепь с несколькими однофазными источниками; при этом схема замещения должна составляться для всех фаз.

На рис. 10.16 изображена трехфазная цепь, состоящая из источника питания, соединенного в звезду, четырехпроводной линии с сопротивлением каждого провода Z и сопротивлением нейтрали Z_N , а также несимметричного приемника электрической энергии, соединенного звездой, с сопротивлениями Z_a , Z_b и Z_c . Данная схема содержит два узла O и O_1 , напряжение между которыми

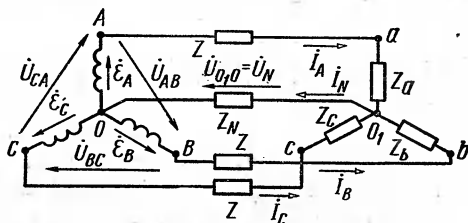


Рис. 10.16

$$\dot{U}_{O_1 O} = \dot{U}_N = \frac{\dot{\mathcal{E}}_A Y_A + \dot{\mathcal{E}}_B Y_B + \dot{\mathcal{E}}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N},$$

где

$$Y_A = 1/(Z + Z_a); \quad Y_B = 1/(Z + Z_b);$$

$$Y_C = 1/(Z + Z_c); \quad Y_N = 1/Z_N.$$

Токи в фазах (линейные токи в звезде равны фазным токам) определяются по формулам

$$\dot{I}_A = (\dot{\mathcal{E}}_A - \dot{U}_N) Y_A; \quad \dot{I}_B = (\dot{\mathcal{E}}_B - \dot{U}_N) Y_B; \quad \dot{I}_C = (\dot{\mathcal{E}}_C - \dot{U}_N) Y_C.$$

Ток в нейтральном проводе $\dot{I}_N = \dot{U}_N Y_N$. На топографической диаграмме (рис. 10.17) э. д. с. источника питания показаны в виде векторов $\dot{\mathcal{E}}_A$, $\dot{\mathcal{E}}_B$ и $\dot{\mathcal{E}}_C$, напряжения между точками A , B , C

и нейтралью — в виде векторов $\dot{U}_{AO_1} = \dot{\mathcal{E}}_A - \dot{U}_N$, $\dot{U}_{BO_1} = \dot{\mathcal{E}}_B - \dot{U}_N$, $\dot{U}_{CO_1} = \dot{\mathcal{E}}_C - \dot{U}_N$ и напряжение между нейтралью приемника и нейтралью генератора (напряжение смещения нейтрали) — в виде вектора $\dot{U}_N$. Линейные напряжения на зажимах генератора считаются равными разности соответствующих э. д. с., если падения напряжения в обмотках генератора незначительны.

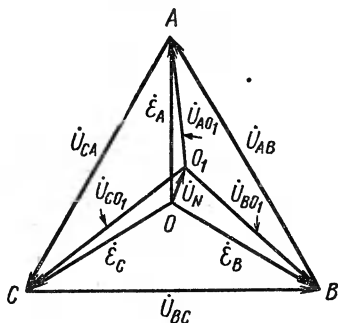


Рис. 10.17

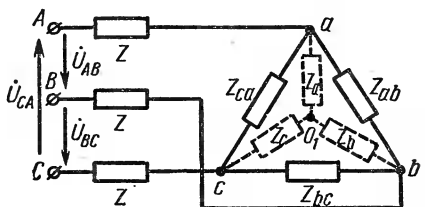


Рис. 10.18

По известным фазным токам определяем фазные, а затем линейные напряжения на нагрузке:

$$\begin{aligned} \dot{U}_a &= Z_a \dot{I}_a; \quad \dot{U}_b = Z_b \dot{I}_b; \quad \dot{U}_c = Z_c \dot{I}_c; \\ \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_a - \dot{U}_b; \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_b - \dot{U}_c; \quad \dot{U}_{ca} = \dot{U}_c - \dot{U}_a. \end{aligned}$$

Такой порядок расчета можно использовать в случае одного источника питания и нескольких приемников электрической энергии.

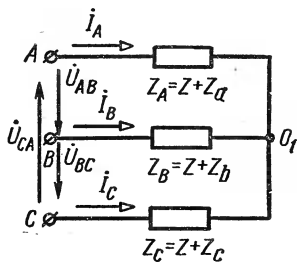


Рис. 10.19

Если нулевой провод отсутствует, а нагрузка включена треугольником Z_{ab} , Z_{bc} , Z_{ca} , то этот треугольник следует заменить эквивалентной звездой (рис. 10.18). Полученные сопротивления Z_a , Z_b , Z_c пофазно объединяются с сопротивлениями Z , в результате чего получается несимметричная звезда (рис. 10.19). Для определения фазных напряжений $\dot{U}_{AO_1}$, $\dot{U}_{BO_1}$ и $\dot{U}_{CO_1}$ через заданные

линейные напряжения $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ используем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AO_1} Y_A + \dot{U}_{BO_1} Y_B + \dot{U}_{CO_1} Y_C &= 0; \\ \dot{U}_{AO_1} - \dot{U}_{BO_1} &= \dot{U}_{AB}; \quad \dot{U}_{BO_1} - \dot{U}_{CO_1} = \dot{U}_{BC}. \end{aligned}$$

Решая совместно эти уравнения, с учетом $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$ получаем:

$$\dot{U}_{AO_1} = \frac{\dot{U}_{AB} Y_B + \dot{U}_{AC} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}; \quad \dot{U}_{BO_1} = \frac{\dot{U}_{BC} Y_C + \dot{U}_{BA} Y_A}{Y_A + Y_B + Y_C}; \quad \dot{U}_{CO_1} = \frac{\dot{U}_{CA} Y_A + \dot{U}_{CB} Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Пользуясь выражениями для фазных напряжений на эквивалентной звезде, определяем токи:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AO_1} Y_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{BO_1} Y_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{CO_1} Y_C.$$

Зная токи $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$, находим напряжения в эквивалентной звезде из выражений для сопротивлений Z_a , Z_b и Z_c , после чего напряжения на зажимах заданного треугольника вычисляются по формулам

$$\dot{U}_{ab} = Z_a \dot{I}_A - Z_b \dot{I}_B; \quad \dot{U}_{bc} = Z_b \dot{I}_B - Z_c \dot{I}_C; \quad \dot{U}_{ca} = Z_c \dot{I}_C - Z_a \dot{I}_A.$$

Токи в фазах заданного треугольника находятся из выражений

$$Z_{ab} \dot{I}_{ab} = \dot{U}_{ab}; \quad Z_{bc} \dot{I}_{bc} = \dot{U}_{bc}; \quad Z_{ca} \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{ca}.$$

Следует подчеркнуть, что при резко несимметричной нагрузке отсутствие нейтрального провода может привести к большому значению потенциала нейтрали нагрузки, в результате чего потенциал точки O_1 эквивалентной звезды оказывается за пределами треугольника линейных напряжений. Нейтральный провод, как правило, приводит к уменьшению напряжения смещения нейтрали $\dot{U}_N$, так как сопротивление каждой фазы нагрузки значительно превышает сопротивление нейтрального провода.

Пример 10.3. Потребитель электрической энергии включен между фазами b и c с проводимостью $Y = g - jb$. К зажимам трехфазной цепи присоединены две батареи конденсаторов — между фазами b и c и между фазами a и c (рис. 10.20). Емкости конденсаторов выбраны такими, что емкостные проводимости:

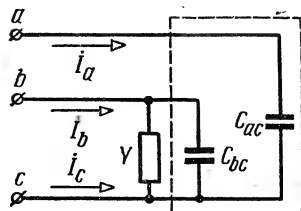


Рис. 10.20

$$b_{ca} = \omega C_{ca} = \frac{2}{\sqrt{3}} g; \quad b_{bc} = \omega C_{bc} = b + \frac{g}{\sqrt{3}}.$$

Убедиться в том, что система токов в трехфазной цепи в этом случае симметрична.

Решение. Ток фазы a

$$\dot{I}_a = -\dot{U}_{ca} j b_{ca} = -a^2 2 \dot{U}_{ag};$$

ток фазы b

$$\dot{I}_b = \dot{U}_{bc} (Y + j b_{bc}) = -a 2 \dot{U}_{ag};$$

ток фазы c

$$\dot{I}_c = \dot{U}_{ca} j b_{ca} - \dot{U}_{bc} (Y + j b_{bc}) = -2 \dot{U}_{ag}.$$

Из полученных выражений следует, что токи $\dot{I}_a$, $\dot{I}_b$ и $\dot{I}_c$ составляют симметричную систему:

$$\dot{I}_a = a \dot{I}_b = a^2 \dot{I}_c.$$

Полная мощность всех трех фаз

$$\tilde{S} = \dot{U}_{bc} \dot{I}_{bc} + \dot{U}_{ca} \dot{I}_{ca}.$$

Пример 10.4. В фазу A трехфазной системы включено переменное активное сопротивление r , в фазу B — неизменное индуктивное сопротивление x_L , а в фазу C — неизменное емкостное сопротивление x_C (рис. 10.21). Определить

геометрическое место концов вектора напряжения $\dot{U}_N$ смещения нейтрали указанной несимметричной нагрузки относительно центра тяжести треугольника линейных напряжений, если линейные напряжения на зажимах заданной звезды одинаковы, а сопротивления нагрузки в фазах B и C равны по абсолютной величине: $x_L = x_C$.

Решение. Пусть фазные напряжения, определяющие центр тяжести треугольника напряжений, $\dot{U}_A = a\dot{U}_B = a^2\dot{U}_C$. При этом вектор $\dot{U}_A$ совпадает с осью вещественных величин. Тогда напряжение смещения нейтрали

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Так как $Y_B + Y_C = 0$, $Y_A = g_A = g$, то

$$\dot{U}_N = \dot{U}_A \left(1 - \sqrt{3} \frac{b}{g}\right),$$

где b — проводимость фазы B или C по абсолютной величине. Пользуясь полученной формулой, определим фазные напряжения на нагрузке при различных значениях проводимости g . Если $g = \infty$ (фаза A замкнута), то точка N совпадает с точкой A (рис. 10.22), в результате чего напряжения на двух других фазах оказываются равными линейным: $\dot{U}'_B = -\dot{U}_{AB}$; $\dot{U}'_C = \dot{U}_{CA}$. Вектор тока $\dot{I}_B$ в фазе B отстает от вектора напряжения $\dot{U}'_B$ на $\pi/2$, а

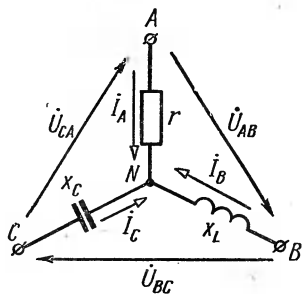


Рис. 10.21

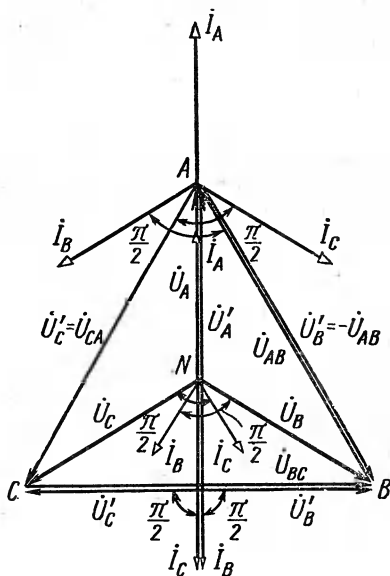


Рис. 10.22

вектор тока $\dot{I}_C$ опережает вектор напряжения $\dot{U}'_C$ на $\pi/2$. Ток $\dot{I}_A$ в замкнутой фазе найдем по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C).$$

Из векторной диаграммы токов (рис. 10.22) видно, что при $g = \infty$ токи $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ одинаковы (по модулю) и образуют систему векторов обратной последовательности. Если в фазе A проводимость $g = \sqrt{3} b$, то $\dot{U}_N = 0$ и точка N совпадает с центром тяжести треугольника линейных напряжений, а фазные напряжения $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ на нагрузке образуют симметричную трехфазную систему. Однако векторы токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ образуют несимметричную трехфазную систему обратной последовательности. При размыкании фазы A $g = 0$, $\dot{U}_N$ стре-

мится к бесконечно большому значению, что соответствует резонансу напряжений в фазах B и C (они оказываются соединенными последовательно) при отсутствии активного сопротивления. На рис. 10.22 построена также векторная диаграмма токов и напряжений для $g = \frac{2}{\sqrt{3}} b$. При этом фазные напряжения

$\dot{U}'_B$ и $\dot{U}'_C$ равны друг другу по абсолютной величине, противоположны по фазе и каждое из них равно половине линейного напряжения. Напряжение $\dot{U}'_A = \frac{3}{2} \dot{U}_A$ по-прежнему совпадает с осью вещественных величин.

Таким образом, геометрическим местом концов вектора смещения нейтральной $\dot{U}_N$ служит прямая линия, совпадающая с осью вещественных величин. Ток I_A при изменении проводимости g от 0 до ∞ (за исключением $g=0$) не изменяется по величине и по фазе:

$$I_A = (\dot{U}_A - \dot{U}_N) g = \left(\dot{U}_A - \dot{U}_A + \dot{U}_A \sqrt{3} \frac{b}{g} \right) g = \dot{U}_A \sqrt{3} b.$$

§ 10.4. Вращающееся магнитное поле; принцип действия асинхронного двигателя

Возможность создания вращающегося магнитного поля является важным свойством многофазных систем. На рис. 10.23 изображена катушка (в виде одного витка) с током, изменяющимся по синусоидальному закону (рис. 10.24). В центре катушки и на ее оси вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости катушки и совпадает с ее осью.

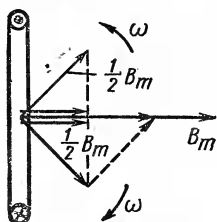


Рис. 10.23

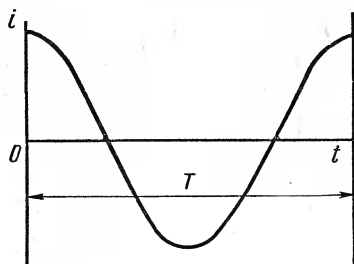


Рис. 10.24

Пульсирующую магнитную индукцию, создаваемую переменным током, можно рассматривать как результат совместного действия двух составляющих, вращающихся в противоположных направлениях с половинной амплитудой и одинаковой угловой скоростью ω :

$$B = B_m \cos \omega t = \frac{1}{2} B_m (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Магнитную индукцию, вращающуюся со скоростью ω , можно получить, если с помощью второй катушки с гармоническим током, сдвинутой относительно первой катушки в пространстве, компенсировать составляющую обратного вращения, обусловленную переменным током первой катушки. При этом результирующая индукция, вращающаяся в прямом направлении, будет в общем случае другой по величине.

Пусть магнитные индукции, создаваемые токами катушек 1 и 2, определяются уравнениями

$$B_1 = B_{1m} \cos \omega t = \frac{1}{2} B_{1m} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t});$$

$$\begin{aligned} B_2 &= B_{2m} \cos (\omega t + \psi_t) = \frac{1}{2} B_{2m} [e^{j(\omega t + \psi_t)} + e^{-j(\omega t + \psi_t)}] = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{B}_{2m} e^{j\omega t} + \dot{B}_{2m}^* e^{-j\omega t}), \end{aligned}$$

где

$$\dot{B}_{2m} = B_{2m} e^{j\psi_t}; \quad \dot{B}_{2m}^* = B_{2m} e^{-j\psi_t}.$$

При этом катушка 2 (рис. 10.25, а) сдвинута в пространстве относительно катушки 1 на угол γ . Из условия взаимной компен-

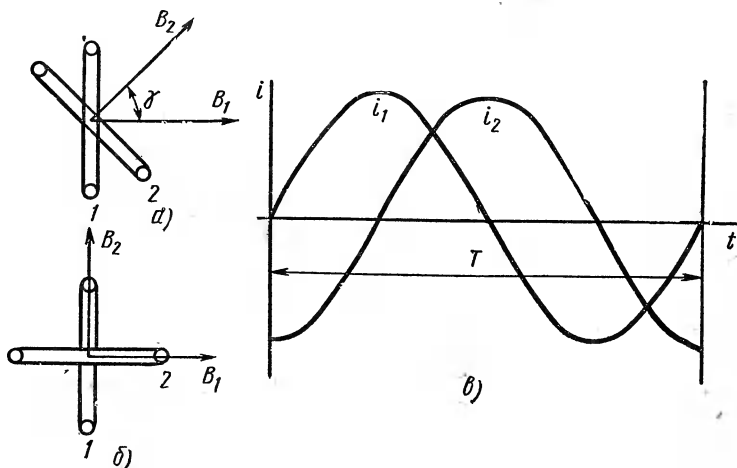


Рис. 10.25

сации обратно вращающихся магнитных потоков

$$\frac{1}{2} (B_{1m} + \dot{B}_{2m}^* e^{j\gamma}) e^{-j\omega t} = 0$$

определяем

$$B_{1m} + B_{2m} e^{j(\gamma - \psi_t)} = 0,$$

откуда

$$B_{1m} = B_{2m}; \quad \gamma - \psi_t = \pi$$

или

$$\psi_t = \gamma - \pi.$$

Следовательно, между индукциями катушек должен быть сдвиг во времени, непосредственно определяемый сдвигом в пространстве. При этом следует учесть, что вращающееся магнитное поле получается, если γ и ψ_t не равны нулю или π , что легко прове-

речь непосредственно по схематической картине поля, создаваемого соответствующими токами обмоток.

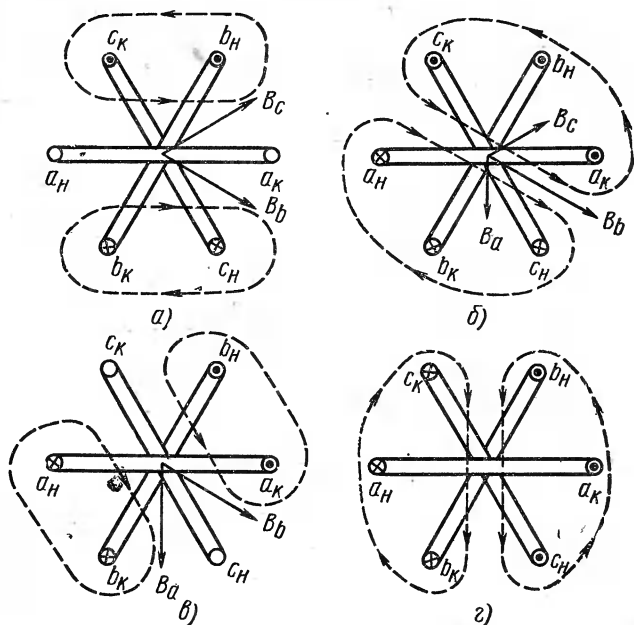


Рис. 10.26

Пусть обмотки сдвинуты в пространстве на угол $\gamma = 90^\circ$; сдвиг фаз между токами (с одинаковыми амплитудами) находят из выражения $\psi_t = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$, т. е. ток, создающий переменное магнитное поле в катушке 2, должен отставать от тока, создающего переменное магнитное поле в катушке 1, на $\frac{1}{4}$ периода (рис. 10.25, б, в).

На рис. 10.26, а—г даны схематические картины результирующего магнитного поля, создаваемого токами симметричной трехфазной системы (рис. 10.27) в катушках, сдвинутых в пространстве на 120° (индекс «н» указывает начало, а индекс «к» — конец обмоток). Схематическая картина магнитного поля для момента времени $t_1 = 0$ показана на рис. 10.26, а при $i_a = 0$, $i_b < 0$ и $i_c > 0$.

Если положительное значение тока i_c у начала обмотки в отмечено условно крестиком, то отрицательное значение тока i_b

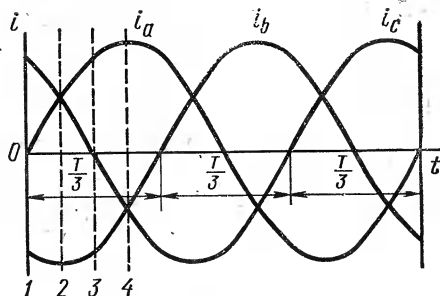


Рис. 10.27

у начала обмотки b отмечено точкой. Кроме того, векторы магнитной индукции в центре и на оси катушек направлены перпендикулярно плоскостям соответствующих катушек и пропорциональны токам в обмотках.

Для момента $t_2 = T/12$ (рис. 10.26, б) токи i_a и i_c имеют положительные значения (начало соответствующих обмоток отмечено крестиками), а ток i_b имеет по-прежнему отрицательное значение (отмечено точкой у начала обмотки b). Рис. 10.26, в соответствует $t_3 = T/6$, а рис. 10.26, г — $t_4 = T/4$.

Сравнение схематических картин магнитного поля, приведенных для различных моментов времени, наглядно показывает вращение магнитного поля. При этом за один период изменения токов магнитное поле совершает один полный оборот. Направление вращения магнитного поля зависит от последовательности фаз токов в обмотках. Для изменения направления вращения магнитного поля достаточно поменять местами, например, токи в двух любых обмотках, сохранив ток в третьей обмотке неизменным.

Для аналитического определения условий создания вращающегося магнитного поля в трехфазной симметричной системе можно, так же как и в двухфазной системе, использовать условие компенсации поля обратного вращения. Если $\dot{B}_a = a\dot{B}_b = a^2\dot{B}_c$, то условие компенсации поля обратного вращения запишется в виде

$$\frac{1}{2} (\dot{B}_{am} e^{j\gamma_a} + \dot{B}_{bm} e^{j\gamma_b} + \dot{B}_{cm} e^{j\gamma_c}) e^{-j\omega t} = 0$$

или

$$\frac{1}{2} \dot{B}_{am} e^{j\gamma_a} [1 + a e^{j(\gamma_b - \gamma_a)} + a^2 e^{j(\gamma_c - \gamma_a)}] e^{-j\omega t} = 0,$$

откуда

$$\gamma_c - \gamma_b = \gamma_b - \gamma_a = \gamma_a - \gamma_c = \frac{2}{3} \pi$$

(векторы, записанные в виде суммы в квадратных скобках, образуют замкнутый равносторонний треугольник).

Таким образом, катушки должны быть сдвинуты в пространстве под углом $\frac{2}{3} \pi$ друг к другу так, чтобы положительные направления векторов индукции чередовались по направлению вращающегося магнитного поля в той последовательности, которая соответствует очередности чередования фаз вызывающих их токов (рис. 10.27). Если каждый вектор магнитных индукций имеет амплитуду B_m , то суммарная индукция

$$B = \frac{1}{2} B_m (1 + a^2 a + a a^2) = \frac{3}{2} B_m$$

при $\psi_a = \gamma_a = 0$.

В этом выражении первые множители (a^2 и a) отражают сдвиг магнитных индукций во времени, а вторые (a и a^2) — сдвиг в пространстве.

Принцип действия асинхронного двигателя основан на использовании явлений, связанных с вращающимся магнитным полем. Пусть три одинаковые неподвижные катушки расположены в пространстве так, что их оси сдвинуты относительно друг друга на 120° (рис. 10.28). Катушки питаются токами, одинаковыми по амплитуде и сдвинутыми по фазе на $2\pi/3$. Если между катушками поместить металлический барабан с проводниками, заложенными по его окружности, то в этих проводниках индуцируется э. д. с. и возникает ток. Когда магнитное поле вращается по направлению движения часовой стрелки, это равносильно движению барабана в противоположном направлении. Пользуясь правилом правой руки, можно установить, что в проводниках барабана ток направлен в верхней его части за чертеж, а в нижней — наоборот. Затем, применяя правило левой руки к индуцированным токам в проводниках барабана, легко установить, что силы, действующие на проводники, будут увлекать барабан в направлении вращения магнитного поля. При этом скорость вращения барабана всегда меньше скорости вращения поля относительно катушек, так как при одинаковых скоростях прекратилось бы индуцирование э. д. с. в проводниках и, следовательно, не существовали бы силы, создающие вращающий момент.

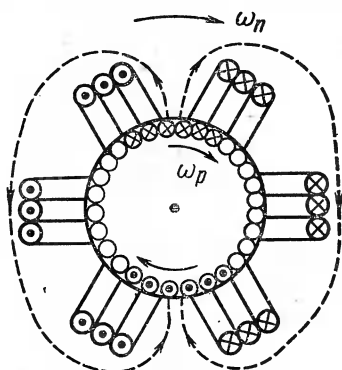


Рис. 10.28

§ 10.5. Измерение мощности в трехфазных цепях

Комплексная мощность четырехпроводной несимметричной трехфазной цепи

$$\tilde{S} = \dot{U}_a \dot{I}_a + \dot{U}_b \dot{I}_b + \dot{U}_c \dot{I}_c = P + jQ, \quad (10.1)$$

где

$$P = U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c.$$

Для измерения трех слагаемых активной мощности такой цепи (с нулевым проводом) требуется три ваттметра, включенных по схеме на рис. 10.29. Каждый ваттметр измеряет активную мощность одной фазы. В случае симметричной трехфазной цепи достаточно измерить одним ваттметром мощность одной фазы. Суммарная мощность равняется утроенной величине мощности одной фазы.

Комплексную мощность несимметричной трехпроводной цепи определяют по формуле (10.1), однако в этом случае сумма линейных токов $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \dot{U}_a \dot{I}_a + \dot{U}_b (-\dot{I}_a - \dot{I}_c) + \dot{U}_c \dot{I}_c = \\ &= (\dot{U}_a - \dot{U}_b) \dot{I}_a + (\dot{U}_c - \dot{U}_b) \dot{I}_c = \dot{U}_{ab} \dot{I}_a + \dot{U}_{cb} \dot{I}_c. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Тогда

$$P = U_{ab} I_a \cos(\widehat{U_{ab} I_a}) + U_{cb} I_c \cos(\widehat{U_{cb} I_c}) = P_{ab} + P_{cb}.$$

Таким образом, для измерения активной мощности данной цепи (без нулевого провода) достаточно включить два ваттметра по схеме на рис. 10.30.

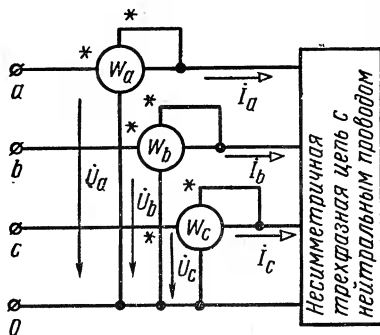


Рис. 10.29

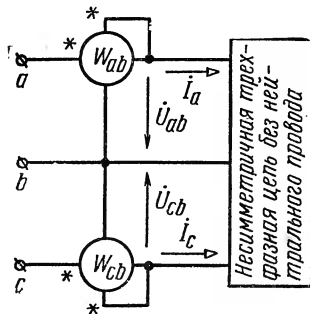


Рис. 10.30

При симметричной нагрузке из векторной диаграммы на рис. 10.31, а следует, что

$$P_{ab} = U_{ab} I_a \cos(\widehat{U_{ab} I_a}) = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \psi_{ab} = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos(\varphi + 30^\circ);$$

$$P_{cb} = U_{cb} I_c \cos(\widehat{U_{cb} I_c}) = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \psi_{cb} = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos(\varphi - 30^\circ).$$

Сумма показаний ваттметров (рис. 10.30)

$$P = P_{ab} + P_{cb} = U_{\text{л}} I_{\text{л}} 2 \cos 30^\circ \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi,$$

т. е. показания ваттметров одинаковы только при $\varphi = 0$. При $\varphi = 60^\circ$ $P_{ab} = 0$; при $\varphi = -60^\circ$ $P_{cb} = 0$; при $\varphi > 60^\circ$ $P_{ab} < 0$,

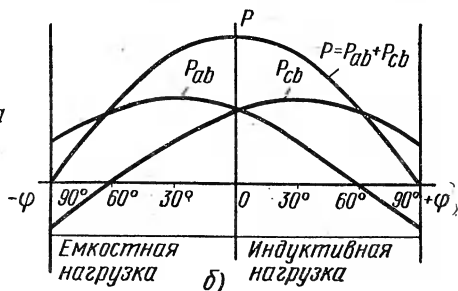
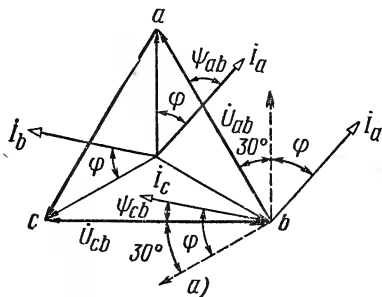


Рис. 10.31

при $\varphi < 60^\circ$ $P_{cb} < 0$. Наконец, при $\varphi = \pm 90^\circ$ (реактивная нагрузка) $P_{ab} = -P_{cb}$, а их сумма равна нулю. На рис. 10.31, б построены

графики изменения P_{ab} , P_{cb} и $P = P_{ab} + P_{cb}$ при изменении φ от 0 до $\pm 90^\circ$.

На рис. 10.32 показана схема включения ваттметра с искусственной нейтральной точкой, позволяющая измерить активную мощность одной фазы симметричной трехфазной трехпроводной цепи. Искусственная нейтральная точка создается из трех одинаковых активных сопротивлений. При этом r_d служит добавочным сопротивлением, которое вместе с сопротивлением обмотки напряжения ваттметра r_w должно равняться сопротивлению каждой из двух других фаз: $r_d + r_w = r$. Суммарная активная мощность в этом случае равна утроенному значению мощности, показываемой одним ваттметром.

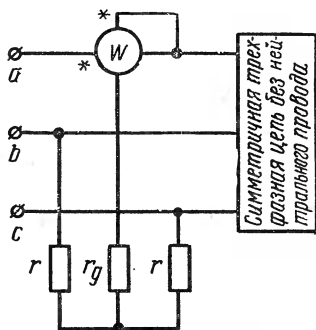


Рис. 10.32

На рис. 10.33, а изображена схема включения ваттметра для измерения реактивной мощности симметричной трехфазной цепи. Из приведенной схемы и из векторной диаграммы, изображенной на рис. 10.33, б, следует, что ваттметр

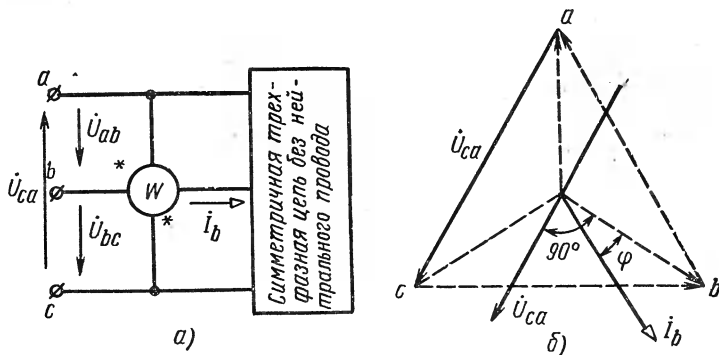


Рис. 10.33

измеряет мощность

$$U_{ca} I_b \cos(\widehat{U_{ca} I_b}) = U_{cb} I_b \cos(90^\circ - \varphi) = U_n I_n \sin \varphi,$$

что при умножении на $\sqrt{3}$ дает реактивную мощность симметричной трехфазной цепи.

§ 10.6. Основные понятия о методе симметричных составляющих

Для расчета несимметричных режимов линейных многофазных цепей часто применяют метод симметричных составляющих, основанный на принципе наложения. Этот метод позволяет упростить

расчет несимметричного режима линейной трехфазной цепи в тех случаях, когда причины нарушения симметрии (обрыв фазы, короткое замыкание и т. п.) сосредоточены в одном или двух местах системы; при этом все остальные ветви трехфазной цепи имеют одинаковые параметры всех фаз. В таких случаях вместо одной несимметричной трехфазной системы можно рассматривать три симметричные системы, схемы замещения которых составляются на одну фазу и соединяются между собой в соответствии с условиями, возникающими в местах нарушения симметрии. Любую несимметричную m -фазную систему некоторых величин $\dot{A}$ можно рассматривать как сумму m различных симметричных m -фазных систем, различающихся значениями аргумента

$$\arg \dot{A}_k = k \frac{2\pi}{m} = \delta_k \quad [k=0, 1, \dots (m-1)].$$

Если для каждой k -й симметричной системы величину $\dot{A}_{kA}$ для фазы A принять за исходную, то для любой другой фазы

$$\dot{A}_{k\alpha} = \dot{A}_{kA} e^{j\alpha k \frac{2\pi}{m}} = \dot{A}_{kA} e^{j\alpha \delta_k}.$$

Таким образом, все системы получаются симметричными, за исключением системы нулевой последовательности ($k=0$), у кото-

рой $A_{0\alpha} = A_{0A} = \text{const}$, и в сумме составляют $\sum_{\alpha=1}^m \dot{A}_{0\alpha} = m \dot{A}_{0A}$,

т. е. представляют неуравновешенную систему. Таким образом, система нулевой последовательности является симметричной только по формальным признакам. Тогда для каждой фазы несимметричной системы

$$\dot{A}_\alpha = \sum_{k=0}^{m-1} \dot{A}_{k\alpha} = \sum_{k=0}^{m-1} \dot{A}_{kA} e^{j\alpha \delta_k}.$$

Данная система линейных алгебраических уравнений дает возможность определить все значения $\dot{A}_{k\alpha}$, т. е. разложить несимметричную систему на m симметричных систем.

Если система исходных комплексных величин образует на комплексной плоскости замкнутый многоугольник, то система нулевой последовательности должна отсутствовать, т. е. число систем симметричных составляющих уменьшается на единицу и становится равным $m-1$.

Для иллюстрации отмеченных положений можно разложить несимметричную систему, состоящую из токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$, на симметричные составляющие. Заданная система является трехфазной, поэтому должно быть три симметричных системы в форме составляющих — системы прямой, обратной и нулевой последовательностей. Первую обозначают индексом 1, вторую — индексом 2, третью — индексом 0. Исходные уравнения имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{1A} + \dot{I}_{2A} + \dot{I}_{0A}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{1B} + \dot{I}_{2B} + \dot{I}_{0B}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{1C} + \dot{I}_{2C} + \dot{I}_{0C}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Для системы прямой последовательности (рис. 10.34, а)

$$\delta_1 = 2\pi/3; \quad \dot{I}_{1A} = a\dot{I}_{1B} = a^2\dot{I}_{1C}. \quad (10.4)$$

Для системы обратной последовательности (рис. 10.34, б)

$$\delta_2 = 4\pi/3; \quad \dot{I}_{2A} = a^2\dot{I}_{2B} = a\dot{I}_{2C}. \quad (10.5)$$

Для системы нулевой последовательности (рис. 10.34, в)

$$\delta_0 = 0; \quad \dot{I}_{0A} = \dot{I}_{0B} = \dot{I}_{0C} = \dot{I}_0. \quad (10.6)$$

Система токов нулевой последовательности симметрична только условно, так как такая система является неуравновешенной:

$$\dot{I}_{0A} + \dot{I}_{0B} + \dot{I}_{0C} = 3\dot{I}_0.$$

Из уравнений (10.1) ÷ (10.6) находят три линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными $\dot{I}_{1A}$, $\dot{I}_{2A}$ и $\dot{I}_{0A} = \dot{I}_0$:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{1A} + \dot{I}_{2A} + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_B &= a^2\dot{I}_{1A} + a\dot{I}_{2A} + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_C &= a\dot{I}_{1A} + a^2\dot{I}_{2A} + \dot{I}_0. \end{aligned}$$

Совместное решение этой системы дает следующие формулы для определения симметричных составляющих:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{1A} &= (\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C)/3; \\ \dot{I}_{2A} &= (\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C)/3; \\ \dot{I}_0 &= (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C)/3. \end{aligned}$$

Если исходная система векторов образует замкнутый треугольник, то $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, т. е. система нулевой последовательности отсутствует: $\dot{I}_0 = 0$.

Поскольку в четырехпроводной трехфазной цепи ток в нулевом проводе равен сумме токов в проводах фаз на том же участке цепи (иногда этот ток замыкается через землю):

$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$, то при отсутствии других электрических связей между соответствующими частями цепи $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$, т. е. в нулевом проводе будет утроенный ток нулевой последовательности.

Разложение на симметричные составляющие возможно для всех величин, входящих в многофазную систему: токов, э. д. с., напряжений, сопротивлений, проводимостей и т. д. При записи значений симметричных составляющих индекс фазы обычно опускают. Только при определении соответствующих значений величин одновременно для всех фаз или для разных фаз появляется необходимость в записи индексов, указывающих фазы.

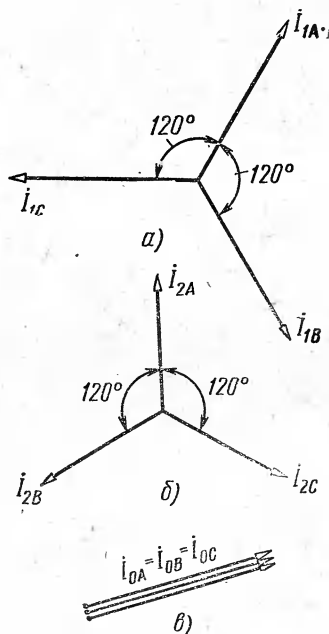


Рис. 10.34

Разложение несимметричной системы на симметричные составляющие дает возможность определить рабочий режим цепи по частям — в виде суммы симметричных режимов. Наиболее просто это выполняется в том случае, если несимметричными являются параметры активных элементов схемы замещения, а параметры пассивных элементов одинаковы для всех трех фаз.

Пример 10.5. Рассчитать схему на рис. 10.35, пользуясь методом симметричных составляющих.

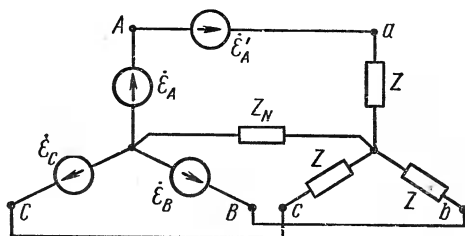


Рис. 10.35

Решение. В этой схеме несимметрия создается добавочной э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}'_A$. Действие э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}'_A$ рассмотрим как частный случай несимметричной системы э. д. с.: $\Delta \dot{\mathcal{E}}_A = \dot{\mathcal{E}}'_A$; $\Delta \dot{\mathcal{E}}_B = 0$; $\Delta \dot{\mathcal{E}}_C = 0$. По формулам разложения на симмет-

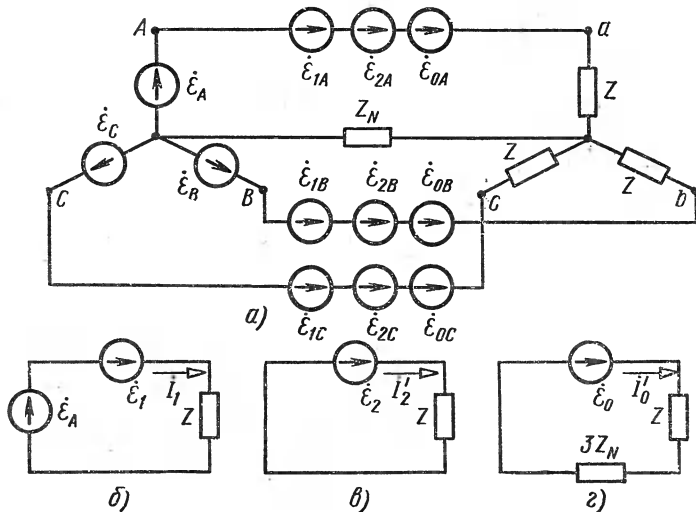


Рис. 10.36

ричные составляющие определим э. д. с. прямой, обратной и нулевой последовательностей фазы A:

$$\dot{\mathcal{E}}_1 = \dot{\mathcal{E}}_2 = \dot{\mathcal{E}}_0 = \dot{\mathcal{E}}'_A / 3.$$

В данном случае эти составляющие одинаковы, составляющие по всем фазам найдем из выражений

$$\dot{\mathcal{E}}_{1A} = a\dot{\mathcal{E}}_{1B} = a^2\dot{\mathcal{E}}_{1C} = \dot{\mathcal{E}}'_A/3;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{2A} = a^2\dot{\mathcal{E}}_{2B} = a\dot{\mathcal{E}}_{2C} = \dot{\mathcal{E}}'_A/3;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{0A} = \dot{\mathcal{E}}_{0B} = \dot{\mathcal{E}}_{0C} = \dot{\mathcal{E}}'_A/3.$$

Таким образом, вместо одной э. д. с. в фазе *A* появляются девять э. д. с. во всех трех фазах (рис. 10.36, *a*). Вместо всей трехфазной цепи рассмотрим три схемы замещения для каждой последовательности в отдельности (рис. 10.36, *б—г*). В схеме прямой последовательности две э. д. с. — исходная ($\dot{\mathcal{E}}_A$) и добавочная ($\dot{\mathcal{E}}_{1A} = \dot{\mathcal{E}}_1$) э. д. с. прямой последовательности (рис. 10.36, *б*). В схеме обратной последовательности должна быть только одна добавочная э. д. с. обратной последовательности $\dot{\mathcal{E}}_2$ (рис. 10.36, *в*), так как в исходной схеме э. д. с. обратной последовательности отсутствует. В схеме нулевой последовательности также должна быть только одна добавочная э. д. с. нулевой последовательности $\dot{\mathcal{E}}_0$ (рис. 10.36, *г*), так как в заданной схеме э. д. с. нулевой последовательности отсутствует. Кроме того, в эквивалентную схему для токов нулевой последовательности входит утроенное сопротивление нейтрального провода (ток нулевой последовательности каждой фазы замыкается через нейтраль). Другими словами, напряжение на нейтрали равно $Z_N(3\dot{I}_0)$, что в эквивалентной схеме для одной фазы должно учитываться с помощью утроенного значения сопротивления нейтрали.

Для каждой последовательности добавочные токи в схемах определим независимо друг от друга:

$$\dot{I}'_1 = \dot{\mathcal{E}}_1/Z, \quad \dot{I}'_2 = \dot{\mathcal{E}}_2/Z; \quad \dot{I}'_0 = \dot{\mathcal{E}}_0/(Z + 3Z_N).$$

Таким образом,

$$\dot{I}'_A = \frac{1}{3} \dot{\mathcal{E}}'_A \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z + 3Z_N} \right) = \dot{\mathcal{E}}'_A \frac{Z + 2Z_N}{Z(Z + 3Z_N)};$$

$$\dot{I}'_B = \frac{1}{3} \dot{\mathcal{E}}'_A \left(\frac{a^2}{Z} + \frac{a}{Z} + \frac{1}{Z + 3Z_N} \right) = -\dot{\mathcal{E}}'_A \frac{Z_N}{Z(Z + 3Z_N)};$$

$$\dot{I}'_C = \frac{1}{3} \dot{\mathcal{E}}'_A \left(\frac{a}{Z} + \frac{a^2}{Z} + \frac{1}{Z + 3Z_N} \right) = -\dot{\mathcal{E}}'_A \frac{Z_N}{Z(Z + 3Z_N)}.$$

Несмотря на то что добавочные токи в фазах *B* и *C* получились одинаковыми, в действительности токи в этих фазах будут различными, поскольку токи исходного режима (без учета добавочной э. д. с.) в них имеют разную начальную фазу: $\dot{I}_A = a\dot{I}_B = a^2\dot{I}_C$. Так как в начальном режиме $\dot{I}_A = \dot{\mathcal{E}}'_A/Z$, при несимметричном режиме результирующие токи:

$$\dot{I}''_A = \dot{I}_A + \dot{\mathcal{E}}'_A \frac{Z + 2Z_N}{Z(Z + 3Z_N)};$$

$$\dot{I}''_B = a\dot{I}_A - \dot{\mathcal{E}}'_A \frac{Z_N}{Z(Z_N + 3Z_N)};$$

$$\dot{I}''_C = a\dot{I}_A - \dot{\mathcal{E}}'_A \frac{Z_N}{Z(Z_N + 3Z_N)}.$$

§ 11.1. Определение многополюсников

Во многих случаях задача анализа рабочих режимов в электрических цепях ограничивается расчетом токов и напряжений (потенциалов) в отдельных участках цепей или нахождением уравнений связи между этими токами и напряжениями. При этом режимы остальных участков цепей остаются неизвестными, хотя все их параметры учитываются при решении соответствующих задач. Тогда рассматриваемую часть цепи можно характеризовать обобщенными параметрами по отношению к некоторым выделенным зажимам.

Часть цепи, характеризуемую обобщенными параметрами, необходимыми и достаточными для составления уравнений связи между токами и напряжениями на ее зажимах, называют **многополюсником**.

Реальная схема соединений элементов части цепи, составляющей многополюсник, может быть неизвестна. Число полюсов многополюсника равно числу зажимов на границе данной части схемы. Многополюсники условно обозначают, например, в виде прямоугольников с соответствующим числом зажимов (полюсов), с помощью которых они присоединяются к остальной части цепи.

При исследовании режимов в электрических цепях чаще всего используют двухполюсники, трехполюсники и четырехполюсники.

Многополюсники, не содержащие в своих ветвях источников энергии, называют **пассивными** (линии передачи электрической энергии, трансформаторы, мостовые измерительные схемы и т. п.).

Многополюсники, содержащие в своих ветвях источники энергии, называют **активными** (электронные лампы, полупроводниковые приборы и т. п.).

§ 11.2. Основные уравнения четырехполюсников

Для исследования режимов пассивных четырехполюсников в схеме следует выделить две ветви с источниками э. д. с. $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ (рис. 11.1). Остальную часть схемы можно рассматривать как пассивный четырехполюсник Π с первичными (входные зажимы $1-1'$) и вторичными (выходные зажимы $2-2'$) зажимами. При этом внутренние сопротивления источников электрической энергии учитывают внутри четырехполюсника. Положительные направления токов в ветвях и напряжений на их зажимах выбраны в соответствии с направлениями э. д. с. (рис. 11.1)..

На основании метода контурных токов (в соответствии с выбранными положительными направлениями токов I_1 , I_2 и напря-

жений $\dot{U}_1, U_2$) можно записать следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_1 = \dot{U}_1 &= Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{\mathcal{E}}_2 = \dot{U}_2 &= Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1, \quad Z_{21} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 \quad &\text{при } \dot{I}_2 = 0; \\ Z_{22} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2, \quad Z_{21} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2 \quad &\text{при } \dot{I}_1 = 0 \end{aligned}$$

(при питании четырехполюсника со стороны выходных зажимов 2—2').

Форму записи уравнений (11.1) называют формой Z .

В матричном виде эти уравнения можно представить как

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (11.2)$$

Совместно решая уравнения (11.1), находим выражения для токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

где

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}; \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}; \\ Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}; \quad Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}. \end{aligned}$$

Уравнения (11.3) можно получить непосредственно из схемы на рис. 11.1, пользуясь методом узловых потенциалов. При этом входные и взаимные проводимости определяют из следующих соотношений:

$Y_{11} = (\dot{I}_1 / \dot{U}_1)_{U_2=0}$ (входная проводимость со стороны входных зажимов при закороченных выходных);

$Y_{22} = (\dot{I}_2 / \dot{U}_2)_{U_1=0}$ (входная проводимость со стороны выходных зажимов при закороченных входных);

$Y_{12} = (\dot{I}_1 / \dot{U}_2)_{U_1=0}$ (взаимная проводимость при закороченных входных зажимах);

$Y_{21} = (\dot{I}_2 / \dot{U}_1)_{U_2=0}$ (взаимная проводимость при закороченных выходных зажимах).

Форма записи уравнений (11.3) носит название формы Y . Эти уравнения в матричном виде записывают аналогично (11.2):

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (11.4)$$

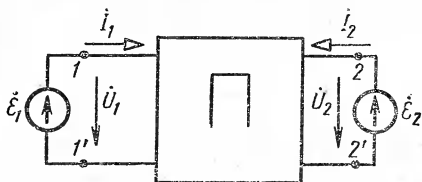


Рис. 11.1

Существуют еще четыре формы записи уравнений четырехполюсников, две из которых представляют интерес. С помощью одной из форм, называемой гибридной (смешанной) или формой H , устанавливается связь между $\dot{U}_1, \dot{I}_2$ с одной стороны и $\dot{I}_1, \dot{U}_2$ с другой:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

где

$$H_{11} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}}; \quad H_{12} = Z_{12}/Z_{22};$$

$$H_{21} = -Z_{21}/Z_{22}; \quad H_{22} = 1/Z_{22}.$$

Матричная форма уравнений (11.5) записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (11.6)$$

Гибридную форму записи уравнений используют, например, для характеристики невзаимных цепей с электронными и полупроводниковыми приборами.

Для исследования режимов четырехполюсников при каскадном соединении следует иметь такую форму записи уравнений, при которой напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ выражены через напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$. Для этого по теореме о компенсации э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_2$ заменим падением напряжения в сопротивлении Z_2 от тока $\dot{I}_2$, направленного навстречу $\dot{\mathcal{E}}_2$ (рис. 11.2). При изменении положительного направления тока $\dot{I}_2$ в уравнениях (11.1) изменится знак перед током $\dot{I}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 - Z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 - Z_{22}\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

В результате совместного решения уравнений (11.7) относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \dot{U}_2 + \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}} \dot{I}_2 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{Z_{21}} \dot{U}_2 + \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \dot{I}_2 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

где $A = Z_{11}/Z_{21}$ — безразмерная величина; $B = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$ имеет размерность сопротивления; $C = 1/Z_{21}$ имеет размерность проводимости; $D = Z_{22}/Z_{21}$ — безразмерная величина.

Форму записи уравнений (11.8) называют формой A^* .

* Указанное наименование формы записи уравнений объясняется тем, что иногда коэффициенты в уравнениях (11.8) обозначают буквой A , но с различными индексами, аналогично формам записи уравнений (11.1), (11.3) и (11.5).

Коэффициенты четырехполюсника A , B , C и D связаны между собой следующим соотношением:

$$AD - BC = \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21} Z_{21}} - \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}{Z_{21} Z_{21}} = \frac{Z_{12}}{Z_{21}}.$$

Так как для взаимных цепей $Z_{12} = Z_{21}$, то

$$AD - BC = 1. \quad (11.9)$$

Уравнения (11.8) в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (11.10)$$

Если в схеме четырехполюсника (рис. 11.2) поменять местами источник э. д. с. и сопротивление приемника, т. е. к зажимам $1-1'$ присоединить сопротивление Z_1 , а к зажимам $2-2'$ — источ-

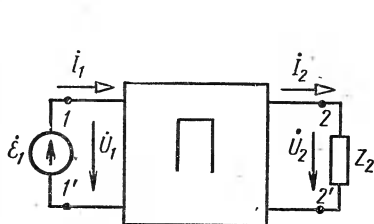


Рис. 11.2

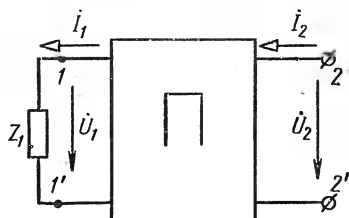


Рис. 11.3

ник э. д. с. с напряжением $\dot{U}_2$ (рис. 11.3), изменив при этом положительные направления токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ на обратные, то уравнения (11.8) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2; \\ -\dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Из этих уравнений с учетом (11.9) находим

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 &= C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

Из сравнения уравнений (11.8) и (11.12) следует, что при замене первичных зажимов вторичными (при обратном питании) коэффициенты A и D меняются местами.

Четырехполюсник называют симметричным, если при замене первичных зажимов вторичными токи источника и приемника не изменяются. Уравнения симметричного четырехполюсника должны остаться неизменными при взаимной замене первичных и вторичных зажимов. Поэтому $A = D$ и разметка первичных и вторичных зажимов для симметричного четырехполюсника не обязательна. Все четырехполюсники, не удовлетворяющие этому условию, называют несимметричными.

Комплексные коэффициенты при всех четырех формах записи уравнений зависят от величин сопротивлений или проводимостей ветвей четырехполюсника, схемы четырехполюсника, а также от частоты источника питания. Соотношения между коэффициентами четырехполюсника при различной форме записи уравнений даны в табл. 11.1. В этой таблице определители матриц Z , Y , H и A находятся по формулам

$$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}; \quad |Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21};$$

$$|H| = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}; \quad |A| = AD - BC.$$

Таблица 11.1

	Z		Y		H		A	
Z	Z_{11}	Z_{12}	$\frac{Y_{22}}{ Y }$	$-\frac{Y_{12}}{ Y }$	$\frac{ H }{H_{22}}$	$\frac{H_{12}}{H_{22}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{ A }{C}$
	Z_{21}	Z_{22}	$-\frac{Y_{21}}{ Y }$	$\frac{Y_{11}}{ Y }$	$-\frac{H_{21}}{H_{22}}$	$\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$
Y	$\frac{Z_{22}}{ Z }$	$-\frac{Z_{12}}{ Z }$	Y_{11}	Y_{12}	$\frac{1}{H_{11}}$	$-\frac{H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{ A }{B}$
	$-\frac{Z_{21}}{ Z }$	$\frac{Z_{11}}{ Z }$	Y_{21}	Y_{22}	$\frac{H_{21}}{H_{11}}$	$\frac{ H }{H_{11}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
H	$\frac{ Z }{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	H_{11}	H_{12}	$\frac{B}{D}$	$\frac{ A }{D}$
	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{11}}$	H_{21}	H_{22}	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
A	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{ Z }{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$-\frac{1}{Y_{21}}$	$\frac{ H }{H_{21}}$	$-\frac{H_{11}}{H_{21}}$	A	B
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{ Y }{Y_{21}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{H_{22}}{H_{21}}$	$-\frac{1}{H_{21}}$	C	D

§ 11.3. Определение коэффициентов четырехполюсника

Комплексные коэффициенты несимметричного пассивного четырехполюсника определяют опытным путем или расчетом, причем в последнем случае величины сопротивлений или проводимостей ветвей, составляющих четырехполюсники, и схема их соединений должны быть известны. Из выражений для коэффициентов A , B , C и D следует, что их значения получаются путем различного сочетания трех постоянных величин: Z_{11} (входного сопротивления со стороны зажимов $1-1'$ при разомкнутых зажимах $2-2'$); Z_{22} (входного сопротивления со стороны зажимов $2-2'$ при разомкнутых зажимах $1-1'$) и $Z_{12}=Z_{21}$ (взаимного сопротивления). Таким образом, для экспериментального определения этих коэффициентов достаточно иметь данные опытов, которые в той

или иной форме определяют комплексные величины Z_{11} , Z_{22} и $Z_{12} = Z_{21}$ или другие комплексные величины, через которые иско-
мые коэффициенты могут быть выражены (см. табл. 11.1).

Если одновременно можно измерить как первичные ($\dot{I}_1$ и $\dot{U}_1$), так и вторичные ($\dot{I}_2$ и $\dot{U}_2$) комплексные величины, то для опре-
деления коэффициентов A , B , C и D достаточно иметь данные
только двух опытов. Проще всего значения этих коэффициентов
вычисляются по данным опытов при $\dot{I}_2 = 0$ (выходные зажимы
разомкнуты) или $\dot{U}_2 = 0$ (выходные зажимы закорочены). При
разомкнутых выходных зажимах первичные напряжение и ток
определяются из уравнений $\dot{U}_{1p} = A\dot{U}_2$; $\dot{I}_{1p} = C\dot{U}_2$, откуда

$$A = \dot{U}_{1p}/\dot{U}_2; C = \dot{I}_{1p}/\dot{U}_2. \quad (11.13)$$

Входное сопротивление со стороны первичных зажимов при
разомкнутых вторичных

$$Z_{1p} = \dot{U}_{1p}/\dot{I}_{1p} = A/C. \quad (11.14)$$

При коротком замыкании на вторичных зажимах $\dot{U}_{1k} = B\dot{I}_2$;
 $\dot{I}_{1k} = D\dot{I}_2$, откуда

$$B = \dot{U}_{1k}/\dot{I}_2; D = \dot{I}_{1k}/\dot{I}_2. \quad (11.15)$$

Входное сопротивление со стороны первичных зажимов при
коротком замыкании вторичных

$$Z_{1k} = \dot{U}_{1k}/\dot{I}_{1k} = B/D. \quad (11.16)$$

Следовательно, измерив величины и фазы $\dot{U}_{1p}$, $\dot{I}_{1p}$ и $\dot{U}_2$ при
разомкнутых вторичных зажимах, а также $\dot{U}_{1k}$, $\dot{I}_{1k}$ и $\dot{I}_2$ при
коротком замыкании, можно определить все четыре коэффициента
четырёхполюсника.

Коэффициенты четырёхполюсника можно также найти экспе-
риментальным путем, измеряя в каждом опыте только первичные
или только вторичные ток и напряжение. В этом случае необхо-
димо иметь данные трех опытов, из которых два (описаны ранее)
проводят при питании четырёхполюсника со стороны первичных
зажимов и один — при питании со стороны вторичных или наобо-
рот. Наиболее простые выражения для коэффициентов A , B , C
и D получаются по данным опытов, в которых происходит раз-
мыкание и короткое замыкание на первичных зажимах при пита-
нии четырёхполюсника со стороны вторичных зажимов, и опыта,
в котором происходит размыкание вторичных зажимов четырёх-
полюсника при его питании со стороны первичных зажимов.

В случае питания четырёхполюсника со стороны вторичных
зажимов и при $\dot{U}_1 = 0$ из уравнений (11.12) находим:

$$\dot{U}_{2k} = B\dot{I}_1; \dot{I}_{2k} = A\dot{I}_1.$$

Входное сопротивление со стороны вторичных зажимов при
коротком замыкании первичных

$$Z_{2k} = \dot{U}_{2k}/\dot{I}_{2k} = B/A. \quad (11.17)$$

В случае питания четырехполюсника со стороны вторичных зажимов и при $I_1 = 0$ из уравнений (11.12) определяем:

$$\dot{U}_{2p} = D\dot{U}_1; I_{2p} = C\dot{U}_1.$$

Входное сопротивление со стороны вторичных зажимов при разомкнутых первичных

$$Z_{2p} = \dot{U}_{2p}/\dot{I}_{2p} = D/C. \quad (11.18)$$

Совместно решая уравнения (11.14), (11.17) и (11.18) с учетом (11.9), получаем

$$A = \sqrt{\frac{Z_{1p}}{Z_{2p} - Z_{2k}}}. \quad (11.19)$$

Определение коэффициента A по опытным данным приводит к двум его значениям*, что в свою очередь дает два значения каждого из остальных коэффициентов, так как они определяются через A по формулам

$$B = AZ_{2k}; C = A/Z_{1p}; D = A(Z_{2p}/Z_{1p}). \quad (11.20)$$

Полученная двузначность объясняется тем, что коэффициенты зависят не только от параметров схемы четырехполюсника, но и от выбора положительных направлений напряжений и токов относительно зажимов четырехполюсника. Однозначное определение коэффициентов возможно с помощью опыта, позволяющего определить сдвиг по фазе напряжения (тока) на входе четырехполюсника по отношению к напряжению (току) на выходе.

Изменение знаков при определении коэффициентов может привести к ошибочному определению фазы на угол π , что во многих случаях исследования четырехполюсников не имеет значения. Однако в ряде случаев неправильное определение фазы имеет существенное значение, как, например, при параллельном соединении четырехполюсников.

Необходимо отметить, как входные сопротивления Z_{1p} , Z_{1k} , Z_{2p} и Z_{2k} связаны между собой следующими соотношениями: $Z_{1k}/Z_{2k} = Z_{1p}/Z_{2p} = A/D$, причем для симметричного четырехполюсника эти отношения равны единице, так как $A = D$. Из уравнений (11.9) и (11.20) следует, что для определения коэффициентов симметричного четырехполюсника при $A = D$ достаточно иметь данные двух опытов, проведенных при размыкании и коротком замыкании любых зажимов.

§ 11.4. Эквивалентные схемы четырехполюсника

Пользуясь уравнениями четырехполюсника, можно получить различные эквивалентные схемы (схемы замещения), которые облегчают исследование основных свойств соответствующих цепей.

* При извлечении квадратного корня из комплексного числа получаются два комплекса, которые имеют одинаковый модуль и аргументы, отличающиеся на $\pm \pi$.

В случае, если для четырехполюсника с заданными первичными и вторичными зажимами не выполняется свойство взаимности, т. е., например, $Y_{12} \neq Y_{21}$ или $Z_{12} \neq Z_{21}$, общее число параметров, характеризующих такой четырехполюсник, равно четырем. Поэтому невзаимный четырехполюсник представляют в виде четырехэлементной эквивалентной Т- (рис. 11.4) или П-образной (рис. 11.5) схемы.

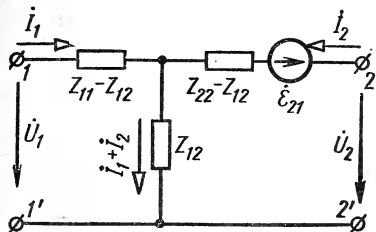


Рис. 11.4

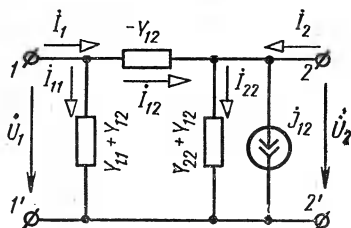


Рис. 11.5

Эквивалентную Т-образную схему можно получить путем преобразования, например, уравнений (11.1). Для этого к выражению, определяющему напряжение $\dot{U}_1$, прибавляют и вычитают из него слагаемое $Z_{12}\dot{I}_1$, а в уравнении для напряжения $\dot{U}_2$ прибавляют и вычитают слагаемые $Z_{12}\dot{I}_1$ и $Z_{12}\dot{I}_2$. В результате получается:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = (Z_{11} - Z_{12})\dot{I}_1 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2); \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = (Z_{22} - Z_{12})\dot{I}_2 + \\ &\quad + (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2). \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

Этим уравнениям соответствует эквивалентная схема на рис. 11.4, где $\dot{\epsilon}_{21} = (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1$ является активным параметром, зависящим от тока $\dot{I}_1$.

Аналогичным путем можно найти эквивалентную схему на рис. 11.5, удовлетворяющую уравнениям (11.3), которые после элементарных преобразований имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = (Y_{11} + Y_{12})\dot{U}_1 - \\ &\quad - (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)Y_{12} = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12}; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = (Y_{22} + Y_{12})\dot{U}_2 - Y_{12}(\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + \\ &\quad + (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{12} + \dot{J}_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

В схеме на рис. 11.5 источник тока с током $\dot{J}_{12} = (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1$ является активным параметром, зависящим от напряжения $\dot{U}_1$. Полученные эквивалентные схемы не являются единственными. Например, преобразованием уравнений (11.3) можно, аналогично предыдущему, получить соотношения для эквивалентной схемы с источником тока, зависящим от напряжения $\dot{U}_2$ и присоединенным к входным зажимам 1-1' четырехполюсника.

На рис. 11.6 изображена эквивалентная схема с двумя активными параметрами $\dot{\mathcal{E}}_{12} = Z_{12} \dot{I}_2$ и $\dot{\mathcal{E}}_{21} = Z_{21} \dot{I}_1$, которая непосредственно удовлетворяет уравнениям четырехполюсника (11.1) в форме Z , а на рис. 11.7 — эквивалентная схема с двумя активными параметрами $\dot{J}_{12} = Y_{12} \dot{U}_2$ и $\dot{J}_{21} = Y_{21} \dot{U}_1$, которая также непосредственно удовлетворяет уравнениям (11.3) в форме Y .

Эквивалентная схема, удовлетворяющая непосредственно уравнениям (11.5) в форме H , изображена на рис. 11.8.

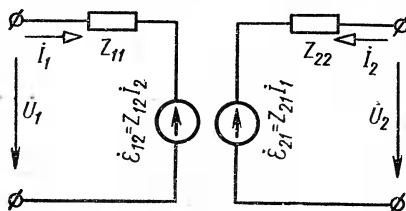


Рис. 11.6

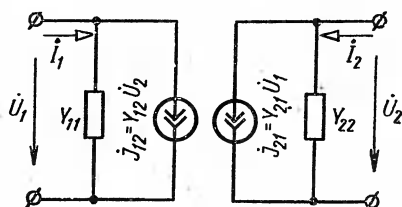


Рис. 11.7

Эквивалентные схемы невзаимных четырехполюсников применяются для анализа и расчета электрических цепей, содержащих электронные лампы и полупроводниковые элементы (транзисторы)*.

Для взаимных четырехполюсников эквивалентные схемы получаются более простыми, так как в каждой из них вследствие выполнения равенств $Z_{12} = Z_{21}$ и $Y_{12} = Y_{21}$ отсутствует четвертый невзаимный элемент. Эквивалентная Т-образная схема для пассивного взаимного четырехполюсника дана на рис. 11.9, а экви-

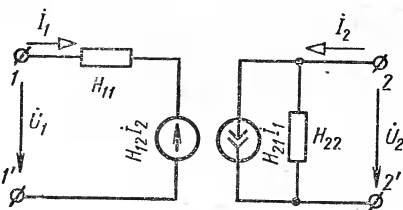


Рис. 11.8

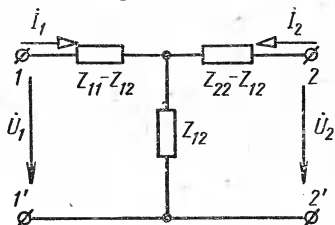


Рис. 11.9

валентная П-образная схема этого же четырехполюсника — на рис. 11.10. Каждая из этих схем характеризуется тремя независимыми параметрами. На рис. 11.11 приведена эквивалентная Т-образная схема, параметры которой выражены через коэффициенты четырехполюсника A , B , C и D . Изменение положительного направления тока $\dot{I}_2$ (показано пунктирной стрелкой) не влияет на параметры схемы, но меняет знак перед вторыми слагаемыми с током $\dot{I}_2$ в уравнениях (11.8).

* Основные уравнения для электронных ламп и транзисторов, представляющие собой уравнения четырехполюсника, рассмотрены в § 1.8.

Все четырехполюсники с взаимными параметрами, у которых не заданы парные зажимы для присоединения источника электрической энергии и приемника, характеризуются в общем случае шестью коэффициентами. Поэтому эквивалентные схемы для таких четырехполюсников содержат шесть элементов.

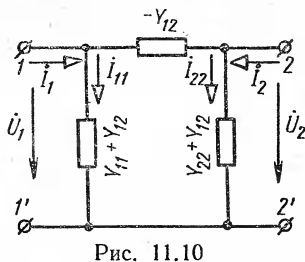


Рис. 11.10

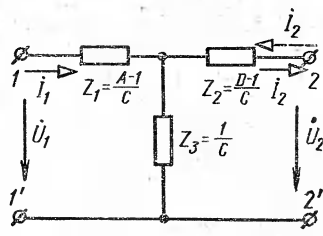


Рис. 11.11

Для иллюстрации этого положения из сложной схемы выделим некоторую ее часть, не содержащую источников э. д. с. или источников тока с числом полюсов, равным четырем. Каждый полюс можно характеризовать величинами тока и потенциала по отношению к некоторой произвольной, но общей для всех полюсов точке O (рис. 11.12, а). Не изменяя режима на зажимах и внутри пассивного четырехполюсника, рассматриваемую систему

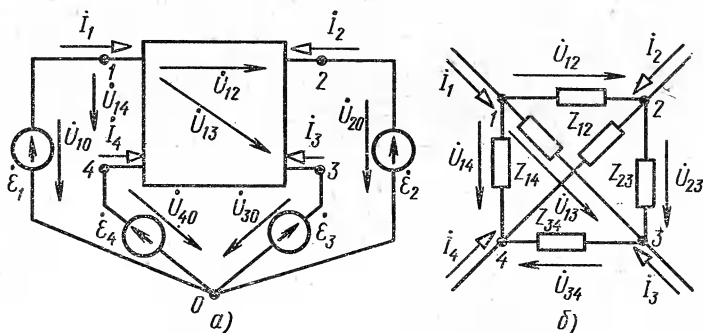


Рис. 11.12

можно дополнить до замкнутой, включив между каждым полюсом и общей точкой источник э. д. с., равной потенциалу соответствующего полюса.

В соответствии с принципом наложения выражения для токов четырехполюсника записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \dot{e}_1 Y_{11} - \dot{e}_2 Y_{12} - \dot{e}_3 Y_{13} - \dot{e}_4 Y_{14}; \\ i_2 &= -\dot{e}_1 Y_{21} + \dot{e}_2 Y_{22} - \dot{e}_3 Y_{23} - \dot{e}_4 Y_{24}; \\ i_3 &= -\dot{e}_1 Y_{31} - \dot{e}_2 Y_{32} + \dot{e}_3 Y_{33} - \dot{e}_4 Y_{34}; \\ i_4 &= -\dot{e}_1 Y_{41} - \dot{e}_2 Y_{42} - \dot{e}_3 Y_{43} + \dot{e}_4 Y_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

По второму закону Кирхгофа, в уравнениях (11.23) все э. д. с. можно заменить напряжениями между тем полюсом, для которого определяется ток, и остальными полюсами. Например, в выражении для тока $\dot{I}_1$ э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_1$, $\dot{\mathcal{E}}_2$, $\dot{\mathcal{E}}_3$ и $\dot{\mathcal{E}}_4$ заменяются на основании равенств

$$\dot{\mathcal{E}}_1 = \dot{U}_{10}; \quad \dot{\mathcal{E}}_2 = -\dot{U}_{12} + \dot{U}_{10}; \quad \dot{\mathcal{E}}_3 = -\dot{U}_{13} + \dot{U}_{10}; \quad \dot{\mathcal{E}}_4 = -\dot{U}_{14} + \dot{U}_{10}.$$

В результате получаем

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{10} (Y_{11} - Y_{12} - Y_{13} - Y_{14}) + \dot{U}_{12} Y_{12} + \dot{U}_{13} Y_{13} + \dot{U}_{14} Y_{14}. \quad (11.24)$$

Аналогично определяются:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{U}_{20} (Y_{22} - Y_{21} - Y_{23} - Y_{24}) + \\ &\quad + \dot{U}_{21} Y_{21} + \dot{U}_{23} Y_{23} + \dot{U}_{24} Y_{24}; \\ \dot{I}_3 &= \dot{U}_{30} (Y_{33} - Y_{31} - Y_{32} - Y_{34}) + \\ &\quad + \dot{U}_{31} Y_{31} + \dot{U}_{32} Y_{32} + \dot{U}_{34} Y_{34}; \\ \dot{I}_4 &= \dot{U}_{40} (Y_{44} - Y_{41} - Y_{42} - Y_{43}) + \\ &\quad + \dot{U}_{41} Y_{41} + \dot{U}_{42} Y_{42} + \dot{U}_{43} Y_{43}. \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

В уравнениях (11.24) и (11.25) напряжения между полюсами и взаимные проводимости связаны между собой равенствами

$$\dot{U}_{12} = -\dot{U}_{21}; \quad \dot{U}_{23} = -\dot{U}_{32} \text{ и т. д.}; \quad Y_{12} = Y_{21}; \quad Y_{23} = Y_{32} \text{ и т. д.}$$

Так как сумма токов $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0$ при любых значениях э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_1$, $\dot{\mathcal{E}}_2$, $\dot{\mathcal{E}}_3$ и $\dot{\mathcal{E}}_4$, то при суммировании уравнений (11.24) и (11.25) получается:

$$Y_{11} - Y_{12} - Y_{13} - Y_{14} = 0; \quad Y_{22} - Y_{21} - Y_{23} - Y_{24} = 0;$$

$$Y_{33} - Y_{31} - Y_{32} - Y_{34} = 0; \quad Y_{44} - Y_{41} - Y_{42} - Y_{43} = 0.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{U}_{12} Y_{12} + \dot{U}_{13} Y_{13} + \dot{U}_{14} Y_{14}; \\ \dot{I}_2 &= \dot{U}_{21} Y_{21} + \dot{U}_{23} Y_{23} + \dot{U}_{24} Y_{24}; \\ \dot{I}_3 &= \dot{U}_{31} Y_{31} + \dot{U}_{32} Y_{32} + \dot{U}_{34} Y_{34}; \\ \dot{I}_4 &= \dot{U}_{41} Y_{41} + \dot{U}_{42} Y_{42} + \dot{U}_{43} Y_{43}. \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

Полученным уравнениям удовлетворяет эквивалентная схема, имеющая вид полного четырехугольника с сопротивлениями ветвей, равными величинам, обратным проводимостям (рис. 11.12, б):

$$Z_{12} = 1/Y_{12}; \quad Z_{13} = 1/Y_{13}; \quad Z_{23} = 1/Y_{23} \text{ и т. д.}$$

Следовательно, такая схема справедлива для пассивного взаимного четырехполюсника. Аналогичным способом можно определить параметры эквивалентной схемы для пассивного взаимного многополюсника с числом полюсов, равным n . При этом общее число элементов (ветвей) схемы равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 11.5. Режим четырехполюсника при нагрузке

Из уравнения (11.8) следует, что напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ на первичных зажимах состоят из двух слагаемых, из которых одно пропорционально напряжению $\dot{U}_2$ при некоторой определенной нагрузке, а другое — току $\dot{I}_2$ при той же нагрузке.

Пусть заданы комплексные значения напряжения $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$. Если при разомкнутых вторичных зажимах $2-2'$ ($\dot{I}_2=0$) установить напряжение $\dot{U}_2$ равным напряжению при нагрузке, то напряжение и ток на входных зажимах $\dot{U}_{1p}=A\dot{U}_2$; $\dot{I}_{1p}=C\dot{U}_2$.

Если при коротком замыкании на вторичных зажимах ($\dot{U}_2=0$) установить ток $\dot{I}_2$, равный току при нагрузке, то напряжение и ток на первичных зажимах $\dot{U}_{1к}=B\dot{I}_2$; $\dot{I}_{1к}=D\dot{I}_2$. Следовательно, напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ при нагрузке равны суммам соответственно напряжений и токов при разомкнутых и замкнутых выходных зажимах.

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_{1p} + \dot{U}_{1к}; \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_{1p} + \dot{I}_{1к}. \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

Полученные уравнения выражают принцип наложения. Иначе говоря, для того чтобы получить на вторичных зажимах четырехполюсника напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$, необходимо установить на первичных зажимах напряжение $\dot{U}_{1p}$ и ток $\dot{I}_{1p}$, пропорциональные $\dot{U}_2$, а также напряжение $\dot{U}_{1к}$ и ток $\dot{I}_{1к}$, пропорциональные току $\dot{I}_2$.

Для характеристики рабочего режима четырехполюсника пользуются понятием входного сопротивления со стороны зажимов $1-1'$ при сопротивлении нагрузки Z_2 (см. рис. 11.2) и понятием входного сопротивления со стороны выходных зажимов $2-2'$ при сопротивлении нагрузки Z_1 (см. рис. 11.3). Для определения входного сопротивления схемы на рис. 11.2 достаточно разделить первое из уравнений (11.8) на второе:

$$Z_{1\text{ вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D}. \quad (11.28)$$

Аналогично, при обратной передаче на основании уравнений (11.12) получается

$$Z_{2\text{ вх}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1}{C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1} = \frac{DZ_1 + B}{CZ_1 + A}. \quad (11.29)$$

На практике часто используют и другие выражения для $Z_{1\text{ вх}}$ и $Z_{2\text{ вх}}$. Например, коэффициенты четырехполюсника A , B , C и D в уравнениях (11.28) и (11.29) можно заменить сопротивлениями четырехполюсника при разомкнутых и коротко замкнутых зажимах при прямом и обратном питании:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1\text{ вх}} &= \frac{A}{C} \left[\frac{(B/A) + Z_2}{(D/C) + Z_2} \right] = Z_{1p} \frac{Z_{2к} + Z_2}{Z_{2p} + Z_2}; \\ Z_{2\text{ вх}} &= \frac{D}{C} \left[\frac{(B/D) + Z_1}{(A/C) + Z_1} \right] = Z_{2p} \frac{Z_{1к} + Z_1}{Z_{1p} + Z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.30)$$

Полученные выражения показывают, что четырехполюсники могут быть применены для преобразования сопротивлений.

§ 11.6. Основные уравнения и эквивалентные схемы активного четырехполюсника

На рис 11.13 изображен активный четырехполюсник (четырёхполюсник, содержащий независимые источники энергии)*, к входным зажимам которого присоединен источник э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_1$, а к выходным — сопротивление нагрузки Z_2 .

Пользуясь теоремой о компенсации, напряжение на сопротивлении Z_2 можно заменить источником э. д. с. с э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_2 =$

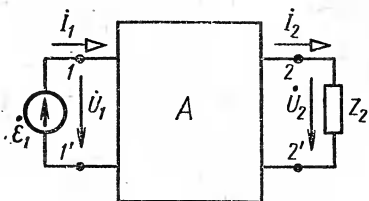


Рис. 11.13

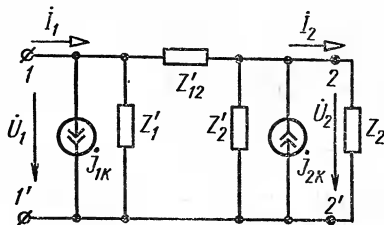


Рис. 11.14

$= Z_2 I_2$, направленной навстречу току I_2 . По принципу наложения выражение для токов I_1 и I_2 можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{\mathcal{E}}_1 Y_{11} - \dot{\mathcal{E}}_2 Y_{12} + \dot{\mathcal{E}}_3 Y_{13} + \dot{\mathcal{E}}_4 Y_{14} + \dots; \\ \dot{I}_2 &= \dot{\mathcal{E}}_1 Y_{21} - \dot{\mathcal{E}}_2 Y_{22} + \dot{\mathcal{E}}_3 Y_{23} + \dot{\mathcal{E}}_4 Y_{24} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

где $\dot{\mathcal{E}}_3$, $\dot{\mathcal{E}}_4$ и т. д. — э. д. с., находящиеся внутри четырехполюсника. Если в этих уравнениях э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_1$ и $\dot{\mathcal{E}}_2$ заменить соответствующими напряжениями, а составляющие токов, вызываемые остальными э. д. с. ($\dot{\mathcal{E}}_3$, $\dot{\mathcal{E}}_4$ и т. д.), обозначить через

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{1a} &= \dot{\mathcal{E}}_3 Y_{13} + \dot{\mathcal{E}}_4 Y_{14} + \dots; \\ \dot{I}_{2a} &= \dot{\mathcal{E}}_3 Y_{23} + \dot{\mathcal{E}}_4 Y_{24} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

то получают следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 - Y_{12} \dot{U}_2 + \dot{I}_{1a}; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 - Y_{22} \dot{U}_2 + \dot{I}_{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

Из этих уравнений следует, что при напряжениях $\dot{U}_1 = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$ токи короткого замыкания $\dot{J}_{1K} = \dot{I}_{1a}$ и $\dot{J}_{2K} = \dot{I}_{2a}$. В отличие

* Четырёхполюсники с зависимыми источниками энергии здесь не рассматриваются.

от режимов пассивного четырехполюсника токи $\dot{J}_{1к}$ и $\dot{J}_{2к}$ определяются при одновременном коротком замыкании первичных и вторичных зажимов активного четырехполюсника. В результате совместного решения уравнений (11.33) относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ получаются следующие уравнения четырехполюсника в форме А:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}} (\dot{I}_2 - \dot{J}_{2к}); \\ \dot{I}_1 &= \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} (\dot{I}_2 - \dot{J}_{2к}) + \dot{J}_{1к} \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B(\dot{I}_2 - \dot{J}_{2к}); \\ \dot{I}_1 - \dot{J}_{1к} &= C\dot{U}_2 + D(\dot{I}_2 - \dot{J}_{2к}), \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

где A , B , C и D — коэффициенты четырехполюсника, удовлетворяющие (как и для пассивного взаимного четырехполюсника) условию $AD - BC = 1$.

Из уравнений (11.34) следует, что любой активный четырехполюсник с заданными первичными и вторичными зажимами характеризуется пятью независимыми параметрами (три пассивными — коэффициентами A , B , C или D и двумя активными —

токами $\dot{J}_{1к}$, $\dot{J}_{2к}$), поэтому его можно представить в виде пятиэлементной эквивалентной схемы. Для определения параметров, например, П-образной схемы можно воспользоваться уравнениями (11.33), из которых определяем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= (Y_{11} - Y_{12}) \dot{U}_1 + Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + \dot{J}_{1к}; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) - (Y_{22} - Y_{21}) \dot{U}_2 + \dot{J}_{2к}. \end{aligned} \right\} \quad (11.35)$$

Полученным уравнениям удовлетворяет эквивалентная схема на рис. 11.14. Источники энергии, находящиеся внутри четырехполюсника, представлены на схеме источниками тока $\dot{J}_{1к}$ и $\dot{J}_{2к}$. На Т-образной схеме эти источники можно также представить с помощью источников с э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_{1р}$ и $\dot{\mathcal{E}}_{2р}$ (рис. 11.15), определяемыми при одновременном размыкании ветвей, присоединенных к первичным и вторичным зажимам активного четырехполюсника. —

С помощью уравнений (11.34) можно установить связь между э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_{1р}$ и $\dot{\mathcal{E}}_{2р}$ и токами $\dot{J}_{1к}$ и $\dot{J}_{2к}$ при условии, что при одновременном размыкании первичных и вторичных зажимов $\dot{I}_1 = 0$ и $\dot{I}_2 = 0$, т. е.

$$\dot{U}_{1р} = A\dot{U}_{2р} - B\dot{J}_{2к}; \quad -\dot{J}_{1к} = C\dot{U}_{2р} - D\dot{J}_{2к}.$$

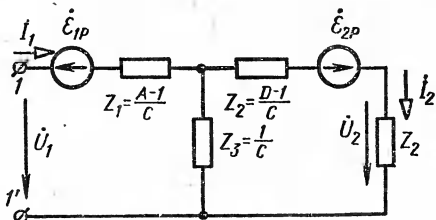


Рис. 11.15

Из этих уравнений и схемы на рис. 11.15 следует:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_{1p} = \dot{U}_{1p} &= \frac{1}{C} j_{2k} - \frac{A}{C} j_{1k}; \\ \dot{\mathcal{E}}_{2p} = \dot{U}_{2p} &= \frac{D}{C} j_{2k} - \frac{1}{C} j_{1k}. \end{aligned} \right\} \quad (11.36)$$

Пассивная часть схемы на рис. 11.16 получается из схемы на рис. 11.14 по известным формулам преобразования треугольника в звезду. Кроме того, эквивалентную схему на рис. 11.15 можно

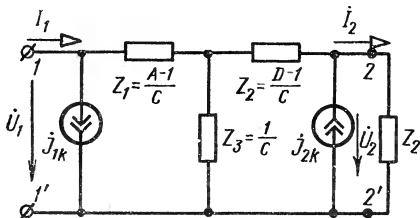


Рис. 11.16

получить из схемы на рис. 11.16 с помощью замены источников тока j_{1k} и j_{2k} источниками э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_{1p}$ и $\dot{\mathcal{E}}_{2p}$. Коэффициенты активного четырехполюсника и параметры пассивных частей эквивалентных схем не зависят от величин э. д. с. источников энергии и равны соответствующим коэффициентам и параметрам

пассивного четырехполюсника. При этом должны учитываться внутренние сопротивления источников энергии. Вместе с этим активные параметры эквивалентных схем j_{1k} , j_{2k} , $\dot{\mathcal{E}}_{1p}$ и $\dot{\mathcal{E}}_{2p}$ зависят как от активных, так и от пассивных элементов заданного четырехполюсника.

§ 11.7. Характеристическое сопротивление и коэффициент передачи четырехполюсника

Для исследования и расчета цепочечных схем, представляющих собой каскадное соединение одинаковых четырехполюсников, применяют характеристические параметры.

Х а р а к т е р и с т и ч е с к и м (повторным) сопротивлением называют такое сопротивление Z_c , которое, будучи присоединенным к выходным зажимам симметричного четырехполюсника, обуславливает его входное сопротивление, также равное Z_c .

Установим связь между характеристическим сопротивлением и коэффициентами симметричного четырехполюсника A , B , C и D . Учитывая, что $Z_c = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$, уравнения четырехполюсника запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_2 \left(A + \frac{B}{Z_c} \right) &= \dot{I}_2 (AZ_c + B); \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2 = \dot{I}_2 (CZ_c + A), \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

откуда

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_c = \frac{AZ_c + B}{CZ_c + A}$$

или

$$Z_c = \sqrt{B/C}. \quad (11.38)$$

В том случае, когда сопротивление нагрузки равно характеристическому (такая нагрузка называется согласованной с четырехполюсником), легко установить соотношения между входными и выходными напряжениями и токами. Действительно, из (11.37) и (11.38)

$$\dot{U}_1/\dot{U}_2 = \dot{I}_1/\dot{I}_2 = A + \sqrt{BC}, \quad (11.39)$$

т. е. отношение напряжений или токов равно (в общем случае) комплексному числу, модуль которого показывает, во сколько раз уменьшились выходные величины по сравнению с входными, а аргумент — на сколько они сдвинулись по фазе. Такое комплексное число представим в виде

$$A + \sqrt{BC} = e^a e^{jb} = e^{a+jb} = e^g, \quad (11.40)$$

где $g = a + jb = \ln(A + \sqrt{BC})$ — коэффициент передачи (постоянная передачи); a — коэффициент затухания (в неперах — Нп), b — коэффициент фазы (рад). Таким образом, при согласованной нагрузке

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^g; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^g.$$

Если же нагрузка произвольная, то исходные уравнения симметричного четырехполюсника применяются в виде (11.37), в которых $A = D$.

При этом коэффициенты выражаются через новые параметры Z_c и g . Из уравнения (11.40) и соотношения $A^2 - BC = 1 = (A + \sqrt{BC})(A - \sqrt{BC})$ следует, что

$$A - \sqrt{BC} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}} = e^{-g},$$

откуда с учетом выражения (11.40) получаем:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{e^g + e^{-g}}{2} = \operatorname{ch} g; \\ \sqrt{BC} &= \frac{e^g - e^{-g}}{2} = \operatorname{sh} g. \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

С помощью (11.38) находим:

$$B = Z_c \operatorname{sh} g; \quad C = \operatorname{sh} g / Z_c. \quad (11.42)$$

Если подставить найденные выражения в уравнения (11.37), то

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} g; \\ \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} g}{Z_c} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} g. \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

Характеристическое сопротивление и коэффициент передачи могут быть вычислены непосредственно по комплексам Z_p и Z_k , найденным из опытов при размыкании и замыкании соответствующих зажимов четырехполюсника.

Из уравнений (11.43) при $I_2 = 0$

$$Z_p = \dot{U}_{1p} / \dot{I}_{1p} = Z_c / \operatorname{th} g;$$

при $\dot{U}_2 = 0$

$$Z_k = \dot{U}_{1k} / \dot{I}_{1k} = Z_c \operatorname{th} g,$$

откуда

$$Z_c = \sqrt{Z_k Z_p}; \quad \operatorname{th} g = \sqrt{Z_k / Z_p}. \quad (11.44)$$

Уравнения, аналогичные (11.43), можно получить и для несимметричного взаимного четырехполюсника. С этой целью следует выполнить условия согласования как при прямом (см. рис. 11.2), так и при обратном питании (см. рис. 11.3) четырехполюсника. Иначе говоря, сопротивление $Z_{1вх}$ четырехполюсника со стороны первичных зажимов, нагруженного на сопротивление $Z_2 = Z_{2c}$, должно быть равно Z_{1c} (рис. 11.17), а сопротивление $Z_{2вх}$ четырех-

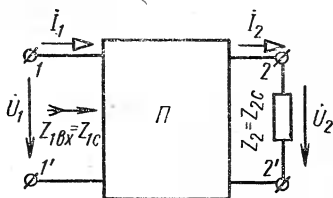


Рис. 11.17

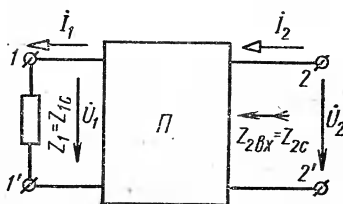


Рис. 11.18

полюсника со стороны вторичных зажимов, нагруженного на сопротивление $Z_1 = Z_{1c}$ (рис. 11.18), равно Z_{2c} . Сопротивления Z_{1c} и Z_{2c} называют характеристическими сопротивлениями несимметричного четырехполюсника.

Указанные условия для нагрузки четырехполюсника называют условиями согласованной нагрузки.

Если в уравнениях (11.28) и (11.29) учесть, что $Z_{1вх} = Z_1 = Z_{1c}$ и $Z_{2вх} = Z_2 = Z_{2c}$, то

$$Z_{1c} = \frac{AZ_{2c} + B}{CZ_{2c} + D}; \quad Z_{2c} = \frac{DZ_{1c} + B}{CZ_{1c} + A}. \quad (11.45)$$

Совместное решение этих уравнений дает возможность выразить Z_{1c} и Z_{2c} через коэффициенты четырехполюсника A , B , C и D :

$$Z_{1c} = \sqrt{AB/CD}; \quad Z_{2c} = \sqrt{DB/CA}. \quad (11.46)$$

Поскольку Z_{1c} и Z_{2c} в общем случае комплексные величины, то для несимметричного четырехполюсника справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{ch} g = \sqrt{AD}; \quad \operatorname{sh} g = \sqrt{BC}. \quad (11.47)$$

Так как для взаимного четырехполюсника справедливо равенство (11.9), то выражения (11.47) как бы дополняют это условие

в виде равенства $\operatorname{ch}^2 g - \operatorname{sh}^2 g = 1$. В уравнениях (11.47) параметр $g = a + jb$ и его составляющие имеют аналогичный смысл, как и для симметричного четырехполосника; при этом g также называется постоянной передачи четырехполосника.

Пользуясь уравнениями (11.47), а также соотношениями

$$\sqrt{Z_{1c}/Z_{2c}} = \sqrt{A/D}; \quad (11.48)$$

$$\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} = \sqrt{B/C}, \quad (11.49)$$

определяют коэффициенты четырехполосника:

$$A = \sqrt{Z_{1c}/Z_{2c}} \operatorname{ch} g; \quad B = \sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} \operatorname{sh} g; \quad (11.50)$$

$$C = \frac{\operatorname{sh} g}{\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}}}; \quad D = \sqrt{Z_{2c}/Z_{1c}} \operatorname{ch} g. \quad (11.51)$$

После подстановки значений коэффициентов четырехполосника в уравнения (11.8) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{Z_{1c}/Z_{2c}} (\dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_{2c} \dot{I}_2 \operatorname{sh} g); \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{Z_{2c}/Z_{1c}} \left(\dot{I}_2 \operatorname{ch} g + \frac{1}{Z_{2c}} \dot{U}_2 \operatorname{sh} g \right). \end{aligned} \quad (11.52)$$

Эти уравнения непосредственно переходят в (11.43) для симметричного четырехполосника, у которого $Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c$.

При согласованной нагрузке ($Z_2 = Z_{2c}$) справедливо следующее равенство:

$$Z_{2c} \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \quad \text{или} \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_{2c}.$$

С учетом этих выражений уравнения (11.52) приобретают следующий вид:

$$\dot{U}_1 = \sqrt{Z_{1c}/Z_{2c}} \dot{U}_2 e^g; \quad \dot{I}_1 = \sqrt{Z_{2c}/Z_{1c}} \dot{I}_2 e^g. \quad (11.53)$$

Из выражений (11.53) связь между модулями амплитуд или модулями действующих значений напряжений $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ определяют в виде

$$U_1 = \sqrt{z_{1c}/z_{2c}} U_2 e^a; \quad I_1 = \sqrt{z_{2c}/z_{1c}} I_2 e^a. \quad (11.54)$$

Таким образом, отношение модулей амплитуд или действующих значений напряжений U_1/U_2 равно $\sqrt{z_{1c}/z_{2c}} e^a$, а отношение модулей амплитуд или действующих значений токов I_1/I_2 равно $\sqrt{z_{2c}/z_{1c}} e^a$.

Характеристические параметры несимметричного взаимного четырехполосника Z_{1c} , Z_{2c} и g можно выразить через его параметры при размыкании и замыкании соответствующих зажимов:

$$\begin{aligned} Z_{1c} &= \sqrt{Z_{1p}Z_{1k}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{Z_{2p}Z_{2k}}; \\ \operatorname{th} g &= \sqrt{Z_{1k}/Z_{1p}} = \sqrt{Z_{2k}/Z_{2p}}. \end{aligned} \quad (11.55)$$

Для симметричного четырехполосника при согласованной нагрузке $Z_c \dot{I}_2 = \dot{U}_2$

$$(\dot{U}_1/\dot{U}_2)_{Z_2=Z_c} = (\dot{I}_1/\dot{I}_2)_{Z_2=Z_c} = e^g = e^a e^{jb},$$

откуда коэффициент затухания

$$\alpha = \ln (U_1/U_2)_{Z_c} = Z_c = \ln (I_1/I_2)_{Z_c} = Z_c.$$

Таким образом, затуханию в 1 Нп соответствует уменьшение амплитуды и действующего значения напряжения (тока) в $e = 2,718$ раза (при $\ln U_1/U_2 = 1$ $U_1/U_2 = 2,718$) *.

Пример 11.1. Вычислить характеристическое сопротивление Z_c и коэффициент передачи g симметричного четырехполюсника, у которого $A=0,5$; $C = j0,02$ См.

Решение. Третий коэффициент четырехполюсника

$$B = \frac{A^2 - 1}{C} = j37,5 \text{ Ом.}$$

Характеристическое сопротивление

$$Z_c = \sqrt{B/C} = 43,25 \text{ Ом.}$$

Коэффициент передачи

$$g = a + jb = \ln (A + \sqrt{BC}) = \ln (0,5 + j0,865) = \ln 1e^{j\frac{\pi}{3}} = j\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, $a=0$; $b=\pi/3$ рад.

Пример 11.2. Определить характеристическое сопротивление Z_c и коэффициент передачи четырехполюсника g , если $Z_p = 747e^{-j27^\circ 41'}$; $Z_k = 516e^{j0^\circ 35'}$.

Решение. Согласно формулам (11.44),

$$Z_c = \sqrt{Z_p Z_k} = 621e^{-j13^\circ 53'};$$

$$\operatorname{th} g = \sqrt{Z_k/Z_p} = 0,84e^{j14^\circ 08'} = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}} = \frac{e^{2g} - 1}{e^{2g} + 1},$$

откуда

$$e^{2g} = \frac{1 + \operatorname{th} g}{1 - \operatorname{th} g} = \frac{1 + 0,84e^{j14^\circ 08'}}{1 - 0,84e^{j14^\circ 08'}};$$

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,84e^{j14^\circ 08'}}{1 - 0,84e^{j14^\circ 08'}} = 0,92 + j3,6.$$

Таким образом, $a=0,92$ Нп; $b=3,6$ рад.

§ 11.8. Графы четырехполюсников и их простейшие соединения

Уравнения четырехполюсника можно представить в виде графа. На рис. 11.19 изображен граф, соответствующий уравнениям (11.8), записанным в форме **A**, на котором незачерненными кружочками отмечены истоки, соответствующие переменным $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$,

* В радиотехнике затухание чаще всего вычисляют в белах (Б) или децибелах (дБ).

Децибел представляет собой единицу затухания, в десять раз меньшую бела. Для перехода от неперов к белах или децибелам можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$a_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg e^{a_{\text{Нп}}} = 20 a_{\text{Нп}} \lg e = 20 \cdot 0,4343 a_{\text{Нп}} = 8,686 a_{\text{Нп}}.$$

а зачерненными кружочками (точками) отмечены стоки $\dot{U}_1, \dot{I}_1$. Н рис. 11.20 и 11.21 изображены графы, соответствующие уравнениям (11.1) и (11.3), где незачерненными узлами (кружочками) отмечены истоки с переменными $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ (рис. 11.21) и $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ (рис. 11.20), зачерненными кружочками — стоки, соответствующие

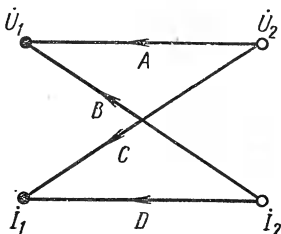


Рис. 11.19

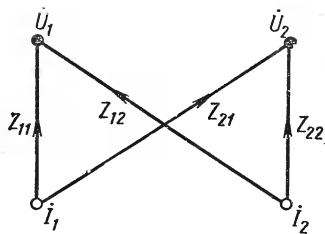


Рис. 11.20

переменным $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ (рис. 11.21) и $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ (рис. 11.20). На рис. 11.22 показан граф, соответствующий уравнениям (11.5). Графы четырехполюсников удобно применять для определения параметров результирующих схем, полученных путем соединения нескольких четырехполюсников.

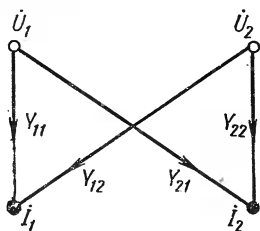


Рис. 11.21

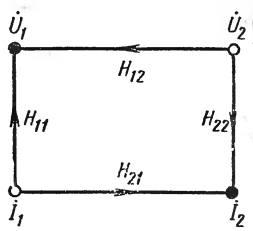


Рис. 11.22

На рис. 11.23, а дана схема каскадного соединения двух четырехполюсников с заданными параметрами, а на рис. 11.23, б изображен граф. Для каждого четырехполюсника справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_1 \dot{U}' + B_1 \dot{I}'; & \dot{U}' &= A_2 \dot{U}_2 + B_2 \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C_1 \dot{U}' + D_1 \dot{I}'; & \dot{I}' &= C_2 \dot{U}_2 + D_2 \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Для получения уравнений связи между входными величинами первого четырехполюсника и входными величинами второго можно воспользоваться графом на рис. 11.23, б, из которого следует:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= (A_1 A_2 + B_1 C_2) \dot{U}_2 + (A_1 B_2 + B_1 D_2) \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= (C_1 A_2 + D_1 C_2) \dot{U}_2 + (D_1 D_2 + C_1 B_2) \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.56)$$

Значения коэффициентов A, B, C и D , полученные при суммировании произведений соответствующих передач путей между истоками и стоками каскадного соединения графов, указаны на графе эквивалентной схемы (рис. 11.23, в).

Для определения параметров эквивалентного четырехполюсника, составленного из двух параллельно соединенных четырехполюсников (рис. 11.24, а), используем графы, построенные по уравнениям, соответствующим форме Y (рис. 11.24, б). Из этого графа находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= (Y_{11}^a + Y_{11}^b) \dot{U}_1 + (Y_{12}^a + Y_{12}^b) \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= (Y_{21}^a + Y_{21}^b) \dot{U}_1 + (Y_{22}^a + Y_{22}^b) \dot{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.57)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

где $Y_{11} = Y_{11}^a + Y_{11}^b$; $Y_{22} = Y_{22}^a + Y_{22}^b$; $Y_{12} = Y_{12}^a + Y_{12}^b$; $Y_{21} = Y_{21}^a + Y_{21}^b$ (рис. 11.25, в).

Для определения параметров эквивалентного четырехполюсника, составленного из двух последовательно соединенных четы-

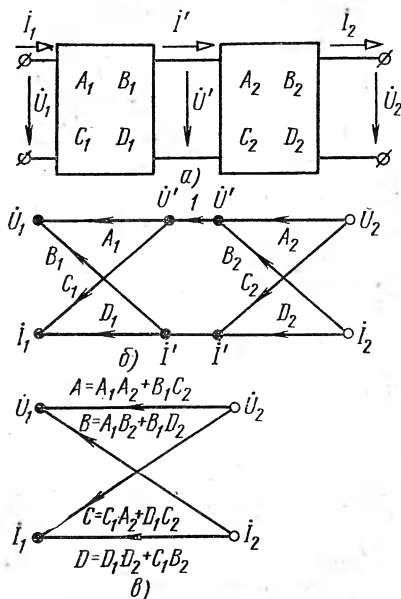


Рис. 11.23

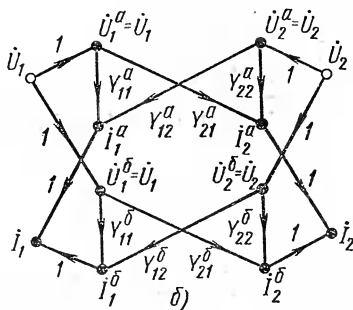
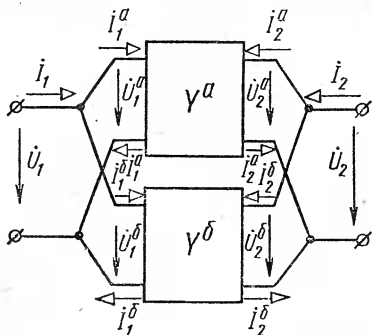


Рис. 11.24

рехполюсников (рис. 11.25, а) по уравнениям, соответствующим форме Z , построен граф (рис. 11.25, б). Из этого графа получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_1^a + \dot{U}_1^b = (Z_{11}^a + Z_{11}^b) \dot{I}_1 + (Z_{12}^a + Z_{12}^b) \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_2^a + \dot{U}_2^b = (Z_{21}^a + Z_{21}^b) \dot{I}_1 + (Z_{22}^a + Z_{22}^b) \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.59)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.60)$$

где $Z_{11} = Z_{11}^a + Z_{11}^b$; $Z_{22} = Z_{22}^a + Z_{22}^b$; $Z_{12} = Z_{12}^a + Z_{12}^b$; $Z_{21} = Z_{21}^a + Z_{21}^b$.
Уравнениям (11.60) соответствует граф на рис. 11.20, в котором передачи ветвей определяются из уравнений (11.59).

Параметры эквивалентных четырехполюсников, полученных при различных соединениях составных четырехполюсников, можно легко определить с помощью матричных форм записи уравнений. Так, например, для каскадного соединения двух четырехполюсников матрица параметров эквивалентного четырехполюсника равна произведению матриц отдельных четырехполюсников:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} AB \\ CD \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1B_1 \\ C_1D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2B_2 \\ C_2D_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (A_1A_2 + B_1C_2) & (A_1B_2 + B_1D_2) \\ (C_1A_2 + D_1C_2) & (C_1B_2 + D_1D_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.61)$$

Из этого уравнения непосредственно получаются выражения (11.56). Матрица коэффициентов эквивалентного четырехполюсника, полученного в результате каскадного соединения трех и более четырехполюсников, может быть найдена при перемножении трех и более матриц, записанных в том же порядке, в каком четырехполюсники соединены в схеме (умножение матриц не подчиняется переместительному закону).

При параллельном соединении двух четырехполюсников матрицу коэффициентов эквивалентного четырехполюсника определяют путем суммирования матриц проводимостей, а при последовательном — путем суммирования матриц сопротивлений каждого четырехполюсника. При этом правила суммирования матриц применимы при регулярных соединениях четырехполюсников, т. е. при равенстве токов каждой пары зажимов после соединения четырехполюсников как со стороны входа, так и со стороны выхода каждого составного четырехполюсника (см. рис. 11.24, а и 11.25, а).

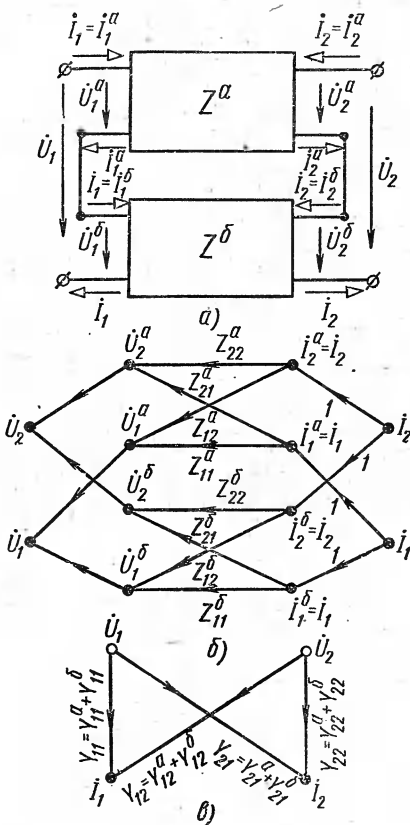


Рис. 11.25

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 12.1. Симметричная однородная цепочечная схема

Электромагнитные процессы, протекающие в устройствах, которые состоят из конечного большого числа однородных элементов, соединенных между собой (гирлянды изоляторов, обмотки электрических машин и трансформаторов, модели линий передач и т. п.), можно с некоторым приближением исследовать с помощью цепочечных схем.

Симметричная однородная цепочечная схема (рис. 12.1) состоит из каскадно соединенных одинаковых симметричных четырехполюсников, называемых звеньями схемы. Всю схему можно рассматривать как один симметричный четырехполюсник, характеристическое сопротивление

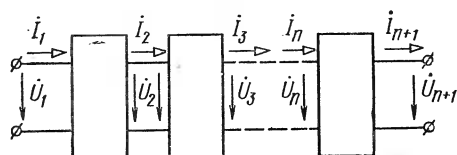


Рис. 12.1

и коэффициент передачи которого определяют по известным параметрам g отдельного звена.

Пусть выходные зажимы последнего звена замкнуты на сопротивление, равное Z_c .

Входное сопротивление этого звена также равно Z_c . Следовательно, это звено является согласованной нагрузкой для предпоследнего звена. Очевидно, что любое звено, вплоть до первого, оказывается нагруженным на сопротивление, равное Z_c . Таким образом, характеристические сопротивления цепочечной схемы и каждого его звена одинаковы и равны Z_c .

Комплексное напряжение (ток) на входе отличается от комплексного напряжения (тока) на выходе этого звена в e^g раз. В схеме с n звеньями напряжение (ток) на входе первого звена отличается от напряжения (тока) на выходе последнего звена в $(e^g)^n = e^{ng}$ раз:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{n+1} e^{ng}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_{n+1} e^{ng}. \quad (12.1)$$

Таким образом, коэффициент передачи всей цепочечной схемы $ng = na + jnb$, т. е. чем больше звеньев в схеме, тем больше коэффициенты затухания и фазы этой схемы.

При несогласованной нагрузке связь между напряжениями и токами на входе и выходе всей схемы (всего эквивалентного четырехполюсника) выражается в соответствии с формулами (11.43) следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch} ng + Z_c \dot{I}_{n+1} \operatorname{sh} ng; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} ng + \dot{U}_{n+1} \frac{\operatorname{sh} ng}{Z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Напряжение и ток на входе $(k+1)$ -го (от начала цепочки) звена определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{k+1} &= \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch} (n-k) g + Z_c \dot{I}_{n+1} \operatorname{sh} (n-k) g; \\ \dot{I}_{k+1} &= \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} (n-k) g + \dot{U}_{n+1} \frac{\operatorname{sh} (n-k) g}{Z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

§ 12.2. Основные уравнения для цепей с распределенными параметрами

В цепях малой пространственной протяженности наличие сдвига фаз между токами и напряжениями на разных участках цепи обусловлено действием э. д. с. самоиндукции, э. д. с. взаимной индукции и емкостных токов, имеющих сдвиг по фазе относительно соответствующих токов и напряжений. В однородных цепях большой пространственной протяженности, например, линиях электропередач, сдвиг токов и напряжений по фазе, а также их изменение во времени и вдоль цепи можно рассматривать как результат волнового электромагнитного процесса в пространстве, окружающем цепь.

Пусть известны параметры однородной цепи (линии), отнесенные к единице ее длины (рис. 12.2): r_0 — сопротивление прямого и обратного проводов; L_0 — индуктивность петли, образуемой прямым и обратным проводами; g_0 — проводимость утечки между проводами; C_0 — емкость двух проводов линии. При этом сопротивление $r_0 dx$ и индуктивность $L_0 dx$ считаются включенными в один провод, а расстояние x отсчитывается от начала линии до ее элемента dx .

Если обозначить мгновенные значения напряжения и тока в начале рассматриваемого элемента линии dx соответственно через u и i , а в начале следующего элемента — через $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$, выбрав положительные направления тока и напряжения так, как показано на рис. 12.2, то на основании законов Кирхгофа для элемента линии длиной dx можно записать следующие уравнения:

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t};$$

$$\left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) g_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - i = 0.$$

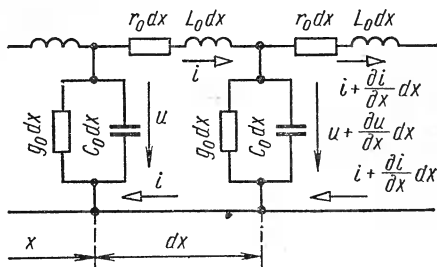


Рис. 12.2

Отсюда, пренебрегая величинами второго порядка малости, легко получить:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

При синусоидальном напряжении источника питания линии с однородными постоянными параметрами (не зависящими от тока и напряжения) ток и напряжение в любой ее точке при установившемся режиме, так же как и в линейных цепях с сосредоточенными параметрами, синусоидальны. Поэтому уравнения (12.4) можно переписать в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} -d\dot{U}/dx &= (r_0 + j\omega L_0) \dot{I} = Z_0 \dot{I}; \\ -d\dot{I}/dx &= (g_0 + j\omega C_0) \dot{U} = Y_0 \dot{U}, \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

где $Z_0 = r_0 + j\omega L_0$ — комплекс продольного сопротивления на единицу длины линии; $Y_0 = g_0 + j\omega C_0$ — комплекс поперечной проводимости на единицу длины линии, причем $Z_0 \neq 1/Y_0$.

После дифференцирования этих уравнений и замены $d\dot{U}/dx$ и $d\dot{I}/dx$ в соответствии с выражениями (12.5) получаются следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} &= Z_0 Y_0 \dot{U} = \gamma^2 \dot{U}; \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} &= Y_0 Z_0 \dot{I} = \gamma^2 \dot{I}, \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

где $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)}$ — коэффициент (постоянная) распространения; α — коэффициент (постоянная) затухания; β — коэффициент (постоянная) сдвига фаз. Из этих уравнений следует, что изменения комплексных значений напряжения и тока вдоль линии (в зависимости от координаты x) одинаковы. Поэтому сначала следует найти закон изменения одной из этих величин, например напряжения $\dot{U}$, после чего легко определить закон изменения другой величины $\dot{I}$ с помощью первого из уравнений (12.5).

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка (12.6) относительно напряжения имеет вид

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (12.7)$$

где $\dot{U}$ — комплексное значение напряжения на расстоянии x от начала линии; $-\gamma$ и γ — корни характеристического уравнения $p^2 - \gamma^2 = 0$; $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ — постоянные интегрирования.

Комплексное выражение для тока $\dot{I}$ определяем из первого уравнения (12.5):

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z_c} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}), \quad (12.8)$$

где $Z_c = \sqrt{Z_0/Y_0}$ — характеристическое (волновое) сопротивление.

Если начало координат поместить в конце линии (рис. 12.3), то дифференциальные уравнения в частных производных имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

При синусоидальном напряжении источника питания однородной линии и постоянных параметрах уравнения (12.9) можно записать в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{U}}{dx} &= (r_0 + j\omega L_0) \dot{I}; \\ \frac{d\dot{I}}{dx} &= (g_0 + j\omega C_0) \dot{U}. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

При сравнении (12.5) и (12.10) видно, что эти уравнения отличаются только знаками, поскольку при увеличении координаты x от конца линии (от нагрузки) к ее началу для выбранных положительных направлений тока и напряжения приращения этих величин положительны.

После дифференцирования уравнений (12.10) и замены $d\dot{U}/dx$ и $d\dot{I}/dx$ в соответствии с выражениями (12.10) получают дифференциальные уравнения, полностью совпадающие с (12.6). Таким образом, решение полученного уравнения относительно, например, напряжения $\dot{U}$ отличается от (12.7) только постоянными интегрирования:

$$\dot{U} = \dot{B}_1 e^{\gamma x} + \dot{B}_2 e^{-\gamma x}. \quad (12.11)$$

Комплексное выражение для тока $\dot{I}$ можно найти с помощью первого уравнения (12.10):

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{1}{Z_c} (\dot{B}_1 e^{\gamma x} - \dot{B}_2 e^{-\gamma x}). \quad (12.12)$$

Для определения постоянных интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ можно воспользоваться уравнениями (12.7) и (12.8), подставив в них граничные значения напряжения $\dot{U}_1$ и тока $\dot{I}_1$ (в начале линии), т. е. при $x=0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1 + \dot{A}_2 &= \dot{U}_1; \\ \dot{A}_1 - \dot{A}_2 &= Z_c \dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

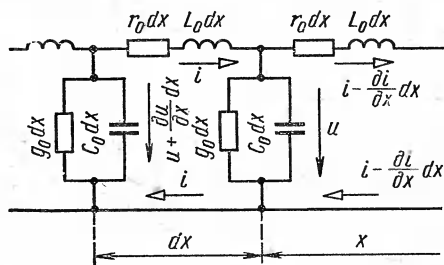


Рис. 12.3

Совместно решая уравнения, получаем:

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1); \quad \dot{A}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1). \quad (12.14)$$

После подстановки постоянных $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$ в уравнения (12.7), (12.8) и некоторой перегруппировки слагаемых уравнения длинной линии в гиперболических функциях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - Z_c \dot{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

Пользуясь этими уравнениями, можно определить напряжение и ток в любой точке линии по заданным параметрам линии и по известным значениям $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ в начале линии.

Если известны комплексные значения $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ в конце линии, то $\dot{U}$ и $\dot{I}$ в любой точке линии на расстоянии x от ее конца находят по уравнениям (12.11) и (12.12). Постоянные $\dot{B}_1$ и $\dot{B}_2$ определяют из граничных условий для конца линии. Затем путем преобразований, аналогичных приведенным ранее, эти уравнения записывают с помощью гиперболических функций в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

Полученные уравнения, в частности, позволяют вычислить $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ по известным величинам $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l, \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

где l — длина линии.

§ 12.3. Волны в линии при установившемся режиме

Как уже было отмечено, пользуясь уравнениями длинной линии в гиперболических функциях (12.15) или (12.16), можно определить напряжение и ток в любой точке линии и, следовательно, для любого момента времени, так как напряжение и ток изменяются в любой точке линии по синусоидальному закону.

Для получения уравнений, определяющих мгновенные значения напряжения и тока в любой точке линии, все комплексные величины, входящие в уравнения (12.7) и (12.8), необходимо представить в показательной форме. Комплексы $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$, имеющие размерность напряжения, можно записать в виде $\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$, $\dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$. Характеристическое сопротивление Z_c также можно представить в показательной форме:

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{r_0^2 + (\omega L_0)^2}{g_0^2 + (\omega C_0)^2}} e^{j\vartheta} = z_c e^{j\vartheta},$$

где

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega (g_0 L_0 - r_0 C_0)}{r_0 g_0 + \omega^2 L_0 C_0}. \quad (12.18)$$

После подстановки этих выражений в уравнения (12.7) и (12.8) находим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{Im} \left[\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_1 - \beta x)} + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_2 + \beta x)} \right] = \\ &= \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x); \\ i &= \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{2} A_1}{z_c} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_1 - \beta x - \vartheta)} - \frac{\sqrt{2} A_2}{z_c} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_2 + \beta x - \vartheta)} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{z_c} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \vartheta - \beta x) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{z_c} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \vartheta + \beta x), \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

где умножение на $\sqrt{2}$ произведено для перехода от действующих значений напряжения U_1 и тока I_1 к их амплитудным значениям. Первые слагаемые в правой части полученных выражений характеризуют *бегущие волны* напряжения и тока, движущиеся в направлении возрастания координаты x и затухающие по направлению движения (рис. 12.4).

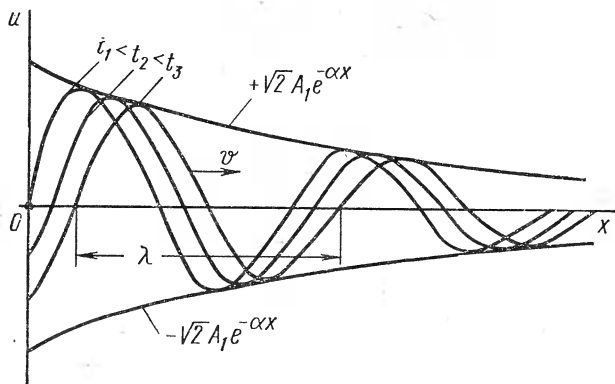


Рис. 12.4

Действительно, с одной стороны, в любой точке $x = x_1$ первое слагаемое каждой из величин представляет собой периодическую функцию времени. С другой стороны, в любой момент времени $t = t_1$ первое слагаемое изменяется вдоль линии по закону затухающей синусоиды, при этом уменьшение амплитуд определяется коэффициентом затухания α . Чтобы определить фазовую скорость бегущей волны напряжения, необходимо считать фазу колебания напряжения равной постоянной величине, т. е. $\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}$.

Продифференцировав это выражение по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0 \quad \text{и} \quad v = dx/dt = \omega/\beta.$$

Аналогично можно показать, что фазовая скорость бегущей волны тока равна той же скорости v . Вторые слагаемые в уравнениях (12.19) дают отрицательное значение фазовой скорости, что означает движение волн в сторону уменьшения координаты x . Таким образом, указанные слагаемые можно рассматривать в виде волн, движущихся в противоположных направлениях. Волны, распространяющиеся вдоль линии от источника электрической энергии к приемнику в направлении увеличения координаты x , называют прямыми (падающими), а волны, распространяющиеся в обратном направлении, — обратными (отраженными). Характерной величиной бегущей волны является ее длина λ , определяемая расстоянием между ближайшими двумя точками (рис. 12.4), взятыми в направлении распространения волны, с фазами колебания, отличающимися на 2π . Следовательно, длину волны можно найти из равенства

$$[\omega t - \beta x + \psi_1] - [\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1] = 2\pi,$$

откуда $\lambda = 2\pi/\beta$, $v = \omega/\beta = 2\pi f/\beta = \lambda f = \lambda/T$. Иначе говоря, за один период волна пробегает расстояние, равное длине волны.

Аналогично можно получить волновые уравнения для токов и напряжений, если воспользоваться уравнениями (12.11) и (12.12). Основное отличие в соответствующих уравнениях состоит в изменении знака координаты x и в величинах постоянных $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$, выраженных через напряжение U_2 и ток I_2 . Падающие и отраженные волны тока в общем случае отстают по фазе относительно соответствующих волн напряжения на угол ϕ при его положительном значении. Кроме того, если мгновенное значение напряжения u в любой точке линии равно сумме мгновенных значений напряжений падающей и отраженной волн, то мгновенное значение тока i в любой точке линии равно разности мгновенных значений тока падающей и отраженной волн, что непосредственно следует из уравнений (12.19).

Такое представление установившегося процесса в цепи с распределенными параметрами при синусоидальных функциях тока и напряжения от времени носит формальный характер и определяется математическим разложением соответствующих функций.

§ 12.4. Установившиеся процессы в нагруженной, разомкнутой и короткозамкнутой линиях с потерями

Рабочий режим в любой точке нагруженной линии можно представить как результат наложения режимов в линии при разомкнутом и короткозамкнутом ее конце.

Пусть ток $I_2 = 0$, а напряжение в конце линии равно U_2 . Такой режим часто называют холостым ходом линии. Тогда

напряжение и ток в любой точке линии при разомкнутом конце определяют из выражений

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_p &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x = \frac{1}{2} \dot{U}_2 (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}); \\ \dot{I}_p &= \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x = \frac{1}{2} \frac{\dot{U}_2}{Z_c} (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}), \end{aligned} \right\} \quad (12.20)$$

где x — расстояние от конца линии. При коротком замыкании в конце линии ($\dot{U}_2 = 0$, ток равен $\dot{I}_2$) напряжение и ток в той же точке на расстоянии x от конца линии находят из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_k &= Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x = \frac{1}{2} Z_c \dot{I}_2 (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}); \\ \dot{I}_k &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x = \frac{1}{2} \dot{I}_2 (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}). \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

Следовательно, $\dot{U} = \dot{U}_p + \dot{U}_k$; $\dot{I} = \dot{I}_p + \dot{I}_k$. Таким образом, наложение режимов при размыкании (холостом ходе) и коротком замыкании линии даст возможность определить напряжение и ток в любой точке линии при любой нагрузке, включенной в конце линии.

Векторные диаграммы токов и напряжений при разомкнутом и короткозамкнутом конце линии и при нагрузке строятся по уравнениям (12.17), определяющим напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ в начале линии. Пусть напряжение $\dot{U}_2$ совпадает с осью вещественных величин (рис. 12.5). Тогда напряжение $\dot{U}_{1p}$ и ток $\dot{I}_{1p}$ в начале линии можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1p} &= \frac{1}{2} \dot{U}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l} + \frac{1}{2} \dot{U}_2 e^{-\alpha l} e^{-j\beta l}; \\ \dot{I}_{1p} &= \left(\frac{1}{2} \dot{U}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l} - \frac{1}{2} \dot{U}_2 e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} \right) \frac{1}{Z_c} e^{-j\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

По этим уравнениям на рис. 12.5 построена векторная диаграмма для разомкнутой линии. Из этой диаграммы видно, что напряжение $\dot{U}_{1p}$ равно сумме составляющих $\frac{1}{2} \dot{U}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l}$ и $\frac{1}{2} \dot{U}_2 e^{-\alpha l} e^{-j\beta l}$, а ток $\dot{I}_{1p}$ равен разности тех же составляющих, разделенной на комплексное волновое сопротивление $Z_c = z_c e^{j\theta}$. При коротком замыкании в конце линии ($\dot{U}_2 = 0$, ток равен $\dot{I}_2$), напряжение и ток в начале линии определяют из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1k} &= Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l = \frac{1}{2} Z_c \dot{I}_2 (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}); \\ \dot{I}_{1k} &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l = \frac{1}{2} \dot{I}_2 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}). \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

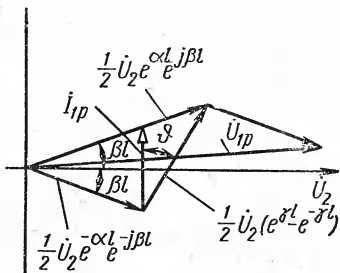


Рис. 12.5

Векторная диаграмма для этого случая показана на рис. 12.6. При этом комплексное значение тока I_2 отстает по фазе от комплексного значения напряжения $\dot{U}_2$ на угол φ_2 . На рис. 12.7 даны векторы напряжения $\dot{U}_1$ и тока $\dot{I}_1$, полученные путем геометрического суммирования соответствующих векторов при разомкнутой линии и ее коротком замыкании в соответствии с уравнениями

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1p} + \dot{U}_{1к}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_{1p} + \dot{I}_{1к}. \quad (12.24)$$

Интересно отметить, что при индуктивной нагрузке в конце линии угол сдвига фаз φ_1 между током $\dot{I}_1$ и напряжением $\dot{U}_1$

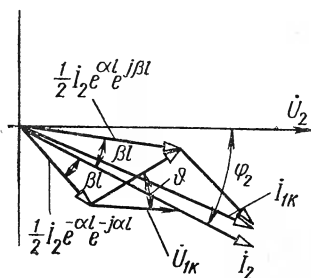


Рис. 12.6

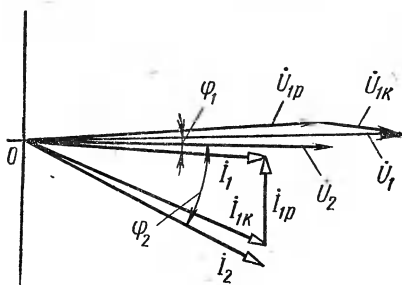


Рис. 12.7

меньше угла сдвига фаз φ_2 (рис. 12.7), что объясняется влиянием опережающего емкостного тока $\dot{I}_{1p}$ на режим в линии.

При сопротивлении нагрузки Z_2 , равном волновому сопротивлению Z_c , напряжение и ток в любой точке линии равны:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x} = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} e^{\gamma x},$$

откуда $\dot{U}/\dot{I} = Z_c$, т. е. $\dot{U}/\dot{I} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_c$.

Если $\dot{U}_2 = U_2$, то мгновенные значения напряжения и тока в любой точке линии имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2} U_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x); \\ i &= \sqrt{2} \frac{U_2}{Z_c} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x - \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (12.25)$$

Таким образом, при $Z_2 = Z_c$ в линии имеются только прямые волны, движущиеся от источника энергии к приемнику. В этом случае режим работы источника электрической энергии не изменится, если в любом сечении линии включить вместо удаленной части линии сопротивление, равное волновому. Такую нагрузку линии называют согласованной или нагрузкой без отражения*.

Для линии с согласованной нагрузкой следует установить соотношение между активной мощностью $P_1 = U_1 I_1 \cos \vartheta$ в начале и активной мощностью $P_2 = U_2 I_2 \cos \vartheta$ в конце линии. Поскольку

* Все изложенное здесь о линии с согласованной нагрузкой применимо к бесконечной линии, поскольку в ней не могут возникнуть отраженные волны,

$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l}$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l}$, то $P_1 = U_1 I_1 \cos \vartheta = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \vartheta = P_2 e^{2\alpha l}$.

Следовательно, к. п. д. линии $\eta = P_2/P_1 = e^{-2\alpha l}$.

Полученные соотношения позволяют определить единицу измерения затухания мощности линии из выражения $\alpha l = \frac{1}{2} \ln P_1/P_2$. Единицей затухания мощности служит *непер* (Нп). Затухание равно 1 Нп, если $\alpha l = 1$ или $P_1/P_2 = e^2$. Таким образом, при затухании в линии, равном 1 Нп, активная мощность в начале линии больше активной мощности в ее конце в $e^2 = 7,39$ раза.

Очень важной характеристикой линии является ее входное сопротивление, равное отношению $\dot{U}_1/\dot{I}_1$ в начале линии.

На основании уравнений длинной линии в гиперболических функциях

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l} = Z_c \frac{Z_2 + Z_c \operatorname{th} \gamma l}{Z_2 \operatorname{th} \gamma l + Z_c}. \quad (12.26)$$

Для разомкнутой линии ($\dot{I}_2 = 0$, $Z_2 = \infty$)

$$Z_{\text{вх. р}} = \frac{\dot{U}_{1\text{р}}}{\dot{I}_{1\text{р}}} = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l}{(\dot{U}_2/Z_c) \operatorname{sh} \gamma l} = \frac{Z_c}{\operatorname{th} \gamma l}. \quad (12.27)$$

При коротком замыкании ($\dot{U}_2 = 0$, $Z_2 = 0$)

$$Z_{\text{вх. к}} = \frac{\dot{U}_{1\text{к}}}{\dot{I}_{1\text{к}}} = \frac{Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l}{\dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l} = Z_c \operatorname{th} \gamma l. \quad (12.28)$$

Следовательно, зная параметры линии и сопротивление Z_2 , можно найти входное сопротивление линии при любой нагрузке. Пользуясь выражениями для $Z_{\text{вх. р}}$ и $Z_{\text{вх. к}}$, можно определить волновое сопротивление линии Z_c , а также $\operatorname{th} \gamma l$ и коэффициент распространения γ .

Умножая друг на друга левые и правые части выражений (10.27) и (10.28):

$$Z_{\text{вх. р}} Z_{\text{вх. к}} = \frac{Z_c}{\operatorname{th} \gamma l} Z_c \operatorname{th} \gamma l = Z_c^2,$$

получаем

$$Z_c = \sqrt{Z_{\text{вх. р}} Z_{\text{вх. к}}}. \quad (12.29)$$

Аналогично можно найти формулу для определения $\operatorname{th} \gamma l$:

$$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{Z_{\text{вх. к}}/Z_{\text{вх. р}}}. \quad (12.30)$$

Полученные выражения совпадают с формулами (11.44), что и следовало ожидать, так как цепь с равномерно распределенными параметрами всегда можно заменить симметричной эквивалентной Т- или П-образной схемой с сосредоточенными параметрами.

Сравнивая уравнения для симметричного четырехполюсника

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

с уравнениями длинной линии

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l; \\ \dot{I}_1 &= (\dot{U}_2 / Z_c) \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l, \end{aligned} \right\}$$

определяем значения коэффициентов четырехполюсника:

$$A = D = \operatorname{ch} \gamma l; \quad B = Z_c \operatorname{sh} \gamma l; \quad C = \frac{1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l. \quad (12.31)$$

Условие для симметричного четырехполюсника $A^2 - BC = 1$ выполняется и для длинной линии

$$\operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1. \quad (12.32)$$

Пользуясь выражениями (12.31) и (12.32), находим:

$$Z_{\Pi} = Z_{12} = Z_c \operatorname{sh} \gamma l; \quad Z_1 = Z_2 = Z = \frac{Z_c \operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l - 1}; \quad (12.33)$$

$$Z_T = Z'_a = \frac{Z_c}{\operatorname{sh} \gamma l}; \quad Z'_1 = Z'_2 = Z' = \frac{Z_c (\operatorname{ch} \gamma l - 1)}{\operatorname{sh} \gamma l}. \quad (12.34)$$

Таким образом, по известным параметрам линии с помощью формул (12.33) и (12.34) можно определить параметры эквивалентных Π - и T -образных схем.

Пример 12.1. Для определения параметров телефонной линии длиной $l = 200$ км измерены при угловой частоте $\omega = 5000 \text{ с}^{-1}$ сопротивления разомкнутой $Z_{\text{вх. р}} = 747e^{-j27^\circ 41'}$ Ом и короткозамкнутой $Z_{\text{вх. к}} = 516e^{j0^\circ 35'}$ Ом линий. По формулам (12.29) и (12.30) найдены $Z_c = 621e^{-j13^\circ 33'}$ и $\gamma = (0,0046 + j0,018) = 0,00186e^{j75^\circ 40'}$. Определить первичные параметры линии: r_0 , g_0 , C_0 и L_0 .

Решение. Для определения r_0 и L_0 перемножим

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} \quad \text{на} \quad Z_c = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}},$$

т. е.

$$\gamma Z_c = r_0 + j\omega L_0 = (5,4 + j10,21) \text{ Ом/км},$$

откуда

$$r_0 = 5,4 \text{ Ом/км}, \quad L_0 = 10,21/5000 = 0,002 \text{ Г/км}.$$

Аналогичным путем найдем g_0 и C_0 :

$$\frac{\gamma}{Z_c} = g_0 + j\omega C_0 = (4,1 \cdot 10^{-7} + j3 \cdot 10^{-5}) \text{ 1/Ом} \cdot \text{км},$$

откуда

$$g_0 = 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ См/км}; \quad C_0 = 0,006 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/км}.$$

§ 12.5. Линия без потерь

В линиях передачи электрической энергии, применяемых в радиотехнике, телефонии и телеграфии, при достаточно высокой частоте можно с большой точностью пренебречь сопротивлением r_0 и проводимостью утечки g_0 по сравнению соответственно с величинами ωL_0 и ωC_0 . Поэтому во многих случаях такие линии рассматривают как линии без потерь энергии, что является идеализацией реальной линии.

Для линии без потерь коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = j\omega \sqrt{L_0 C_0},$$

т. е. $\alpha = 0$; $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$.

Волновое сопротивление такой линии

$$Z_c = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{L_0 / C_0} = z_c.$$

При этом $\Phi = 0$, $v = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0}$, $\lambda = 2\pi / \beta$. Следовательно, в линии без потерь коэффициент затухания равен нулю, а волновое сопротивление и фазовая скорость не зависят от частоты. Поэтому уравнения длинной линии в гиперболических функциях (12.16) преобразуются в уравнения в тригонометрических функциях:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \operatorname{ch}(j\beta x) + z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh}(j\beta x) = \dot{U}_2 \cos \beta x + j z_c \dot{I}_2 \sin \beta x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \operatorname{ch}(j\beta x) + \frac{\dot{U}_2}{z_c} \operatorname{sh}(j\beta x) = \dot{I}_2 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{z_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

Если $\dot{U}_2 = U_2$, $\dot{I}_2 = I_2 e^{-i\Phi_2}$, то из этих уравнений легко получить выражения, определяющие мгновенные значения напряжения и тока:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t + z_c I_{2m} \sin \beta x \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \Phi_2 \right); \\ i &= \frac{U_{2m}}{z_c} \sin \beta x \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + I_{2m} \cos \beta x \sin (\omega t - \Phi_2). \end{aligned} \right\} \quad (12.36)$$

На рис. 12.8, а, б изображены кривые распределения мгновенных значений напряжений и тока вдоль линии для $t=0$ и $t=T/6$ на участке линии длиной $3/4 \lambda$ при $\Phi_2 > 0$. Из уравнений (12.36) и этих кривых следует, что распределение напряжения и тока вдоль линии в каждый момент времени является синусоидальным.

Если в конце линии включено комплексное сопротивление $Z_2 = r_2 + jx_2$, то входное сопротивление линии без потерь

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cos \beta l + j z_c \dot{I}_2 \sin \beta l}{j \frac{\dot{U}_2}{z_c} \sin \beta l + \dot{I}_2 \cos \beta l} = \\ &= z_c \frac{Z_2 + j z_c \operatorname{tg} \beta l}{j z_c \operatorname{tg} \beta l + Z_2}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

В уравнениях (12.35) ÷ (12.37)

$Z_c = z_c = \sqrt{L_0 / C_0}$ не имеет мнимой составляющей и по своему характеру аналогично активному сопротивлению. Иначе говоря, отношение напряжения к току для прямой или обратной волн есть постоянная величина, не зависящая от частоты.

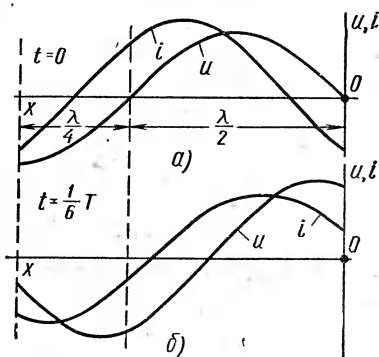


Рис. 12.8

Для определения фазовой скорости через первичные параметры, связанные со свойствами среды, следует рассмотреть, например, двухпроводную воздушную линию, емкость и индуктивность которой, отнесенные к единице длины линии, определяются по приближенным формулам:

$$C_0, \Phi/\text{км} = \frac{\pi \epsilon \epsilon_0}{\ln d/R_0};$$

$$L_0, \Gamma/\text{км} = \frac{\mu \mu_0}{\pi} \ln d/R_0,$$

где d — расстояние между осями проводов; R_0 — радиус каждого провода.

Подставив выражения для L_0 и C_0 в формулу для v , находим

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Известно, что скорость света в пустоте $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, следовательно, $v = c/\sqrt{\epsilon \mu}$. Для воздушной линии $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$. Для кабельной линии $\epsilon > 1$, поэтому $v < c$. Для воздушной линии при $f = 50$ Гц в случае, когда $v \rightarrow c$, $\lambda = vT = 6000$ км.

Кривые изменения действующих значений напряжений и тока вдоль линии без потерь можно рассмотреть при комплексном сопротивлении нагрузки Z_2 . Для определения действующих значений тока и напряжения в любой точке линии целесообразно воспользоваться уравнениями для их мгновенных значений (12.36). Действующее значение любой величины определим как среднее квадратичное за период:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (12.38)$$

Подставив в эти формулы выражения для u и i из (12.36), можно получить:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{2m}^2 \cos^2 \beta x + z_c^2 I_{2m}^2 \sin^2 \beta x + U_{2m} z_c I_{2m} \sin \varphi_2 \sin 2\beta x}; \\ I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{I_{2m}^2 \cos^2 \beta x + \frac{U_{2m}^2}{z_c^2} \sin^2 \beta x + \frac{U_{2m} I_{2m}}{z_c} \sin \varphi_2 \sin 2\beta x}, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} U &= U_2 \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{z_c}{z_2} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{z_c}{z_2} \right)^2 \right] \cos 2\beta x \right\} + \frac{z_c}{z_2} \sin \varphi_2 \sin 2\beta x}; \\ I &= I_2 \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{z_2}{z_c} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{z_2}{z_c} \right)^2 \right] \cos 2\beta x \right\} + \frac{z_2}{z_c} \sin \varphi_2 \sin 2\beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (12.39)$$

По первому из этих уравнений на рис. 12.9 построен график изменения действующих значений напряжения вдоль линии без потерь, нагруженной на сопротивление $z_2 \neq z_c$. Из графика и

уравнений (12.39) видно, что действующие значения напряжения изменяются не по синусоидальному закону, при этом $U_{\min} \neq 0$.

Наибольшие значения напряжения $U_{\max}$ получают в тех точках линии, где напряжения падающей и отраженной волн совпадают по фазе (амплитуды $U_{\max \text{ пад}}$ и $U_{\max \text{ отр}}$ арифметически складываются). В этих же точках получаются наименьшие значения тока $I_{\min}$ (амплитуды $I_{\max \text{ пад}}$ и $I_{\max \text{ отр}}$ арифметически вычитаются). Точки, в которых $U_{\text{пад}}$ и $U_{\text{отр}}$ находятся в противофазе, соответствуют наименьшим значениям напряжения $U_{\min}$ и наибольшим значениям тока $I_{\max}$.

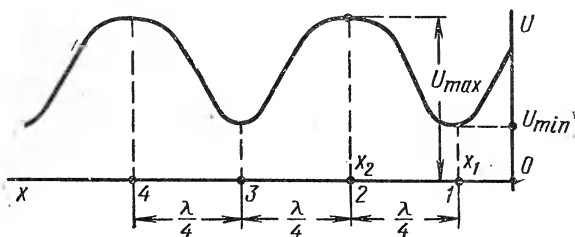


Рис. 12.9

Для иллюстрации этих положений следует воспользоваться уравнениями длинной линии в комплексной форме, выраженными через напряжение падающих и отраженных волн:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{j\beta x} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{-j\beta x}; \\ I &= (\dot{U}_{\text{пад}}/z_c) e^{j\beta x} - (\dot{U}_{\text{отр}}/z_c) e^{-j\beta x}, \end{aligned} \right\} \quad (12.40)$$

где $\dot{U}_{\text{пад}} = U_{\text{пад}} e^{j\psi_{\text{пад}}}$; $\dot{U}_{\text{отр}} = U_{\text{отр}} e^{j\psi_{\text{отр}}}$, а x отсчитывается от конца линии. При этом комплексные значения $\dot{U}_{\text{пад}}$ и $\dot{U}_{\text{отр}}$ представляют в виде

$$\dot{U}_{\text{пад}} = \frac{\dot{U}_2 + z_c I_2}{2}; \quad \dot{U}_{\text{отр}} = \frac{\dot{U}_2 - z_c I_2}{2}. \quad (12.41)$$

Переходя к мгновенным значениям, из уравнений (12.40) получаем:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{\text{пад}} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{\text{пад}}) + U_{\text{отр}} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{\text{отр}}); \\ i &= \frac{U_{\text{пад}}}{z_c} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{\text{пад}}) - \frac{U_{\text{отр}}}{z_c} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{\text{отр}}). \end{aligned} \right\} \quad (12.42)$$

Напряжения падающей и отраженной волн совпадают по фазе в точках, где

$$(\omega t + \beta x + \psi_{\text{пад}}) - (\omega t - \beta x + \psi_{\text{отр}}) = 0; 2\pi; 4\pi \dots$$

или

$$2\beta x = \psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}} + 2k\pi \quad (k = 0; 1; 2 \dots),$$

откуда

$$x = \frac{\psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}}}{2\beta} + k \frac{\lambda}{2}.$$

В этих точках

$$U_{\max} = U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}};$$

$$I_{\min} = \frac{U_{\text{пад}}}{z_c} - \frac{U_{\text{отр}}}{z_c} = I_{\text{пад}} - I_{\text{отр}}.$$

Если от каждой из указанных точек сдвинуться на расстояние $\lambda/4$, то разность фаз станет равной π ; 3π ; 5π ... и

$$U_{\min} = U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}} = I_{\min} z_c;$$

$$I_{\max} = (U_{\text{пад}}/z_c) + (U_{\text{отр}}/z_c) = U_{\max}/z_c.$$

Так как напряжение $U_{\max}$ и ток $I_{\min}$ совпадают по фазе, входная проводимость линии в этих точках имеет чисто активный характер и наименьшее значение:

$$Y_{\text{вх min}} = I_{\min}/U_{\max} = y_{\text{вх min}}.$$

При этом активная мощность, передаваемая с помощью линии,

$$P = U_{\max} I_{\min}.$$

Указанные значения тока и напряжения повторяются через каждые $\lambda/2$ (рис. 12.9). В точках, напряжение которых $U_{\min}$, а ток $I_{\max}$, входная проводимость имеет также активный характер и наибольшее значение:

$$Y_{\text{вх max}} = I_{\max}/U_{\min} = y_{\text{вх max}},$$

в этом случае активная мощность

$$P = U_{\min} I_{\max}.$$

Степень несогласованности линии с нагрузкой характеризуется коэффициентом стоячей волны (к. с. в.):

$$K_c = U_{\max}/U_{\min} = I_{\max}/I_{\min} = z_c Y_{\text{вх max}} = 1/z_c y_{\text{вх min}}.$$

Коэффициент стоячей волны можно выразить через коэффициент бегущей волны K_6 с помощью коэффициента отражения n :

$$K_c = U_{\max}/U_{\min} = \frac{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}} = \frac{1 + (U_{\text{отр}}/U_{\text{пад}})}{1 - (U_{\text{отр}}/U_{\text{пад}})} = \frac{1 + n}{1 - n} = \frac{1}{K_6}.$$

Пример 12.2. В начале двухпроводной линии без потерь длиной $l = 12$ м и волновым сопротивлением $z_c = 400$ Ом включен генератор с э. д. с. $\mathcal{E} = 2000$ В и внутренним сопротивлением $r_0 = 400$ Ом; длина волны $\lambda = 2,5$ м. На конце линии включено сопротивление нагрузки

$$Z_2 = 640 + j480 = 800e^{j36^\circ 50'} \text{ Ом}.$$

Определить ток и напряжение в начале и конце линии, активную мощность, поступающую в линию (мощность нагрузки), а также наибольшие и наименьшие (действующие) значения напряжения и тока в линии и их месторасположение.

Решение. Определим комплексные значения напряжения и тока в начале линии:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta l + j z_c I_2 \sin \beta l;$$

$$\dot{I}_1 = I_2 \cos \beta l + j \dot{U}_2 / z_c \sin \beta l,$$

где

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2.$$

Входное сопротивление линии с нагрузкой

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_2 + jz_c \operatorname{tg} \beta l}{1 + j \frac{Z_2}{z_c} \operatorname{tg} \beta l} = \frac{640 + j480 - j400 \cdot 3,078}{1 + j \frac{640 + j480}{400} (-3,078)} = 145e^{-j3^\circ 10'} \approx 145 \text{ Ом.}$$

Ток в начале линии

$$I_1 = \dot{\mathcal{E}} / Z_{\text{общ}} = \dot{\mathcal{E}} / (r_0 + Z_{\text{вх}}) = \frac{2000}{545} = 3,67 \text{ А.}$$

Напряжение в начале линии

$$\dot{U}_1 = Z_{\text{общ}} \dot{I}_1 = 145e^{-j3^\circ 10'} \cdot 3,67 = 532e^{-j3^\circ 10'} \text{ В.}$$

Ток в конце линии

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_2 \cos \beta l + jZ_c \sin \beta l} = \frac{532e^{-j3^\circ 10'}}{198 - j232} = 1,74e^{j46^\circ 20'} \text{ А.}$$

Напряжение в конце линии

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2 = 800e^{j36^\circ 50'} \cdot 1,74e^{j46^\circ 20'} = 1392e^{j83^\circ 10'} \text{ В.}$$

Мощность

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 532 \cdot 3,67 \cos 3^\circ 10' = 1940 \text{ Вт}$$

$$P_2 = r_2 I_2^2 = 640 \cdot 1,74^2 = 1940 \text{ Вт.}$$

Напряжения совпадают по фазе в точках, где

$$x = \frac{\psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}}}{2\beta} + k \frac{\lambda}{2}.$$

При этом

$$\dot{U}_{\text{пад}} = \frac{\dot{U}_2 + z_c \dot{I}_2}{2} = \frac{I_2}{2} (Z_2 + z_c) = 0,87e^{j46^\circ 20'} (1040 + j480) = 1000e^{j71^\circ 05'} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{\text{отр}} = \frac{\dot{U}_2 - z_c \dot{I}_2}{2} = \frac{I_2}{2} (Z_2 - z_c) = 0,87e^{j46^\circ 20'} (240 + j480) = 470e^{j110^\circ 05'} \text{ В.}$$

Таким образом, $U_{\text{пад}} = 1000 \text{ В}$; $\psi_{\text{пад}} = 71^\circ 05'$; $U_{\text{отр}} = 470 \text{ В}$; $\psi_{\text{отр}} = 110^\circ 05'$.

На расстоянии от конца линии $x = (\psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}}) / 2\beta = \frac{39}{288} = 0,135 \text{ м}$ напряжение имеет наибольшее значение:

$$U_{\text{max}} = U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}} = 1000 + 470 = 1470 \text{ В,}$$

а ток — наименьшее;

$$I_{\text{min}} = \frac{U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}}{Z_c} = \frac{1000 - 470}{400} = 1,32 \text{ А.}$$

Так как ток и напряжение в этих точках совпадают по фазе, то входная проводимость имеет активный характер и наименьшее значение:

$$Y_{\text{вх min}} = y_{\text{вх min}} = I_{\text{min}} / U_{\text{max}} = 1,32 / 1470 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ См.}$$

При этом

$$P = U_{\text{max}} I_{\text{min}} = 1470 \cdot 1,32 = 1940 \text{ Вт.}$$

Такие значения тока и напряжения повторяются каждые $\lambda/2 \text{ м}$.
На расстоянии

$$x = \frac{\psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}}}{2\beta} + \frac{\lambda}{4} = 0,135 + \frac{2,5}{4} = 0,76 \text{ м}$$

от конца линии напряжение имеет наименьшее значение:

$$U_{\min} = I_{\min} z_c = 1,32 \cdot 400 = 528 \text{ В},$$

а ток — наибольшее:

$$I_{\max} = U_{\max} / z_c = 1470 / 400 = 3,68 \text{ А}.$$

Входная проводимость в этих точках имеет активный характер и наибольшее значение:

$$Y_{\text{вх max}} = y_{\text{вх max}} = I_{\max} / U_{\min} = 3,68 / 528 = 69,7 \cdot 10^{-4} \text{ См}.$$

Мощность

$$P = U_{\min} I_{\max} = 528 \cdot 3,68 = 1940 \text{ Вт}.$$

§ 12.6. Стоячие волны

Если в конце линии без потерь не потребляется активная мощность (линия разомкнута, замкнута, замкнута на реактивную нагрузку), то в такой линии возникают стоячие волны.

При разомкнутом ($I_2 = 0$, $Z_2 = \infty$) конце линии без потерь напряжение и ток в любой ее точке определяются с помощью уравнений в тригонометрических функциях:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x; \quad \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{z_c} \sin \beta x.$$

Если $\dot{U}_2 = U_2$, то мгновенные значения напряжения и тока вычисляются по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t; \\ i &= \frac{U_{2m}}{z_c} \sin \beta x \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (12.43)$$

Каждое из этих уравнений представляет собой произведение двух функций, причем аргумент одной из них зависит только от

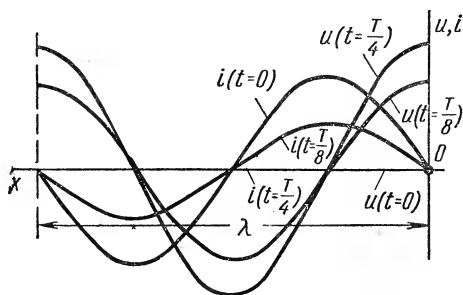


Рис. 12.10

времени, а другой — только от координаты. Иначе говоря, в любой фиксированной точке линии напряжение и ток изменяются по синусоидальным законам со сдвигом по фазе на четверть периода. При этом распределение напряжения и тока вдоль линии для любого момента времени является также синусоидальным. В результате в конце линии ($x=0$) и в точках, находящихся от конца

на расстоянии $x = k \frac{\lambda}{2}$ (k — целое число), напряжения имеют максимальные значения (пучности), а токи — нулевые значения (узлы). В точках, которые отстоят от конца линии на расстоянии

$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$, существуют узлы напряжения и пучности тока, при этом узлы и пучности тока и напряжения не перемещаются по линии.

На рис. 12.10 изображены графики распределения напряжения и тока вдоль линии для различных моментов времени. При $0 \leq x \leq \lambda/4$; $\lambda/2 \leq x \leq 3\lambda/4$ и т. д. ток опережает напряжение на 90° и отстает на тот же угол при $\lambda/4 \leq x \leq \lambda/2$; $3\lambda/4 \leq x \leq \lambda$ и т. д.

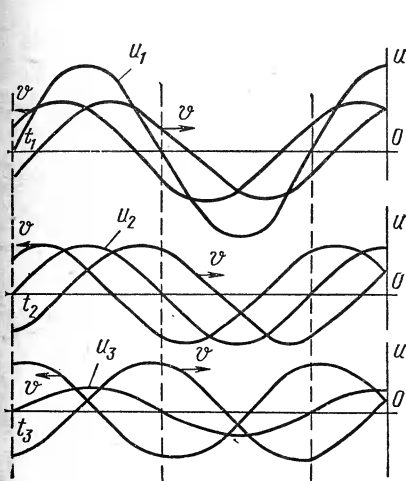


Рис. 12.11

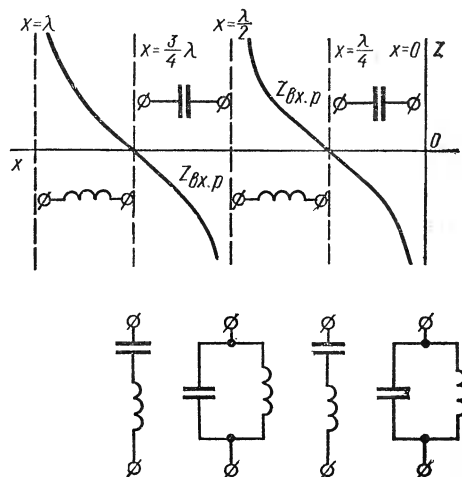


Рис. 12.12

Стоячую волну можно представить как результат наложения падающей и отраженной волн с одинаковыми амплитудами. Действительно, из уравнений (12.43)

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} U_{2m} \sin(\omega t + \beta x) + \frac{1}{2} U_{2m} \sin(\omega t - \beta x) = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; \\ i &= \frac{1}{2} \frac{U_{2m}}{z_c} \sin(\omega t + \beta x) - \frac{1}{2} \frac{U_{2m}}{z_c} \sin(\omega t - \beta x) = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.44)$$

По первому уравнению (12.44) на рис. 12.11 построены кривые распределения напряжений падающих и отраженных волн для моментов времени t_1 , t_2 и t_3 . Суммирование этих кривых дает стоячую волну напряжения, ординаты которой пульсируют с угловой скоростью ω .

Входное сопротивление разомкнутой линии без потерь

$$Z_{\text{вх.п}} = -jz_c \operatorname{ctg} \beta x = -jz_c \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} x$$

является реактивным и его знак зависит от частоты и длины участка линии. На рис. 12.12 построен график изменения входного сопротивления для различных значений x . Из этого гра-

фика видно, что при $0 \leq x \leq \lambda/4$; $\lambda/2 \leq x \leq 3\lambda/4$ и т. д. линия представляет собой емкостное сопротивление, а при $\lambda/4 \leq x \leq \lambda/2$; $3\lambda/4 \leq x \leq \lambda$ и т. д. — индуктивное сопротивление.

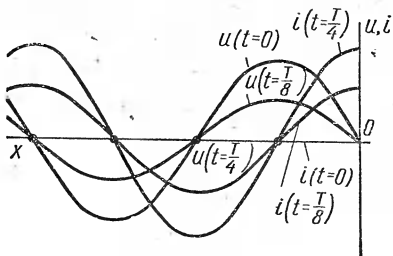


Рис. 12.13

В точках линии, в которых существуют узлы тока и пучности напряжения, линия может быть представлена резонансным контуром с параллельным соединением емкости и индуктивности, а в точках, в которых имеются узлы напряжения и пучности тока, ту же линию можно представить резонансным

контуром с последовательным соединением емкости и индуктивности.

При коротком замыкании линии ($U_2 = 0$; $Z_2 = 0$) из уравнений (12.35) определяем:

$$\dot{U} = jz_c \dot{I}_2 \sin \beta x; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x. \quad (12.45)$$

В этом случае уравнения для мгновенных величин

$$\left. \begin{aligned} u &= z_c I_{2m} \sin \beta x \cos \omega t; \\ i &= I_{2m} \cos \beta x \sin \omega t \end{aligned} \right\}$$

определяют стоячие волны. В конце линии и в точках, отстоящих от ее конца на расстоянии $x = k\lambda/2$, имеются узлы напряжения и пучности тока, а в точках, которые находятся от конца линии на расстоянии $x = (2k + 1)\lambda/4$, — пучности напряжения и узлы тока (рис. 12.13). Входное сопротивление линии без потерь, короткозамкнутой на конце,

$$Z_{вх.к} = jz_c \operatorname{tg} \beta x = jz_c \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right).$$

Это сопротивление, так же как $Z_{вх.р}$, является чисто реактивным и в зависимости от длины участка x линии и частоты ω получается или индуктивным, или емкостным.

На рис. 12.14 показан гра-

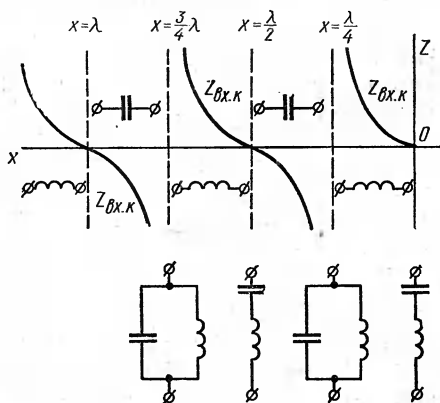


Рис. 12.14

фик входного сопротивления вдоль короткозамкнутой линии, из которого следует, что при $0 \leq x \leq \lambda/4$; $\lambda/2 \leq x \leq 3\lambda/4$ и т. д. линия представляет собой индуктивное сопротивление; ток отстает по фазе от напряжения на четверть периода. При $\lambda/4 \leq x \leq \lambda/2$; $3\lambda/4 \leq x \leq \lambda$ и т. д. линия представляет собой емкостное со-

противление; ток опережает по фазе напряжение линии на четверть периода.

В тех случаях, когда для согласования линии с нагрузкой необходимо включить реактивное сопротивление (чтобы не было отраженных волн), таким сопротивлением может служить разомкнутая или замкнутая линия длиной меньше $\lambda/4$. При этом длину участка линии x можно определить из уравнений:

для разомкнутой линии

$$x_c = 1/\omega C = z_c \operatorname{ctg} \beta x;$$

для короткозамкнутой линии

$$x_L = \omega L = z_c \operatorname{tg} \beta x.$$

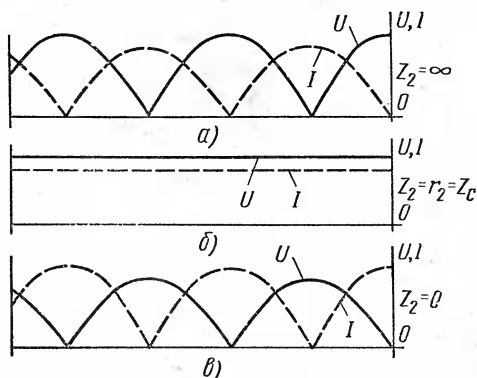


Рис. 12.15

При чисто реактивной нагрузке $Z_2 = \pm jx_2$ в линии образуются стоячие волны, что вытекает из условия эквивалентности между заданным реактивным сопротивлением, включенным в конце линии, и отрезком линии при соответствующем режиме (разомкнутом или короткозамкнутом конце).

Если линию без потерь замкнуть на активное сопротивление $r_2 = z_c$, то в ней не будет отраженных волн. В результате действующие значения напряжения и тока одинаковы во всех точках

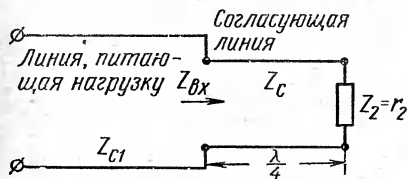


Рис. 12.16

линии. На рис. 12.15 показаны кривые распределения действующих значений напряжений и токов вдоль линии при различных режимах ($Z_2 = \infty$; $Z_2 = r_2 = z_c$ и $Z_2 = 0$). Из этих кривых видно, что при разомкнутом и короткозамкнутом конце линии действующие значения напряжения и тока имеют вид выпрям-

ленных синусоид. При этом кривые токов и напряжений для указанных режимов как бы меняются местами (рис. 12.15, а, в). Для линии с согласованной нагрузкой действующие значения напряжений и токов во всех точках линии одинаковы (рис. 12.15, б).

Линию без потерь длиной $l = \lambda/4$ часто используют в качестве промежуточного элемента для согласования режима работы другой линии и сопротивления нагрузки $Z_2 = z_2 = r_2$, не равного волновому сопротивлению линии. Так, на рис. 12.16 показана линия, питающая нагрузку с сопротивлением $z_2 = r_2$, причем для согласования режима в линии с нагрузкой включена другая линия, длина которой $l = \lambda/4$.

Входное сопротивление четвертьволновой линии, нагруженной на сопротивление $z_2 = r_2$, определяют с помощью (12.37):

$$Z_{\text{вх}} = z_c \frac{z_2 + jz_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}}{jz_2 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} + z_c} = \frac{z_c^2}{z_2}, \quad (12.46)$$

так как $\operatorname{tg} \pi/2 = \infty$.

Для согласования линии, питающей нагрузку, с сопротивлением нагрузки необходимо выполнить условие

$$z_{c1} = z_{\text{вх}} = z_c^2/z_2,$$

где z_{c1} — волновое сопротивление питающей линии. Следовательно, волновое сопротивление согласующей линии

$$z_c = \sqrt{z_{c1} z_2}. \quad (12.47)$$

В рассматриваемом случае линию без потерь длиной $l = \lambda/4$ называют четвертьволновым трансформатором, так как с ее помощью волновое сопротивление питающей линии как бы преобразуется (трансформируется) в сопротивление нагрузки.

При комплексном сопротивлении нагрузки, равном Z_2 , в конце питающей линии параллельно четвертьволновому трансформатору длиной l_m и сопротивлением $z_m = z_c$ (в виде линии, замкнутой на сопротивление нагрузки Z_2) присоединяют короткозамкнутую линию длиной l_k и волновым сопротивлением $z_c = z_k$ (рис. 12.17), при этом длины линий l_m и l_k можно изменять. Из рис. 12.17 видно, что линия передачи будет согласована в том случае, когда суммарная проводимость трансформатора (вместе с нагрузкой) и параллельно соединенной с ним короткозамкнутой линией равна величине, обратной волновому сопротивлению питающей линии; т. е. согласование возможно при

$$1/z_c = Y_m + Y_k. \quad (12.48)$$

Поскольку питающая линия без потерь, то $1/z_c$ — вещественная величина. Второе слагаемое правой части представляет собой проводимость короткозамкнутой линии и является мнимой величиной: $Y_k = -jb_k$. Первое слагаемое правой части в общем случае имеет комплексное значение: $Y_m = g_m - jb_m$.

Таким образом, равенство (12.48) распадается на два:

$$1/z_c = g_m; \quad b_k + b_m = 0. \quad (12.49)$$

Сначала находят длину l_m из первого равенства, а затем из второго равенства по известному значению проводимости b_m ,

соответствующей длине l_m , определяют длину l_k . При этом следует иметь в виду, что волновые сопротивления трансформатора и короткозамкнутой линии в общем случае не равны волновому сопротивлению питающей линии.

§ 12.7. Линия без искажений; измерительная линия

Сигналы, передаваемые с помощью линий связи, обычно представляют собой совокупность несинусоидальных периодических или непериодических токов и напряжений. Периодические функции могут быть разложены в дискретный ряд Фурье на множество различных гармоник, а непериодические функции представлены в виде непрерывного спектра частот. При передаче сигналов стремятся получить минимально возможные искажения.

Неискаженной передачей сигнала называют такую передачу, при которой форма сигнала в начале и конце линии одинакова, т. е. все ординаты кривой напряжения и тока в конце линии прямо пропорциональны соответствующим ординатам кривой в начале линии. Такие соотношения имеют место в тех случаях, когда коэффициент затухания волны, а также фазовая скорость на всех частотах одинаковы. Неодинаковое затухание на разных частотах вносит амплитудные искажения, а неодинаковая фазовая скорость вызывает фазовые искажения.

Таким образом, при неискаженной передаче сигналов требуется, чтобы коэффициент затухания α не зависел от частоты, а коэффициент фазы β был пропорционален частоте, в результате фазовая скорость $v = \omega/\beta$ получается не зависящей от частоты. При этом волновое сопротивление линии также не зависит от частоты. Необходимые соотношения между параметрами линии, при которых происходит неискаженная передача сигналов, выполняются при

$$Z_c = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{(r_0/L_0) + j\omega}{(g_0/C_0) + j\omega}}. \quad (12.50)$$

Из полученного выражения следует, что при $L_0/C_0 = r_0/g_0$ волновое сопротивление Z_c не зависит от частоты и равно вещественному значению:

$$Z_c = z_c = \sqrt{L_0/C_0} = \sqrt{r_0/g_0}. \quad (12.51)$$

При этом аргумент $\Phi = 0$; коэффициент распространения

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{r_0 g_0 \left(1 + j\omega \frac{L_0}{r_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{g_0}\right)} = \\ &= \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta. \end{aligned} \quad (12.52)$$

Таким образом, если считать, что первичные параметры линии (r_0 , L_0 , C_0 , g_0) не зависят от частоты, то коэффициент затухания

$$\alpha = \sqrt{r_0 g_0}. \quad (12.53)$$

а коэффициент фазы

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (12.54)$$

Неискаженная линия имеет и минимальное затухание, определяемое по формуле (12.53).

Ввиду того что волновое сопротивление линии без искажений имеет только вещественную составляющую при согласованной активной нагрузке, напряжение и ток в любой точке линии совпадают по фазе, а отношения мгновенных значений напряжения и тока в любой точке линии

$$u/i = \sqrt{L_0/C_0},$$

откуда

$$L_0 i^2/2 = C_0 u^2/2. \quad (12.55)$$

Следовательно, на любом участке такой линии энергия магнитного поля в каждый момент времени равна энергии электрического поля на том же участке.

На практике отношение L_0/r_0 обычно значительно меньше C_0/g_0 . В результате затухание линии всегда превышает минимальное. Наилучшим средством для приближения первичных параметров к оптимальному соотношению $L_0/C_0 = r_0/g_0$ является искусственное увеличение индуктивности путем включения в линию через определенные расстояния индуктивных катушек или путем применения кабеля с жилами, обмотанными тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью. Однако с увеличением индуктивности L_0 фазовая скорость уменьшается, в результате растет время распространения сигнала между передающим и приемным пунктами линии, которое, в частности, для телефонных каналов и систем телемеханики не должно превышать определенных норм.

Большинство линий передачи информации не обладают свойствами неискажающих линий. Поэтому искажения сигналов устраняют, применяя дополнительные устройства типа фильтров, корректирующих контуров, усилителей и других устройств, специально включаемых в линию передачи сигналов.

Для измерения сопротивления нагрузки Z_2 на высоких частотах ($\lambda < 10$ м) часто используют *измерительную* линию. Измеряемое сопротивление нагрузки Z_2 присоединяют к концу такой линии. Затем на линии с помощью специального прибора (индикатора) отмечается расстояние x_1 до ближайшего к нагрузке минимального значения напряжения. Одновременно с этим измеряют величины минимального ($U_{\min}$) и максимального ($U_{\max}$) значений напряжений (см. рис. 12.9).

Входное сопротивление линии в точке x_1 с учетом сопротивления нагрузки Z_2

$$Z_{\text{вх}}(x_1) = z_c \frac{Z_2 + jz_c \operatorname{tg}(\beta x_1)}{z_c + jZ_2 \operatorname{tg}(\beta x_1)}. \quad (12.56)$$

С другой стороны, в точке с минимальным значением напряжения входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(x_1) = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = \frac{z_c I_{\min}}{I_{\max}} = z_c K_6. \quad (12.57)$$

Приравнявая правые части равенств (12.56) и (12.57), получаем

$$Z_2 = z_c \frac{K_6 - j \operatorname{tg}(\beta x_1)}{1 - j K_6 \operatorname{tg}(\beta x_1)}. \quad (12.58)$$

Таким образом, измерив расстояние x_1 от конца линии до ближайшего минимального напряжения и определив коэффициент бегущей волны K_6 , можно определить комплексное значение сопротивления Z_2 нагрузки измерительной линии по формуле (12.58).

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕГАРМОНИЧЕСКИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ

ГЛАВА 13

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С НЕГАРМОНИЧЕСКИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

§ 13.1. Гармонический анализ и разложение функций

Любая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле (имеющая на конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов),

$$f(t) = f(t + T)$$

может быть представлена в виде бесконечного тригонометрического (гармонического) ряда:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

где A_0 — постоянная составляющая; k — номер (порядок) гармоники; A_{km} — амплитуда k -й гармоники; ψ_k — начальная фаза k -й гармоники.

Таким образом, несинусоидальная периодическая функция представляет собой сумму синусоид кратных частот $f_k = kf_1$ с начальными фазами ψ_k , где $f_1 = 1/T$ — основная частота.

Поскольку каждая гармоника может иметь свою амплитуду и начальную фазу, то тот же ряд можно представить в виде сумм синусоид и косинусоид, каждая из которых имеет нулевую начальную фазу:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A'_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} A''_{km} \cos k\omega t,$$

где $(A'_{km})^2 + (A''_{km})^2 = A_{km}^2$; $A''_{km}/A'_{km} = \operatorname{tg} \psi_k$. При $A'_{km} < 0$ угол ψ_k находится в пределах $0 \leq \psi_k \leq \pi$, а при $A'_{km} > 0$ — в пределах $\pi \leq \psi_k \leq 2\pi$, т. е.

$$A'_{km} = A_{km} \cos \psi_k; \quad A''_{km} = A_{km} \sin \psi_k.$$

С помощью комплексных чисел функцию $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{jV^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{jk\omega t} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* e^{-jk\omega t} \right),$$

где

$$\dot{A}_k = \frac{A_{km}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_k}; \quad \dot{A}_k^* = \frac{A_{km}}{\sqrt{2}} e^{-j\psi_k}$$

комплексные значения синусоидально изменяющихся функций (гармоник). Наконец, функцию $f(t)$ можно записать в следующем виде:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{j\sqrt{2}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}.$$

Постоянная составляющая является средним значением функции за период основной частоты:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

так как среднее за период значение вращающегося вектора

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{A}_k e^{jk\omega t} dt = \frac{1}{k2\pi} \int_0^{k2\pi} \dot{A}_k e^{jk\omega t} d(k\omega t) = 0.$$

Графически полученный интеграл может быть представлен в виде окружности радиуса $A_k/k2\pi$.

Комплексное значение любой гармонической составляющей

$$\dot{A}_k = \frac{1}{\sqrt{2} T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt,$$

если функция $f(t)$ выражена в комплексной форме. Действительно, поскольку $e^{jq\omega t} e^{-jk\omega t} = e^{j(q-k)\omega t}$ и $e^{jk\omega t} e^{-jq\omega t} = e^{-j(q-k)\omega t}$, то только при $q = k$ получаем $e^{j(q-k)\omega t} = e^{-j(q-k)\omega t} = 1$ и, следовательно, только одно слагаемое после умножения на $e^{-jk\omega t}$ и в результате интегрирования не обращается в нуль:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{A}_k e^{jk\omega t} e^{-jk\omega t} dt = \dot{A}_k.$$

Таким способом может быть выполнено разложение заданной функции $f(t)$ в гармонический ряд. Ту же операцию разложения можно выполнить и в тригонометрической форме:

$$A'_{km} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f(t) \cos(k\omega t) d(k\omega t);$$

$$A''_{km} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f(t) \sin(k\omega t) d(k\omega t).$$

Известен ряд приближенных методов разложения функций в гармонический ряд. Практически удается ограничить разложение в ряд несколькими гармониками, сумма которых отображает заданную функцию.

Для иллюстрации этого положения целесообразно рассмотреть цепь, содержащую постоянное сопротивление и идеальный выпря-

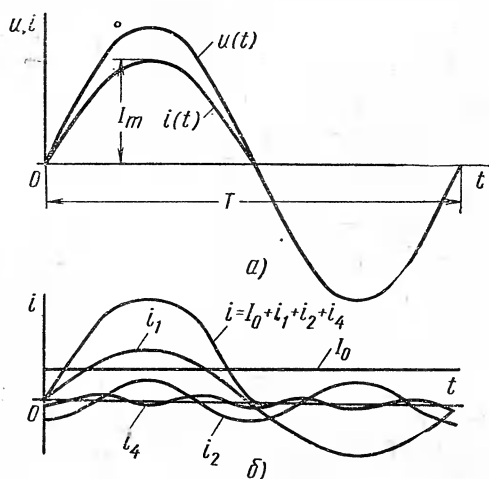


Рис. 13.1

митель при синусоидально изменяющемся напряжении. В заданных условиях можно считать, что ток $i(t)$ изображается одной полу-волной синусоиды (рис. 13.1, а) с амплитудой I_m :

$$i = \begin{cases} I_m \sin \omega t & \text{при } 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{при } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

или

$$i = \begin{cases} \frac{I_m}{j2} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) & \text{при } 0 \leq t \leq T/2; \\ 0 & \text{при } T/2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Тогда

$$I_0 = \frac{I_m}{j4\pi} \int_0^\pi (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) d(\omega t) = \frac{I_m}{\pi};$$

$$I_k = \frac{I_m}{j2\pi} \int_0^\pi (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-jk\omega t} d(\omega t).$$

В результате получается следующий ряд:

$$i = \frac{I_m}{\pi} + \frac{I_m}{2} \sin \omega t - 2 \frac{I_m}{\pi} \left(\frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \dots \right).$$

На рис. 13.1, б показаны постоянная составляющая, первая, вторая и четвертая гармоники, а также суммарная кривая $i = I_0 + i_1 + i_2 + i_4$, которая достаточно хорошо совпадает с заданной функцией.

При разложении периодических функций на гармоники следует иметь в виду условия симметрии. Если функция нечетная, т. е. имеет симметрию относительно начала координат (рис. 13.2, а): $f(t) = -f(-t)$, то гармонический ряд должен состоять из синусов с начальными фазами $\psi_k = 0$. Если функция четная, т. е. имеет симметрию относительно оси ординат (рис. 13.2, б): $f(t) = f(-t)$, то гармонический ряд должен состоять из синусов с начальными фазами $\psi_k = \pi/2$. Если функция симметрична относительно оси абсцисс (рис. 13.2, в), т. е. $f(t) = -f(t + \pi)$, то гармонический ряд должен состоять из гармоник нечетного порядка: $k = 2s + 1$, где s — целое число. Если функция одновременно симметрична как относительно оси ординат, так и относительно оси абсцисс, то гармонический ряд должен состоять только из синусов нечетного порядка.

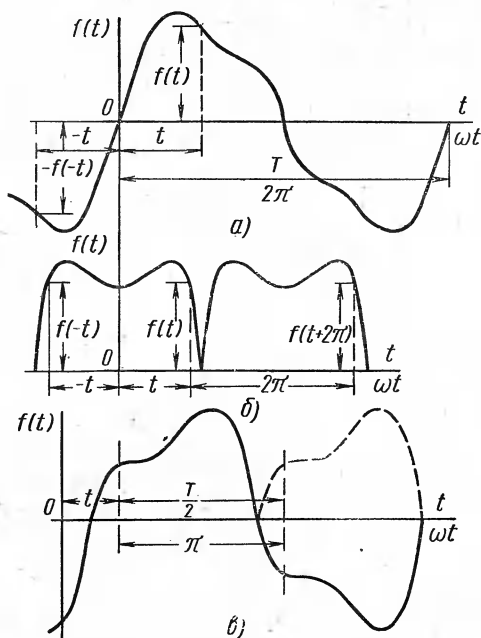


Рис. 13.2

§ 13.2. Расчет установившихся процессов в линейных цепях

Разложение периодических функций на гармоники позволяет рассматривать действительный несинусоидальный установившийся режим в линейных цепях как совокупность взаимно налагающихся синусоидальных режимов кратных частот. Например, если периодическая функция э. д. с., действующей в цепи, несинусоидальна, то можно считать, что одновременно действует целый ряд синусоидальных э. д. с. кратных частот:

$$e(t) = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{i\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{\mathcal{E}}_k e^{jk\omega t} - \mathcal{E}_k^* e^{-jk\omega t}).$$

Для каждой э. д. с. должны быть известны частота $k\omega$ (номер гармоники) и комплексное значение э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}_k$. Если цепь линейна,

то действие каждой э. д. с. можно рассматривать отдельно. При этом для каждой гармоники э. д. с. цепь следует представить в виде эквивалентной схемы — схемы замещения с соответствующими параметрами. Эквивалентные схемы, составленные для каждой из кратных частот, получаются при этом взаимно независимыми. В каждой схеме токи и напряжения имеют ту же частоту, что и все активные параметры — токи источников тока и э. д. с. Найденные при этом токи и напряжения определяют частичный рабочий режим цепи. Результирующие токи и напряжения для какого-либо участка цепи могут быть определены путем суммирования всех гармоник по принципу наложения.

Для каждого частичного синусоидального режима справедливы законы электрического состояния цепей:

для узлов

$$\sum \dot{I}_k = \sum \dot{J}_k,$$

для контуров

$$\sum Z_k \dot{I}_k = \sum \dot{\mathcal{E}}_k.$$

Поэтому для расчета цепей применимы методы контурных токов, узловых потенциалов, преобразования цепей и т. д.

Таким образом, расчет несинусоидальных режимов для линейных цепей сводится к расчету ряда синусоидальных режимов кратных частот и суммированию гармоник.

В случае последовательной rLC -цепи для k -й гармоники тока $\dot{I}_k$ в комплексной форме справедливы следующие выражения:

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}_k}{r + jk\omega L + \frac{1}{jk\omega C}} = \frac{\dot{U}_k}{r + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)}$$

или

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}_k}{Z_k} = \frac{\dot{U}_k}{z_k e^{j\varphi_k}},$$

где

$$z_k = \sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{k\omega L - (1/k\omega C)}{r}.$$

При этом для $k=0$ полное сопротивление $Z(0) = \infty$, так как наличие конденсатора приводит к размыканию цепи при постоянном токе.

§ 13.3. Особенности несинусоидальных режимов

Сопротивления отдельных ветвей любой цепи различны для разных частот. Прежде всего это относится к реактивным сопротивлениям и проводимостям, так как реактивное сопротивление ветви с постоянной индуктивностью L $x_{kL} = k\omega L$, а реактивная проводимость ветви с постоянной емкостью C $b_{kC} = k\omega C$.

Для ветви, обладающей значительным индуктивным сопротивлением на основной частоте (по сравнению с активным сопротивлением), относительная величина каждой высшей гармоники напряжения больше, чем у тока. Наоборот, для ветви, обладающей большой емкостной проводимостью на основной частоте (по сравнению с активной проводимостью), относительная величина каждой высшей гармоники тока больше, чем у напряжения.

Для пояснения отмеченных положений следует рассмотреть простейшие примеры.

Пусть напряжение, приложенное к индуктивной катушке, не синусоидально. При этом с помощью гармонического анализа установлено, что если амплитуда основной гармоники напряжения составляет 100%, то амплитуда третьей гармоники — 15%, амплитуда пятой гармоники — 10%. Последующие гармоники имеют меньшие значения и не принимаются во внимание. При определении состава гармоник тока активным сопротивлением можно пренебречь.

Для определения составляющих гармоник тока ток основной гармоники можно принять за 100%. Тогда амплитуда третьей гармоники тока составляет $15:3 = 5\%$, амплитуда пятой гармоники — $10:5 = 2\%$. Таким образом, форма кривой тока оказывается ближе к синусоиду, чем форма кривой напряжения. Иначе говоря, индуктивность как бы сглаживает кривую тока, приближая ее к синусоидальной форме.

Если принять напряжение на емкости имеющим такую же форму, как на катушке, то можно показать, что кривая тока в емкости искажена сильнее, чем кривая напряжения. Действительно, пусть ток основной гармоники составляет 100%. Тогда амплитуда третьей гармоники тока составляет $15 \cdot 3 = 45\%$, амплитуда пятой гармоники — $10 \cdot 3 = 30\%$. На рис. 13.3, а, б построены кривые напряжения и тока в емкости за одну половину периода при указанных соотношениях в амплитудах. Начальные фазы у всех составляющих напряжения приняты равными нулю, а у каждой гармоники тока начальная фаза равна $\pi/2$ (каждая составляющая тока опережает по фазе соответствующую гармонику напряжения на угол $\pi/2$). Из сравнения кривых напряжения и тока следует, что форма кривой тока в ветви с конденсатором отличается от синусоидальной; форма же кривой напряжения на

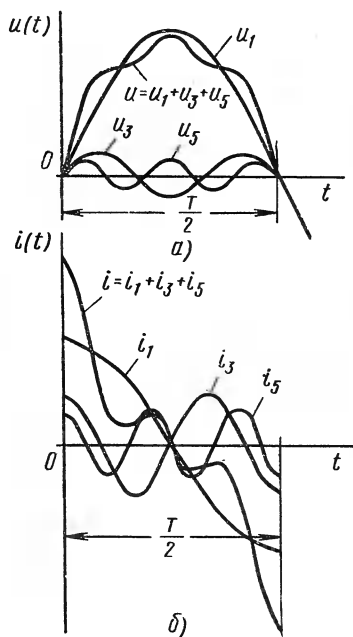


Рис. 13.3

катушке, пусть ток основной гармоники составляет 100%. Тогда амплитуда третьей гармоники тока составляет $15 \cdot 3 = 45\%$, амплитуда пятой гармоники — $10 \cdot 3 = 30\%$. На рис. 13.3, а, б построены кривые напряжения и тока в емкости за одну половину периода при указанных соотношениях в амплитудах. Начальные фазы у всех составляющих напряжения приняты равными нулю, а у каждой гармоники тока начальная фаза равна $\pi/2$ (каждая составляющая тока опережает по фазе соответствующую гармонику напряжения на угол $\pi/2$). Из сравнения кривых напряжения и тока следует, что форма кривой тока в ветви с конденсатором отличается от синусоидальной; форма же кривой напряжения на

емкости менее искажена. Иначе говоря, емкость искажает кривую тока и сглаживает кривую напряжения*.

В пределах каждого частичного режима (для каждой гармоники) в электрической цепи могут возникать резонансные явления:

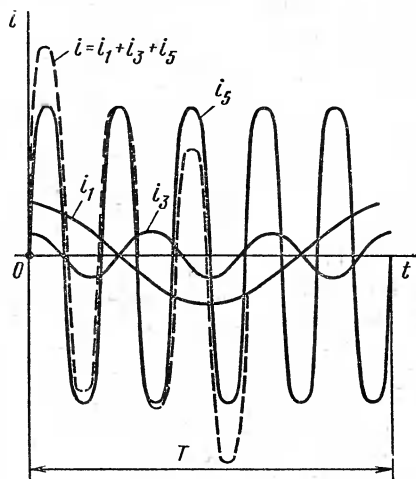


Рис. 13.4

резонанс напряжений при последовательном соединении индуктивности L и емкости C , когда $x_{kL} = x_{kC}$ или $k\omega L = 1/k\omega C$, и *резонанс токов* при параллельном соединении индуктивности L и емкости C (при малом активном сопротивлении ветвей), когда $b_{kL} = b_{kC}$ или $1/k\omega L = k\omega C$.

В таких случаях форма кривой напряжения (при резонансе напряжений) или тока (при резонансе токов) может отличаться от синусоидальной даже при почти синусоидальных изменениях внешних возмущающих воздействий. При этом определяющей является составляющая той гармоники, частота которой равна (достаточно близка) ча-

стоте собственных колебаний соответствующего эквивалентного контура. Иногда при резонансе возникают такие нежелательные явления, как перенапряжения.

Пример 13.1. В неразветвленной цепи, состоящей из активного сопротивления $r=5$ Ом, индуктивности $L=1$ мГ и емкости $C=1$ мкФ, действует несинусоидальная э. д. с.

$$e = [100 \sin \omega t + 10 (\sin 3\omega t + \sin 5\omega t)] \text{ В.}$$

при основной частоте $f_1=1000$ Гц. Определить ток в цепи.

Решение. Для первой гармоники

$$x_{1L} = 2\pi f_1 L = 6,3 \text{ Ом; } x_{1C} = \frac{1}{2\pi f_1 C} = 159,3 \text{ Ом.}$$

Поэтому составляющая тока основной частоты практически определяется емкостным сопротивлением:

$$I_{1m} = \frac{100}{159,3 - 6,3} = 0,7 \text{ А, или } i_1 = 0,7 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ А.}$$

Составляющая тока третьей гармоники при $x_{3L} = 18,8$ Ом и $x_{3C} = 53,1$ Ом также в большей мере определяется емкостным сопротивлением:

$$I_{3m} = \frac{10}{53,1 - 18,8} = 0,3 \text{ А, или } i_3 = 0,3 \sin \left(3\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ А.}$$

* Активное сопротивление ветви также изменяется при изменении частоты. Однако эта зависимость определяется более сложными физическими явлениями и поэтому излагается в теории электромагнитного поля при рассмотрении поверхностного эффекта.

Составляющая тока пятой гармоники при $x_{5L}=31,5$ Ом и $x_{5C}=31,9$ Ом почти полностью определяется активным сопротивлением, так как $|x_{5L}-x_{5C}|=|31,5-31,9|=0,4 \ll r$:

$$I_{5m} = \frac{10}{5} = 2,0 \text{ А, или } i_5 = 2 \sin 5\omega t \text{ А.}$$

Таким образом, с точностью до пятой гармоники ток в цепи

$$i = i_1 + i_3 + i_5 = 0,7 \cos \omega t + 0,3 \sin \left(3\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + 2 \sin 5\omega t.$$

В результате резонанса напряжений ток пятой гармоники оказывается значительно больше токов гармоник на других частотах (рис. 13.4).

Чем меньше активное сопротивление, тем резче выявляется резонансный эффект. Кривая результирующего тока $i = i_1 + i_3 + i_5$ почти повторяет кривую тока пятой гармоники.

§ 13.4. Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений; коэффициенты, характеризующие форму кривых токов и напряжений

Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений определяют так же, как и для синусоидальных токов и напряжений:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$

Если представить несинусоидальную периодическую функцию гармоническим рядом, то

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k e^{jk\omega t} - \sum_{k=1}^{\infty} I_k e^{-jk\omega t} \right) \right]^2 dt}.$$

Так как интегралы вида

$$\frac{1}{T} \int_0^T (I_k e^{jk\omega t} I_k e^{-jk\omega t}) dt = I_k^2,$$

а все остальные интегралы равны нулю (каждый из них графически может быть представлен в виде замкнутой окружности), то ток

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

и, следовательно, напряжение

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}.$$

Таким образом, действующее значение тока (напряжения) равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений

всех гармоник. В случаях нечетных функций постоянная составляющая отсутствует и ток

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_{в.ч.}^2},$$

где слагаемое $I_{в.ч.}^2$ учитывает действие всех высших гармоник.

Иногда для характеристики формы кривых токов (напряжений), симметричных относительно оси абсцисс, пользуются следующими величинами: коэффициентом формы, коэффициентом амплитуды и коэффициентом искажения.

Коэффициентом формы называют отношение действующего значения функции A к ее среднему (по абсолютной величине) значению за половину периода $A_{ср}$:

$$K_{\phi} = A/A_{ср}.$$

Для синусоидальной функции

$$K_{\phi} = \pi/2\sqrt{2} = 1,11.$$

Коэффициентом амплитуды называют отношение максимального значения функции $A_{\max}$ к ее действующему значению A :

$$K_a = A_{\max}/A.$$

Для синусоидальной функции $K_a = \sqrt{2} = 1,41$.

Коэффициент искажения определяют как отношение действующего значения основной гармоники A_1 к действующему значению функции A :

$$K_n = A_1/A.$$

Для синусоидальной функции $K_n = 1$.

§ 13.5. Мощность при несинусоидальных токах и напряжениях

Мгновенная мощность при несинусоидальных токах и напряжениях

$$\begin{aligned} p = ui &= \left[U_0 + \frac{1}{iV^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{U}_k e^{jk\omega t} - \sum_{k=1}^{\infty} \dot{U}_k^* e^{-jk\omega t} \right) \right] \times \\ &\times \left[I_0 + \frac{1}{iV^2} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \dot{I}_q e^{jq\omega t} - \sum_{q=1}^{\infty} \dot{I}_q^* e^{-jq\omega t} \right) \right] = \\ &= U_0 I_0 + \frac{1}{iV^2} \sum_{q=1}^{\infty} U_0 (\dot{I}_q e^{jq\omega t} - \dot{I}_q^* e^{-jq\omega t}) + \\ &+ \frac{1}{iV^2} \sum_{k=1}^{\infty} I_0 (\dot{U}_k e^{jk\omega t} - \dot{U}_k^* e^{-jk\omega t}) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k, q=1}^{\infty} (\dot{U}_k e^{jk\omega t} - \dot{U}_k^* e^{-jk\omega t}) (\dot{I}_q e^{jq\omega t} - \dot{I}_q^* e^{-jq\omega t}). \end{aligned}$$

Так как при $k=q$ произведение $e^{jk\omega t} e^{-jq\omega t} = 1$, то активная мощность

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{U}_k I_k^* + \dot{U}_k^* I_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k.$$

В пределах каждой гармоники наряду с понятием активной мощности $P_k = U_k I_k \cos \varphi_k$ используют понятия полной $S_k = \dot{U}_k I_k^*$ и реактивной $Q_k = U_k I_k \sin \varphi_k$ мощностей. Суммирование значений активной мощности можно производить только для характеристики процессов в цепи, происходящих в течение целого числа периодов основной частоты. Такое суммирование можно производить как в пределах каждого частичного режима для одной частоты:

$$P_{kC} = \sum P_k,$$

так и для нескольких частичных режимов:

$$P_C = \sum P_{kC}.$$

Для замкнутой цепи при несинусоидальном режиме $P_{kC} = 0$; $P_C = 0$.

Суммирование значений реактивной мощности имеет смысл только в пределах каждого частичного режима (для определенной частоты): $Q_{kC} = \sum Q_k$. Для всей замкнутой цепи $Q_{kC} = 0$ (как и для цепи с синусоидальным током).

§ 13.6. Влияние индуктивности и емкости на форму кривых тока и напряжения в разветвленной цепи

Зависимость реактивных (индуктивных и емкостных) сопротивлений и проводимостей от частоты может использоваться для изменения формы кривой тока (напряжения). Часто требуется выделить действие э. д. с. (тока источника тока) одной частоты или, наоборот, устранить действие э. д. с. (тока источника тока) определенной частоты. При этом, как уже было отмечено, учитываются условия частичного резонанса токов или напряжений.

Допустим, что в разветвленной цепи (рис. 13.5) действуют две э. д. с. с одинаковыми амплитудами, но с частотами, отличающимися друг от друга в 1000 раз. Необходимо создать такие условия, при которых в одной из ветвей ток пропорционален напряжению с меньшей частотой, а в другой ветви — с большей.

Для решения поставленной задачи достаточно иметь в одной ветви индуктивность L , а в другой — емкость C . Поскольку реактивное сопротивление, обусловленное индуктивностью, про-

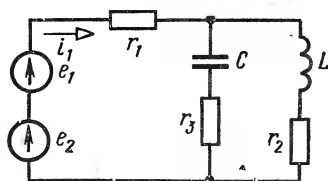


Рис. 13.5

порционально частоте, то при большей частоте оно в 1000 раз больше, чем при меньшей, а для реактивного сопротивления, обусловленного емкостью, наоборот. Поэтому приближенно (пренебрегая активными сопротивлениями r_1 , r_2 и r_3) можно считать, что в ветви с индуктивностью отсутствует составляющая тока с большей частотой, а в ветви с емкостью — с меньшей частотой.

Следует также рассмотреть случай, когда в цепи действует несинусоидальная э. д. с., содержащая весь спектр гармоник. При этом требуется в одной из ветвей создать такие условия, при которых ток в ней был бы практически пропорционален э. д. с. некоторой определенной частоты ω_k ; в другой ветви, наоборот,

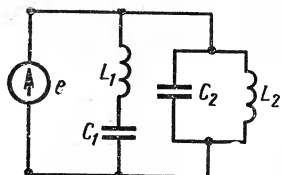


Рис. 13.6

необходимо исключить возможность появления токов данной частоты. Для этого в первую ветвь последовательно включают катушку с индуктивностью L_1 и конденсатор с емкостью C_1 (рис. 13.6), причем необходимо выбрать их так, чтобы индуктивность была достаточно велика, а емкость мала (сравниваются сопротивления $k\omega L$ и $1/k\omega C$). При этом собственная частота

колебаний должна равняться заданной частоте, т. е. $f_k = 1/2\pi \sqrt{LC}$. В таком случае при $\omega_k = k\omega$ реактивные сопротивления взаимно компенсируются; при других частотах одно из сопротивлений настолько велико, что ток соответствующей частоты практически отсутствует. Во вторую ветвь параллельно включают катушку с индуктивностью L_2 и конденсатор с емкостью C_2 . Величину емкости и индуктивности выбирают так, чтобы при заданной частоте ω_k наблюдался резонанс токов. В этом случае при $\omega_k = k\omega$ эквивалентное сопротивление катушки и конденсатора весьма велико и ток в ветви отсутствует.

Пример 13.2. Найти ток i в схеме на рис. 13.5, если

$$e_2 = 0; e_1 = (30 + 15 \sin \omega t + 10 \sin 3\omega t) \text{ В};$$

$$r_1 = 1 \text{ Ом}; r_2 = 0,5 \text{ Ом}; \omega L = 1 \text{ Ом}; 1/\omega C = 9 \text{ Ом}; r_3 = 0.$$

Решение. Постоянная составляющая тока, замыкающегося через индуктивность,

$$I_0 = \mathcal{E}_0 / Z(0) = 30 / 1,5 = 20 \text{ А}.$$

Комплексная амплитуда тока основной частоты

$$I_{1m} = \frac{\dot{\mathcal{E}}_{1m}}{Z(j\omega)} = \frac{15}{1,63 + j1,09} = 7,65 e^{-j33^\circ 36'} \text{ А}.$$

Комплексное сопротивление цепи для третьей гармоники

$$Z(j3\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j3\omega L) \left(-j \frac{1}{3\omega C} \right)}{r_2 + j \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right)} = 19 - j3 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока третьей гармоники

$$I_{3m} = \frac{\dot{\mathcal{E}}_{3m}}{Z(j3\omega)} = \frac{10}{19 - j3} = 0,52 e^{j8^\circ 54'} \text{ А}.$$

Мгновенное значение суммарного тока

$$i = I_0 + i_1 + i_3 = 20 + 7,65 \sin(\omega t - 33^\circ 36') + 0,52 \sin(3\omega t + 8^\circ 54') \text{ А.}$$

В сравнительно простых схемах установившееся значение периодической функции тока (напряжения) может быть получено не только в виде суммы гармоник, но и в более удобной аналитической форме, справедливой для определенного интервала, например для полупериода. Для рассматриваемого интервала дифференциальное уравнение записывается относительно искомой функции (напряжения, тока). Решение этого уравнения будет содержать неизвестное начальное значение функции, которое определяют из условия периодичности.

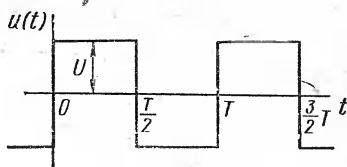


Рис. 13.7

Пусть, например, неразветвленная цепь состоит из последовательно соединенных активного сопротивления r и конденсатора с емкостью C . На зажимах цепи действует знакопеременное напряжение в виде прямоугольных импульсов с периодом T (рис. 13.7). Требуется найти закон изменения напряжения на конденсаторе u_C и ток i в цепи.

Для первого полупериода справедливо уравнение

$$u_C + ri = U \text{ или } u_C + rC \frac{du_C}{dt} = U,$$

решение которого имеет следующий вид:

$$u_C = U + Ae^{-t/rC}.$$

При $t=0$ $u_C = u_C(0)$. Следовательно, $A = u_C(0) - U$. Кривая напряжения на конденсаторе u_C , так же как и заданная кривая $u(t)$, симметрична относительно оси времени и должна быть непрерывной при наличии емкостного элемента. Таким образом, $u_C(T/2) = -u_C(0)$, что приводит к уравнению

$$u_C\left(\frac{T}{2}\right) = U + [u_C(0) - U]e^{-T/2rC} = -u_C(0),$$

откуда

$$u_C(0) = U \frac{e^{-\alpha} - 1}{e^{-\alpha} + 1},$$

где $\alpha = T/2rC$.

Окончательное выражение для напряжения на конденсаторе в первом полупериоде имеет вид

$$u_C = U \left[1 - \frac{2e^{-t/\tau}}{1 + e^{-\alpha}} \right] = U \left[1 - \frac{2e^{\alpha}}{1 + e^{\alpha}} e^{-t/\tau} \right],$$

где $\tau = rC$.

Так как ток в цепи выражается через напряжение по формуле $i = C \frac{du_C}{dt}$, получаем

$$i = \frac{U}{r} \frac{2e^{-t/\tau}}{(1 + e^{-\alpha})} = \frac{U}{r} \frac{2e^{\alpha}}{(1 + e^{\alpha})} e^{-t/\tau}.$$

В течение второго полупериода кривые напряжения u_c и тока i имеют тот же вид, но противоположные знаки. Полученные выражения для u_c и i определяют решения в замкнутой форме.

§ 13.7. Несинусоидальные режимы в симметричных многофазных цепях

Для анализа процессов в многофазных цепях целесообразно рассмотреть симметричные трехфазные цепи, в которых условия возникновения и существования высших гармоник одинаковы для всех фаз, что возможно, например, при включении одинаковых нелинейных элементов в каждую из фаз симметричной многофазной цепи (между каждой фазой и нейтралью) или в трехфазных генераторах с симметричной магнитной системой, а также при симметричном расположении обмоток и одинаковом числе витков. Кривые изменения во времени фазных токов (напряжений) одинаковы по величине, но сдвинуты по фазе на (s/m) -ю часть периода основной частоты, если s — любое целое число, а m — число фаз. На частоте k -й гармоники этот сдвиг по фазе увеличивается в k раз.

Для симметричной трехфазной цепи ($A_0 = 0$) параметры режима можно записать в следующем виде:

для фазы a

$$f_a(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega t};$$

для фазы b

$$f_b(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega t} a^{2k};$$

для фазы c

$$f_c(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega t} a^k,$$

где $a = e^{j\frac{2}{3}\pi}$ — оператор поворота вектора на комплексной плоскости или оператор изменения аргумента комплексного числа. Так как $a^{3s} = 1$, то при $k = 3s$ соответствующие гармоники во всех фазах совпадают не только по величине, но и по фазе. т. е. в любой момент времени имеют одинаковые мгновенные значения. Следовательно, эти величины составляют систему нулевой последовательности. Аналогично при $k = 3s + 1$ получается система величин прямой последовательности, а при $k = 3s + 2$ — система величин обратной последовательности.

Таким образом, в симметричной трехфазной системе вторая гармоника величин составляет систему обратной последовательности, третья — нулевой, четвертая — прямой, пятая — обратной,

шестая — нулевой и т. д. Распределение этих гармоник в многофазной цепи происходит в соответствии с указанными условиями для составляющих разных последовательностей. Во многих случаях в напряжениях генераторов и трансформаторов отсутствуют не только постоянные составляющие, но и все четные гармоники. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только нечетные составляющие. Если обмотки трехфазного генератора соединены звездой, то при несинусоидальном фазном напряжении линейные напряжения, равные разностям соответствующих фазных напряжений, не содержат гармоник, кратных трем, так как они образуют нулевую последовательность и при вычитании их разность равна нулю. Поскольку в линейных напряжениях отсутствуют гармоники, кратные трем, то отношение линейного напряжения к фазному меньше $\sqrt{3}$. Действительно, если фазное напряжение $U_{\phi} = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}$, то линейное напряжение $U_{\pi} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + \dots}$, откуда $U_{\pi}/U_{\phi} < \sqrt{3}$.

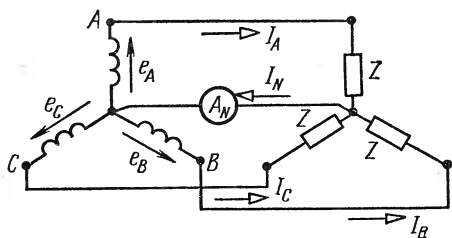


Рис. 13.8

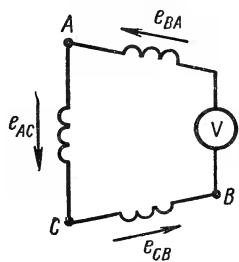


Рис. 13.9

При симметричной нагрузке, соединенной звездой, фазные токи основной составляющей и всех высших гармоник, за исключением гармоник, кратных трем, образуют системы прямой и обратной последовательностей и их сумма равна нулю. Гармоники порядка, кратного трем, образуют систему нулевой последовательности и при наличии нейтрального провода создают в нем ток, равный утроенной сумме токов высших составляющих нулевой последовательности (рис. 13.8):

$$I_N = 3 \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}$$

При отсутствии нейтрального провода токи нулевой последовательности в каждой из фаз равны нулю. Поэтому между нейтралями генератора и симметричной нагрузкой возникает напряжение

$$U_N = \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + U_{15}^2 + \dots},$$

где $U_3, U_9, U_{15}, \dots$ — напряжения третьей, девятой, пятнадцатой и т. д. гармоник фазного напряжения генератора. При соединении фаз трехфазного генератора треугольником сумма э. д. с. основной и гармоник, не кратных трем, всегда равна нулю.

Так как гармоники э. д. с. генератора, кратные трем, равны друг другу и совпадают по фазе, то их сумма равна утроенной величине высших гармоник порядка, кратного трем. Для измерения этих гармоник можно разомкнуть обмотки генератора и между двумя концами включить вольтметр (рис. 13.9), который и покажет искомую э. д. с.

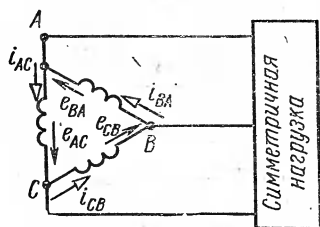


Рис. 13.10

$$\mathcal{E} = 3 \sqrt{\mathcal{E}_3^2 + \mathcal{E}_9^2 + \mathcal{E}_{15}^2 + \dots}$$

Если обмотки генератора соединить в треугольник (рис. 13.10), то э. д. с. нулевой последовательности вызывают внутренний ток в обмотках генератора. Этот ток существует и при отсутствии нагрузки, т. е. при разомкнутой внешней цепи. При этом напряжения на зажимах треугольника не имеют составляющих нулевой последовательности, так как э. д. с. нулевой последовательности, вызывающие ток в треугольнике, равны падениям напряжений на внутренних сопротивлениях обмоток генератора. В данном случае

$$U_\phi = U_\lambda = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_7^2 + \dots}$$

Если к зажимам обмоток генератора (рис. 13.10), соединенных треугольником, присоединить нагрузку, то вследствие отсутствия в напряжениях гармоник нулевой последовательности токи во внешней цепи не имеют гармоник, кратных трем. При симметричной нагрузке

$$I_\phi = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots}; \quad I_\lambda = \sqrt{3} \sqrt{I_1^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + \dots}$$

Таким образом, отношение линейного тока к фазному

$$I_\lambda / I_\phi < \sqrt{3}.$$

В несимметричной трехфазной системе токи (и напряжения) фаз каждой из гармоник могут быть несимметричными. При этом разложение системы токов (напряжений) каждой гармоники на симметричные составляющие в общем случае приводит к возникновению токов (напряжений) всех трех последовательностей.

§ 14.1. Основные понятия и определения

Электрическим фильтром называют четырехполюсник, предназначенный для выделения (пропускания) сигналов определенной (заданной) частоты.

Существуют различные способы классификации фильтров. В зависимости от пропускаемого спектра частот фильтры подразделяют на четыре основных вида:

- 1) фильтры нижних частот (низкочастотные) — ФНЧ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от $\omega_1 = 0$ до ω_2 (рис. 14.1, а);
- 2) фильтры верхних частот (высокочастотные) — ФВЧ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от ω_1 до $\omega_2 = \infty$ (рис. 14.1, б);
- 3) полосовые (полосно-пропускающие) ПФ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от ω_1 до ω_2 (рис. 14.1, в);

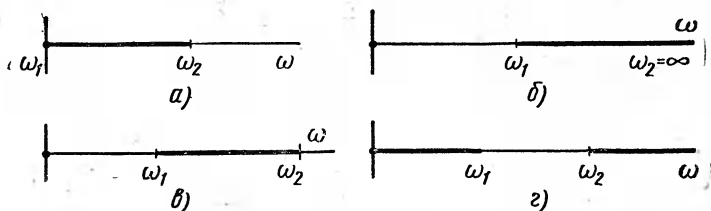


Рис. 14.1

- 4) заграждающие или режекторные (полосно-задерживающие) ЗФ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от 0 до ω_1 и от ω_2 до ∞ (рис. 14.1, г).

В зависимости от типов элементов, из которых составлены фильтры, их делят на:

- а) реактивные, состоящие из элементов L и C ;
- б) пьезоэлектрические, состоящие главным образом из кварцевых пластин;
- в) безындукционные пассивные, состоящие из элементов r и C ;
- г) активные rC -фильтры и др.

Очень часто фильтры классифицируют по способу соединения элементов: Г-, Т-, П-образные, мостовые и др. По виду частотных характеристик фильтры подразделяют на фильтры типа k и m .

Каждый фильтр должен удовлетворять определенным требованиям, которые проще всего установить применительно к идеальному низкочастотному фильтру.

На рис. 14.2 фильтр условно изображен в виде четырехполюсника с напряжением на входе $\dot{U}_1$ и сопротивлением нагрузки Z_n при напряжении на выходных зажимах $\dot{U}_2$. Пусть фильтр пропускает сигналы низкой частоты от $\omega_1 = 0$ до $\omega = \omega_2$. Комплексный

коэффициент передачи напряжения

$$K(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \dot{U}_2 / (A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2) = Z_H / (AZ_H + B), \quad (14.1)$$

где A , B , Z_H — параметры, зависящие от частоты.

Комплексный коэффициент передачи можно представить в виде

$$K(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (14.2)$$

где $K(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); $\varphi(\omega)$ — фазо-частотная характеристика (ФЧХ). В полосе пропускания для идеального фильтра справедливо равенство $U_1 = U_2$, т. е. $K(\omega) = 1$. При этом сигнал сложной формы не должен искажаться.

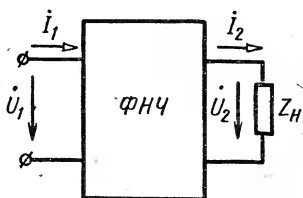


Рис. 14.2

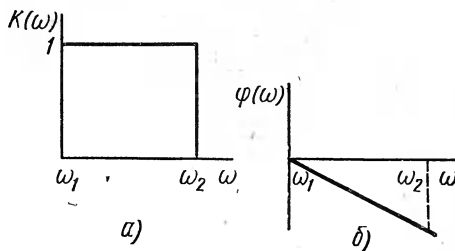


Рис. 14.3

Если напряжение на входе $u_1 = \sum_{k=1}^n U_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$ для $n\omega_1 \leq \omega_2$,

то сигнал не искажается при $K(\omega) = 1$ и $\varphi(\omega) = -\tau\omega$, т. е. при линейной фазочастотной характеристике. Действительно, сдвиг фаз k -й гармоники равен $-\tau k\omega_1$, что эквивалентно сдвигу во времени $-\tau k\omega_1 / k\omega_1 = -\tau$. Иначе говоря, каждая гармоника, проходя через фильтр, запаздывает на одно и то же время τ , поэтому форма сигнала не меняется. На рис. 14.3, а, б даны амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики фильтра. Для идеального фильтра вне полосы пропускания сигналов $K(\omega) = 0$ и форма фазочастотной характеристики может быть любой.

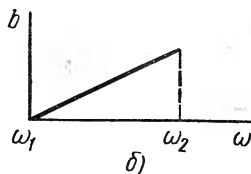
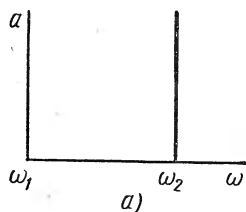


Рис. 14.4

При согласованной нагрузке комплексный коэффициент передачи напряжения

$$K(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = e^{-g} = e^{-a} e^{-jb}.$$

В полосе пропускания коэффициент затухания $a = 0$, а коэффициент фазы b изменяется по линейному закону (рис. 14.4, а, б). Если в полосе пропускания $K(\omega)$ зависит от частоты, а ФЧХ не ли-

нейна, то возникают амплитудные и фазовые искажения. На рис. 14.5, а показана кривая изменения мгновенных значений напря-

жения на входных зажимах фильтра u_1 от времени, определяемая следующим выражением:

$$u_1 = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t.$$

Пусть на выходных зажимах напряжение вследствие влияния параметров четырехполосника определяется в одном случае (рис. 14.5, б) так:

$$u'_2 = \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\omega t,$$

а в другом случае (рис. 14.5, в) — уравнением

$$u''_2 = \sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t.$$

Кривая u'_2 на рис. 14.5, б иллюстрирует амплитудные искажения, вызванные изменением амплитуды третьей гармоники,

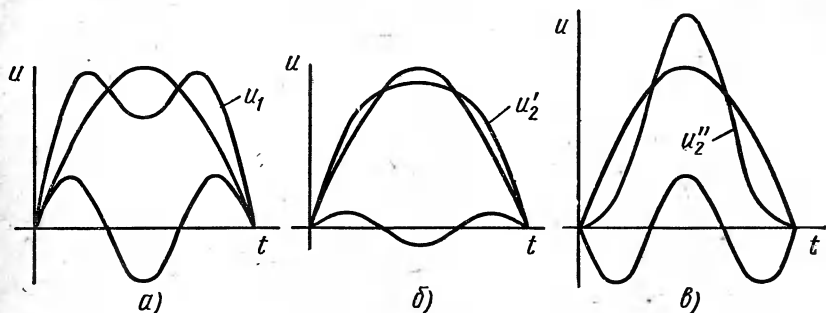


Рис. 14.5

а кривая u''_2 на рис. 14.5, в — фазовые искажения, вызванные изменением фазы третьей гармоники.

§ 14.2. Симметричные реактивные фильтры

Как уже известно, симметричный четырехполосник характеризуется следующими коэффициентами:

$$A = D = \operatorname{ch} g; \quad B = Z_c \operatorname{sh} g; \quad C = \frac{\operatorname{sh} g}{Z_c}. \quad (14.3)$$

В свою очередь характеристическое сопротивление Z_c и постоянная передачи g определяются через коэффициенты четырехполосника по формулам

$$Z_c = \sqrt{B/C}; \quad (14.4)$$

$$e^g = A + \sqrt{BC} \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} g = A. \quad (14.4a)$$

Пусть фильтр составлен из чисто реактивных элементов (индуктивных катушек и конденсаторов без потерь). Простейшие сим-

метричные фильтры имеют Т-образные (рис. 14.6, а) и П-образные (рис. 14.6, б) схемы. Коэффициент A для этих схем имеет одинако-

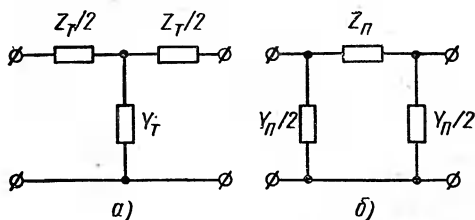


Рис. 14.6

вое выражение, которое, например, для схемы на рис. 14.6, а находим с помощью топологической формулы, учитывая, что $I_2=0$:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{A} = \frac{\sum \Pi'_k \Delta'_k}{\sum \Pi_k \Delta_k} = \frac{\frac{Z_T}{2} \frac{Z_T}{2}}{\left(Y_T + \frac{2}{Z_T}\right) \frac{2}{Z_T}} = \frac{1}{1 + \frac{Y_T Z_T}{2}},$$

откуда

$$A = 1 + \frac{Y_T Z_T}{2} \quad (14.5)$$

Аналогичным способом получаем выражение для того же коэффициента для схемы на рис. 14.6, б:

$$A = 1 + \frac{Y_P Z_P}{2}. \quad (14.6)$$

Из выражений (14.5) и (14.6) следует, что коэффициент A не может принимать мнимых значений (проводимости Y_P , Y_T и сопротивления Z_P , Z_T — мнимые числа), поэтому уравнение

$$A = \text{ch}(a + jb) = \text{ch } a \cos b + j \text{sh } a \sin b$$

распадается на два:

$$\text{sh } a \sin b = 0; \quad (14.7)$$

$$\text{ch } a \cos b = A = 1 + \frac{YZ}{2}. \quad (14.8)$$

Эти уравнения имеют два решения.

Первое решение определяется условием, при котором $\text{sh } a = 0$, и, следовательно, $a = 0$, что соответствует *полосе пропускания* сигналов или, как иногда ее называют, *зоне прозрачности*. При этом $\text{ch } a = 1$ и из уравнения (14.8)

$$\cos b = A = 1 + \frac{YZ}{2}. \quad (14.9)$$

Полученное уравнение показывает, что знаки мнимых величин Y и Z должны быть одинаковыми: если одна из них имеет индук-

тивный характер, то другая величина должна быть емкостной. Диапазон частот, удовлетворяющих уравнению (14.9), определяется соотношением

$$-1 \leq 1 + \frac{YZ}{2} \leq 1,$$

поэтому частоты, являющиеся граничными для полосы пропускания, могут быть найдены из равенств

$$-YZ = 0; \quad -YZ = 4. \quad (14.10)$$

Первое равенство определяет частоту, при которой закорачиваются продольные сопротивления Z и размыкаются поперечные проводимости Y четырехполюсника, — приемник оказывается как бы непосредственно присоединенным к источнику. Второе равенство определяет частоты, при которых каждая половина четырехполюсника, составленная из половины продольного сопротивления и половины поперечной проводимости, находится в режиме резонанса напряжений:

$$Z/2 + 2/Y = 0,$$

откуда

$$YZ + 4 = 0.$$

Характеристическое сопротивление схем зависит от частоты, так как, согласно формуле (14.4), связано с коэффициентами четырехполюсника. Для Т-образной схемы

$$Z_{cT} = \sqrt{B/C} = \sqrt{(A^2 - 1)/C};$$

для П-образной схемы

$$Z_{cП} = \sqrt{B/C} = \sqrt{B^2/(A^2 - 1)}.$$

Выразив сопротивления Z_{cT} и $Z_{cП}$ четырехполюсника через его коэффициенты, учитывая при этом (14.5) и (14.6), можно получить:

$$Z_{cT} = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{Y^2}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sqrt{1 + \frac{YZ}{4}}, \quad (14.11)$$

$$Z_{cП} = \sqrt{\frac{Z^2}{A^2 - 1}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} / \sqrt{1 + \frac{YZ}{4}}. \quad (14.12)$$

Из последних выражений видно, что в полосе пропускания, для которой, согласно (14.10), $0 \leq -YZ \leq 4$, характеристическое сопротивление является чисто активным, причем с изменением частоты оно меняется в пределах от 0 до $\sqrt{Z/Y}$ для Т-образной схемы и от $\sqrt{Z/Y}$ до ∞ для П-образной схемы. Это означает, что фильтр не может иметь одинаковый коэффициент передачи для всех частот полосы пропускания, если сопротивление приемника не изменяется.

Если, в частности, отношение Z/Y фильтра не зависит от частоты и является вещественным числом, то в выражениях (14.11)

и (14.12) от частоты зависит только произведение ZY . Экстремальное значение произведения и, следовательно, экстремальное значение Z_c определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega}(ZY) = YZ' + ZY' = 0.$$

Но так как Z/Y не зависит от частоты, то

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z}{Y}\right) = \frac{YZ' - ZY'}{Y^2} = 0,$$

откуда $YZ' = ZY'$ и, следовательно,

$$2YZ' = 2Y'Z = 0 \text{ или } Z = 0, Y = 0.$$

При этом экстремальное значение Z_c (максимальное для Т-образной и минимальное для П-образной схем) оказывается одинаковым для обеих схем и равным $\sqrt{Z/Y} = k$, где k — вещественное число, не зависящее от частоты. Сопротивление приемника выбирают равным этой величине, поскольку вблизи своего экстремального значения характеристическое сопротивление Z_c медленно меняется с изменением частоты. В полосе пропускания изменяется и коэффициент фазы b , знак которого можно определить с помощью соотношений

$$B/Z_c = \operatorname{sh} g = \operatorname{sh}(a + jb) = CZ_c,$$

откуда (при $a = 0$) $j \sin b = CZ_c = Y_T Z_{cT}$ или $j \sin b = B/Z_c = Z_{\Pi}/Z_{c\Pi}$.

Таким образом, знак коэффициента фазы b равен знаку продольного сопротивления Z (поперечной проводимости Y).

Второе решение уравнений (14.7) и (14.8) определяется условием $\sin b = 0$. Так как $\operatorname{ch} a \geq 1$, то $\cos b = -1$, а уравнение (14.8) записывается в виде

$$\operatorname{ch} a = -A = -\left(1 + \frac{YZ}{2}\right). \quad (14.13)$$

В этом случае коэффициент затухания $a \neq 0$, что соответствует *полосе задерживания* сигналов (*зоне затухания*). Границы этой полосы определяются из соотношения

$$1 \leq -\left(1 + \frac{YZ}{2}\right) \leq \infty,$$

откуда

$$-YZ = 4; \quad -YZ = \infty.$$

Последнее равенство приводит в схеме фильтра к разрыву продольных сопротивлений и к короткому замыканию поперечных проводимостей. Поскольку в этом случае $A^2 - 1 = \operatorname{ch}^2 a - 1 \geq 0$, то согласно формулам (14.11) и (14.12) характеристическое сопротивление в зоне затухания становится чисто мнимым и имеет разные знаки для П- и для Т-образных схем.

Знак реактивного характеристического сопротивления можно определить, исходя из следующих рассуждений:

1. Чем больше затухание, тем меньше напряжение и ток приемника.

2. Напряжение и ток на входе фильтра мало изменяются, если в Т-образной схеме нагрузку отключить ($i_2=0$), а в П-образной — замкнуть накоротко ($U_2=0$). При этом входное сопротивление имеет такой же характер, как и Z_c (для данной частоты), что подтверждают формулы (14.11) и (14.12), если пренебречь единицей по сравнению с $A^2 = \text{ch}^2 a$:

$$Z_{сТ} = \frac{A}{Y_T} = \frac{1 + \frac{1}{2} Y_T Z_T}{Y_T} = \frac{Z_T}{2} + \frac{1}{Y_T} = Z_{вхТ};$$

$$Z_{сП} = \frac{Z_{П}}{A} = \frac{Z_{П}}{1 + \frac{Y_{П} Z_{П}}{2}} = \frac{1}{\frac{Y_{П}}{2} + \frac{1}{Z_{П}}} = Z_{вхП}.$$
(14.14)

§ 14.3. Фильтры типа k

Фильтры нижних частот. Фильтрами типа k называют такие фильтры, у которых сопротивления Z и $1/Y$ в Т- и П-образных схемах представляют собой взаимно обратные двухполюсники, т. е. $Z/Y = k^2$.

На рис. 14.7, $a, б$ изображены простейшие Т- и П-образные схемы фильтра типа k низкой частоты. В этих схемах $Z = j\omega L$ и $Y = j\omega C$. Граничные частоты для полосы пропускания определяют из (14.10):

$$-YZ = \omega^2 LC = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases},$$

откуда

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = 2/\sqrt{LC} = \omega_0.$$

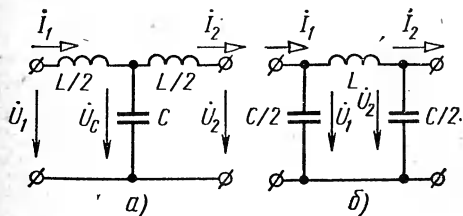


Рис. 14.7

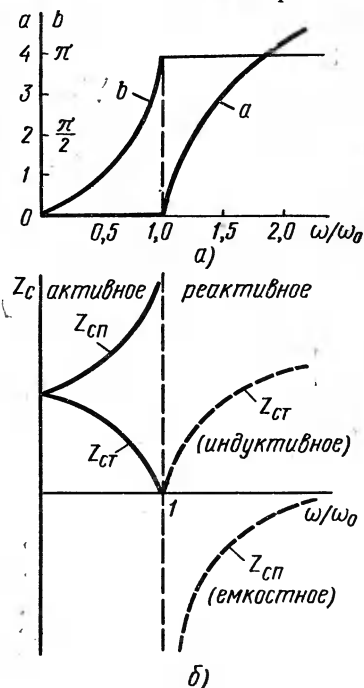


Рис. 14.8

Фильтр нижних частот пропускает сигналы при изменении частоты от 0 до ω_0 . На рис. 14.8, a показаны зависимости a и b от ω/ω_0

в полосе пропускания ($a=0$) и задерживания ($a \neq 0$) для фильтра нижних частот.

Характеристические сопротивления для Т- и П-образных схем определяют по формулам

$$Z_{сТ} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}; \quad (14.15)$$

$$Z_{сП} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}. \quad (14.16)$$

На рис. 14.8, б по этим уравнениям построены графики зависимости сопротивлений $Z_{сТ}$ и $Z_{сП}$ от ω/ω_0 . В полосе пропускания характеристические сопротивления являются активными для обеих схем, следовательно, при согласовании фильтров нагрузка должна быть тоже активной. На частотах выше резонансной, т. е. в полосе задерживания, сопротивление $Z_{сТ}$ носит индуктивный, а сопротивление $Z_{сП}$ — емкостный характер.

Для решения задачи, связанной с определением параметров фильтра, должны быть заданы следующие величины:

$$\omega_2 = \omega_0 = 2/\sqrt{LC}; \quad k = \sqrt{L/C},$$

откуда легко определить параметры L и C фильтра.

Пример 14.1. Построить векторную диаграмму для Т-образного фильтра нижних частот при работе в полосе пропускания и задерживания (см. рис. 14.7, а), если $L=0,02$ Г, $C=5$ мкФ, $U_2=13$ В, частота в полосе пропускания $\omega_1 = \frac{1}{2} \omega_0$, сопротивление нагрузки $r_2 = Z_c$, а в полосе задерживания $\omega_2 = 2\omega_0$ при прежнем значении r_2 .

Решение. Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{0,02 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}} = 5000 \text{ рад/с.}$$

Следовательно, $\omega_1 = 2500$ рад/с; $\omega_2 = 10\,000$ рад/с.

Определим входные сопротивления фильтра при разомкнутых и замкнутых зажимах:

$$Z_{1р} = j\omega_1 \frac{L}{2} + \frac{1}{j\omega_1 C} = -j25 \text{ Ом,}$$

$$Z_{1к} = j25 + \frac{j25 (-j50)}{j25 - j50} = j75 \text{ Ом.}$$

Сопротивление нагрузки

$$r_2 = Z_c = \sqrt{Z_{1р} Z_{1к}} = \sqrt{(-j25) j75} = 25 \sqrt{3} \text{ Ом,}$$

ТОК

$$I_2 = U_2 / r_2 = 13 / 25 \sqrt{3} = 0,3 \text{ А.}$$

Из схемы фильтра при $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^3$ рад/с находим:

$$\dot{U}_C = \dot{U}_2 + j \frac{\omega_1 L}{2} \dot{I}_2 = 13 + j7,5 \text{ В};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_C / (-jx_C) = \frac{13 + j7,5}{-j50} = -0,15 + j0,26 \text{ А};$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_C = 0,3 - 0,15 + j0,26 = 0,15 + j0,26 = 0,3e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ А};$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_C + j\omega_1 \frac{L}{2} \dot{I}_1 = 13 + j7,5 + j25(0,15 + j0,26) = 13e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ В}.$$

Векторная диаграмма схемы при работе в полосе пропускания дана на рис. 14.9, а.

Проведем аналогичные вычисления для $\omega_2 = 10^4$ рад/с:

$$\dot{U}_C = \dot{U}_2 + j\omega_2 \frac{L}{2} \dot{I}_2 = 13 + j100 \cdot 0,3 = 13 + j30 \text{ В};$$

$$\dot{I}_C = \frac{13 + j30}{-j12,5} = -2,4 + j1,04 \text{ А};$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_C = 0,3 - 2,4 + j1,04 = -2,1 + j1,04 \approx 2,34e^{j153^\circ 36'} \text{ А};$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_C + j\omega_2 \frac{L}{2} \dot{I}_1 = 13 + j30 - 104 - j210 = -91 - j180 \approx 201,6e^{-j114^\circ 48'} \text{ В}.$$

По этим результатам на рис. 14.9, б построена векторная диаграмма при работе схемы в полосе задерживания.

Векторные диаграммы фильтра наглядно показывают связь между напряжениями и токами на входных и выходных зажимах фильтра. В полосе пропускания $a = 0$, $U_1 = U_2$, $I_1 = I_2$ (рис. 14.9, а). В зоне затухания $U_1 \gg U_2$, $I_1 \gg I_2$, несмотря на отсутствие активных сопротивлений в ветвях фильтра (рис. 14.9, б).

Фильтры верхних частот. На рис. 14.10, а, б показаны Т- и П-образные схемы фильтров типа k , пропускающих сигналы верхних и задерживающие сигналы нижних частот.

Для этих схем справедливы следующие выражения:

$$Z = 1/j\omega C; \quad Y = 1/j\omega L;$$

$$-YZ = \frac{1}{\omega^2 LC} = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}.$$

Полоса пропускания (прозрачности) лежит в границах

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \omega_0; \quad \omega_2 = \infty.$$

На рис. 14.10, в показаны зависимости a и b от ω/ω_0 в полосе пропускания и задерживания для фильтра верхних частот.

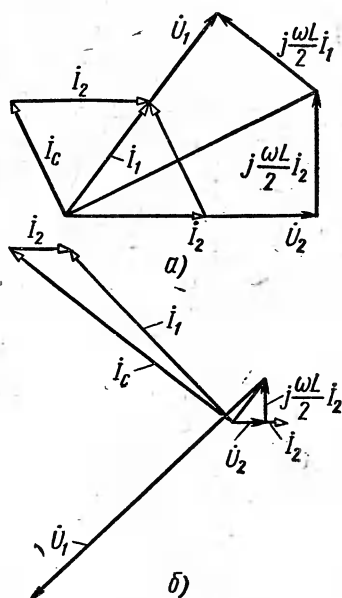


Рис. 14.9

Из уравнения (14.9) получаем

$$\cos b = 1 - \frac{1}{2\omega^2 LC} = 1 - 2 \frac{\omega_0^3}{\omega^2}.$$

При $\omega = \infty$ $b = 0$, при $\omega = \omega_0$ $\cos b = -1$, следовательно, $b = -\pi$.

Характеристические сопротивления для Т- и П-образных схем определяются по формулам

$$\begin{aligned} Z_{сТ} &= \sqrt{L/C} \sqrt{1 - (\omega_0^3/\omega^2)}; \\ Z_{сП} &= \sqrt{L/C} (V1 - (\omega_0^3/\omega^2))^{-1}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

На рис. 14.10, а построены графики зависимости характеристических сопротивлений $Z_{сТ}$ и $Z_{сП}$ от ω/ω_0 . В полосе пропус-

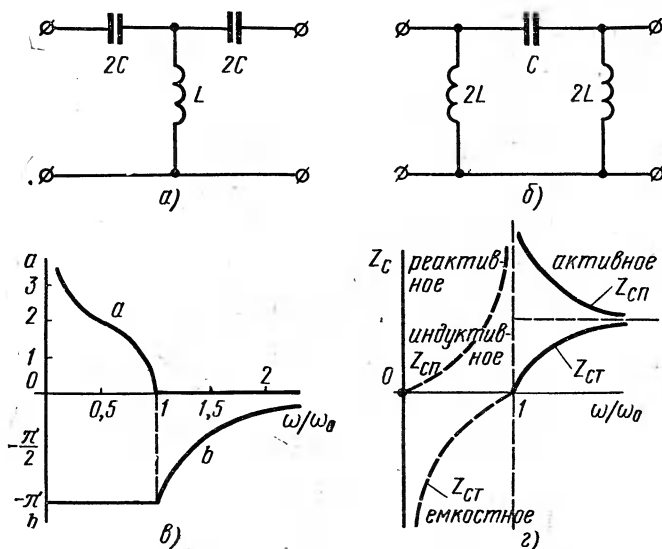


Рис. 14.10

ния эти сопротивления являются активными. При этом если сопротивление $Z_{сП}$ изменяется от ∞ до $\sqrt{L/C}$, то сопротивление $Z_{сТ}$ от 0 до $\sqrt{L/C}$. Для согласования фильтра с нагрузкой сопротивление нагрузки должно быть активным и меняющимся при изменении частоты в соответствии с кривыми на рис. 14.10, г.

В полосе задерживания характеристические сопротивления $Z_{сП}$ и $Z_{сТ}$ являются реактивными и имеют разные знаки, причем сопротивление $Z_{сП}$ носит индуктивный, а сопротивление $Z_{сТ}$ — емкостной характер.

Полосовые (полосные) фильтры. Если схемы фильтра на рис. 14.7 и рис. 14.9 как бы электрически совместить друг с другом, то полученный фильтр будет пропускать сигналы в диапазоне изменения частоты от ω_1 до ω_2 . На рис. 14.11, а, б изобра-

жены две такие схемы, имеющие соответственно Т- и П-образные формы. Чтобы при одной и той же частоте стали равны нулю продольные сопротивления Z (резонанс напряжений) и попереч-

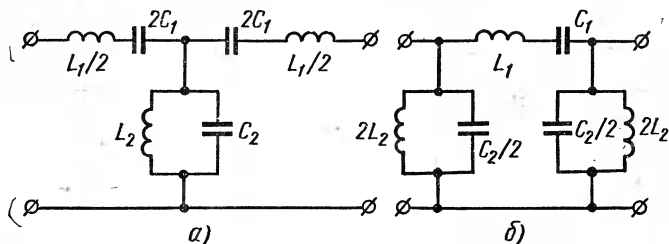


Рис. 14.11

ные проводимости Y (резонанс токов), необходимо выполнить условие, определяющее частоту

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad (14.18)$$

при котором $L_1 C_1 = L_2 C_2$.

При рассмотрении схем на рис. 14.11, а, б с учетом уравнения (14.18) можно получить выражения для Z и Y в виде

$$\begin{aligned} Z &= j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = j\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right); \\ Y &= j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2} = j\sqrt{\frac{C_2}{L_2}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (14.19)$$

Уравнение, определяющее границы полосы пропускания фильтра, имеет вид

$$-ZY = \sqrt{\frac{L_1 C_2}{C_1 L_2}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}.$$

Одним из решений этого уравнения является уже найденная частота ω_0 . Остается решить уравнение

$$\frac{C_2}{C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 4 \quad (14.20)$$

или

$$\omega^2 \pm 2\omega\omega_0^2 \sqrt{L_2 C_1} - \omega_0^2 = 0.$$

Если опустить отрицательное значение частоты, как не имеющее смысла, то

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 (\sqrt{n^2 + 1} - n); \\ \omega_2 &= \omega_0 (\sqrt{n^2 + 1} + n), \end{aligned} \quad (14.21)$$

где

$$n = \omega_0 \sqrt{L_2 C_1} = \sqrt{L_2 / L_1}.$$

Из полученных выражений следует, что фильтр пропускает сигналы при изменении частоты от ω_1 до ω_2 (рис. 14.12, а). Частота ω_0 оказывается промежуточной, поскольку она равна среднему геометрическому из граничных частот, т. е. $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

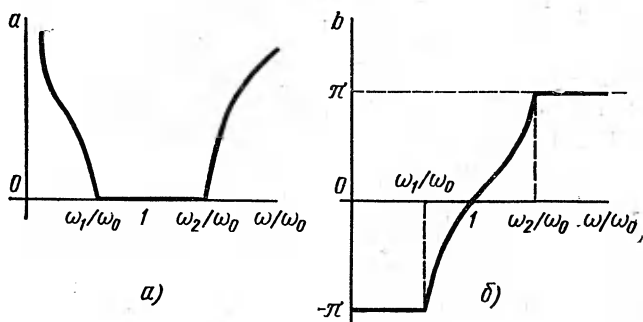


Рис. 14.12

Частотную зависимость коэффициента затухания a в полосе подавляемых частот находим с помощью выражения

$$\operatorname{ch} a = \left| 1 + \frac{YZ}{2} \right| = \left| 1 - \frac{C_2}{2C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right|. \quad (14.22)$$

По этому уравнению на рис. 14.12, а построена частотная характеристика $a(\omega/\omega_0)$ для рассматриваемого полосового фильтра.

Зависимость коэффициента фазы b в полосе пропускания определяем по соотношению

$$\cos b = 1 - \frac{C_2}{2C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2. \quad (14.23)$$

При изменении частоты от ω_0 до ω_2 характеристика $b(\omega/\omega_0)$ аналогична фазовой характеристике фильтра нижних частот (см. рис. 14.8, а), коэффициент b меняется от 0 до π (рис. 14.12, б). При изменении частоты от ω_1 до ω_0 характеристика $b(\omega/\omega_0)$ аналогична фазовой характеристике фильтра верхних частот, при этом b изменяется от $-\pi$ до 0.

Для получения более полной характеристики режима работы полосового фильтра необходимо выяснить закон изменения характеристических сопротивлений в обеих схемах (см. рис. 14.11, а, б). Характеристические сопротивления полосовых Т- и П-образных фильтров можно найти с помощью общих уравнений (14.11) и (14.12).

Пользуясь этими уравнениями и учитывая (14.19), получим:

$$Z_{сТ} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \sqrt{1 - \frac{C_2}{4C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}; \quad (14.24)$$

$$Z_{сП} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} / \sqrt{1 - \frac{C_2}{4C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}. \quad (14.25)$$

Зависимость характеристического сопротивления $Z_{сг}$ от ω/ω_0 показана на рис. 14.13, а. В полосе пропускания это сопротивление является активным, при этом в области, непосредственно примыкающей к резонансной частоте, оно мало изменяется с частотой и равно $\sqrt{L_2/C_1}$. В области низких частот сопротивление $Z_{сг}$ имеет емкостной, а при частотах, больших ω_2 , — индуктивный характер. Зависимость характеристического сопротивления $Z_{сп}$ изображена на рис. 14.13, б, при этом, так же как сопротивление $Z_{сг}$, в зоне прозрачности оно является активным.

Пользуясь полученными соотношениями, можно найти расчетные формулы для определения параметров L_1 , C_1 , L_2 , C_2 полосового фильтра. Прежде всего задаемся сопротивлением нагрузки R_2 , равным характеристическому сопротивлению фильтра при частоте ω_0 , т. е. $R_2 = \sqrt{L_2/C_1}$. Затем по известной разности частот устанавливается следующая связь:

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\omega_0^2 \sqrt{L_2 C_1} = \frac{2}{C_2 R_2},$$

откуда

$$C_2 = \frac{2}{R_2 (\omega_2 - \omega_1)}.$$

Индуктивность L_2 находим из выражения $\omega_0^2 = \frac{1}{L_2 C_2} = \omega_1 \omega_2$:

$$L_2 = 1/\omega_0^2 C_2 = \frac{R_2 (\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_1 \omega_2}.$$

Так как $\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = R_2$, то

$$L_1 = C_2 R_2^2 = \frac{2R_2}{\omega_2 - \omega_1};$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2R_2 \omega_1 \omega_2}.$$

Заграждающие (режекторные) фильтры. Если в схемах полосовых фильтров типа k поменять местами параллельно и последовательно соединенные ветви из емкостей и индуктивностей, то в полученных схемах фильтров (рис. 14.14, а, б) при частоте ω_0 можно получить разрыв продольных сопротивлений Z и короткое

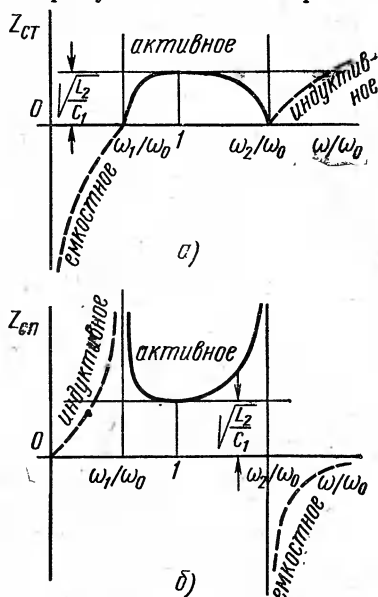


Рис. 14.13

замыкание поперечных проводимостей Y . Для этого необходимо выполнить условия

$$L_1 C_1 = L_2 C_2; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}.$$

В этом случае

$$Z = \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}} = \frac{j\omega L_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}; \quad Y = \frac{1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{j\omega C_2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

Границы полосы пропускания находим из уравнений

$$-ZY = \frac{\omega^2 L_1 C_2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} = 0; \quad -YZ = \frac{\omega^2 L_1 C_2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} = 4.$$

Из первого уравнения

$$\omega = 0; \quad \omega = \infty,$$

из второго уравнения

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 (\sqrt{n^2 + 1} - n); \\ \omega_2 &= \omega_0 (\sqrt{n^2 + 1} + n), \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

где $n = \frac{\sqrt{L_1 C_2}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$. Из полученных выражений следует, что фильтр пропускает частоты от 0 до ω_1 и от ω_2 до ∞ . Полоса

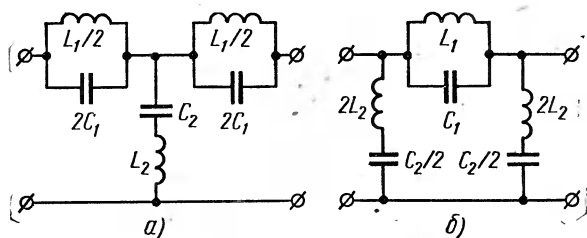


Рис. 14.14

задерживания расположена между частотами ω_2 и ω_1 , причем $\omega_0^2 = \omega_2 \omega_1$. Уравнение фазовой характеристики фильтра в полосе пропускания имеет следующий вид:

$$\cos b = 1 - \frac{C_2}{2C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}. \quad (14.27)$$

Уравнение, определяющее затухание фильтра в полосе задерживания, записывается в виде

$$\operatorname{ch} a = \left| 1 - \frac{C_2}{2C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right|. \quad (14.28)$$

На рис. 14.15 в соответствии с (14.27) и (14.28) построены частотная $[a(\omega/\omega_0)]$ и фазовая $[b(\omega/\omega_0)]$ характеристики заграждающего фильтра.

Характеристические сопротивления для схем заграждающего фильтра на рис. 14.14, а, б определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} Z_{сТ} &= \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \sqrt{1 - \frac{C_2}{2C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \\ Z_{сП} &= \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} / \sqrt{1 - \frac{C_2}{2C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$

На основании этих выражений на рис. 14.16, а, б построены зависимости $Z_{сТ}$ и $Z_{сП}$ от ω/ω_0 .

Если принять сопротивление нагрузки R_2 равным характеристическому сопротивлению заграждающего фильтра при частоте ω_0 , т. е. $R_2 = \sqrt{L_2/C_1}$, то, аналогично полосовому фильтру, можно получить следующие формулы для определения параметров заграждающего фильтра:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{R_2}{2(\omega_3 - \omega_2)}; \\ C_2 &= \frac{2(\omega_3 - \omega_2)}{R_2 \omega_2 \omega_3}; \\ L_1 &= \frac{2R_2(\omega_3 - \omega_2)}{\omega_2 \omega_3}; \\ C_1 &= \frac{1}{2R_2(\omega_3 - \omega_2)}. \end{aligned}$$

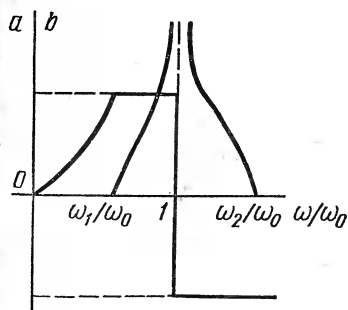


Рис. 14.15

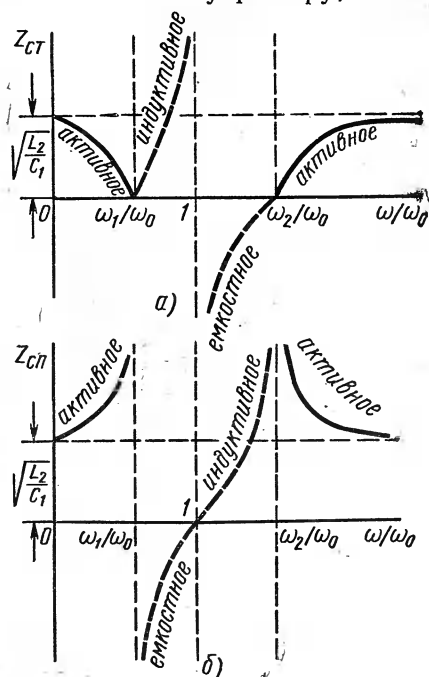


Рис. 14.16

§ 14.4. Фильтры типа m

Одним из наиболее существенных недостатков фильтров типа k является зависимость характеристического сопротивления от частоты (см. рис. 14.8, 14.10, 14.13). Поэтому согласовать фильтр

с нагрузкой во всей полосе пропускаемых частот не представляется возможным, в результате чего при несогласованной нагрузке характеристика затухания от частоты ухудшается. В качестве примера на рис. 14.17 изображены характеристики затухания (при согласованной и несогласованной нагрузках) фильтра нижних частот.



Рис. 14.17

имеет недостаточную крутизну. Для увеличения крутизны характеристики иногда применяют многосвязные фильтры, что обычно приводит к существенному усложнению схемы. Отмеченные недостатки можно в некоторой степени устранить, если применить схемы фильтров типа *m*.

Для определения параметров такого фильтра целесообразно рассмотреть Г-образное несимметричное звено, представляющее собой со стороны входных зажимов (рис. 14.18) как бы половину П-образного, а со стороны выходных зажимов — Т-образного симметричного звена. Другими словами, Т-образную схему получают при соединении зажимов 1—1' двух Г-образных звеньев (рис. 14.19, а), а П-образную — при соединении зажимов 2—2' тех же двух звеньев (рис. 14.20, а). При этом для удобства дальнейшего анализа продольное и поперечное сопротивления несимметричного Г-образного звена обозначены соответственно через

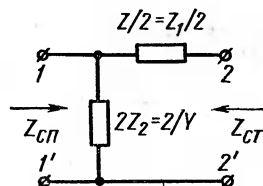


Рис. 14.18

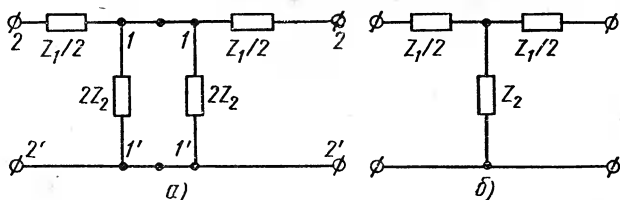


Рис. 14.19

$Z_1/2$ и $2Z_2$ (см. рис. 14.18), что в симметричной Т-образной схеме приводит к обозначениям параметров, указанным на рис. 14.19, б, а в П-образной схеме — к обозначениям, указанным на рис. 14.20, б.

На рис. 14.21, а показано Г-образное звено фильтра типа *m*, параметры которого необходимо определить. Пусть $Z_{1m} = mZ_1$, где $0 < m < 1$. Величину поперечного сопротивления $2Z_{2m}$ опре-

делим из условия, при котором характеристическое сопротивление $Z_{сТм}$ остается равным характеристическому сопротивлению Г-образного фильтра типа k , т. е. $Z_{сТм} = Z_{сТ}$ (см. рис. 14.18).

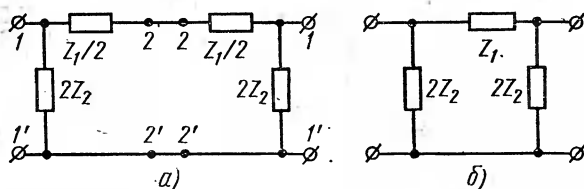


Рис. 14.20

Приравнявая выражение (рис. 14.21, а)

$$Z_{сТм} = \sqrt{Z_{1м}Z_{2м}} \sqrt{1 + \frac{Z_{1м}}{4Z_{2м}}}$$

к выражению (см. рис. 14.18)

$$Z_{сТ} = \sqrt{Z_1Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}$$

и учитывая $Z_{1м} = mZ_1$, получим

$$Z_{2м} = \frac{Z_2}{m} + (1 - m^2) \frac{Z_1}{4m}. \quad (14.30)$$

Из этого выражения следует, что поперечное сопротивление состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений, т. е.

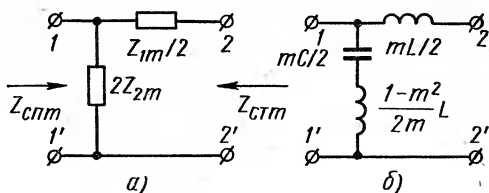


Рис. 14.21

получается Г-образный, так называемый последовательно-производный фильтр.

На рис. 14.21, б, приведена схема Г-образного последовательно-производного низкочастотного фильтра, имеющего следующие параметры:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z_{1м}}{2} &= j\omega m \frac{L}{2}; \\ 2Z_{2м} &= \frac{2}{j\omega m C} + j\omega L \frac{(1-m^2)}{2m}. \end{aligned} \right\} \quad (14.31)$$

Граничные частоты полосы пропускания определяем из условий

$$Z_{1м} = 0,$$

откуда

$$\omega = \omega_1 = 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{Z_{1m}}{Z_{2m}} \right| = 4,$$

или

$$|Z_{1m}| = |4Z_{2m}|,$$

т. е. $\omega m L = \left| \frac{(1-m^2)\omega L}{m} - \frac{4}{m\omega C} \right|$, откуда

$$\omega = \omega_2 = 2/\sqrt{LC}.$$

Из полученных выражений следует, что полоса пропускания фильтра типа m совпадает с полосой пропускания фильтра типа k .

На рис. 14.22 дано графическое определение полосы пропускания.

Для определения коэффициента затухания a в полосе задерживания при $\omega > \omega_2$ можно воспользоваться уравнением (14.8), которое при разных знаках комплексных сопротивлений Z_1 и Z_2 (как и в полосе пропускания), но при $|Z_1| \geq 4|Z_2|$ приводит к выражению

$$-\operatorname{ch} a = 1 - \left| \frac{Z_1}{2Z_2} \right| \quad (14.32)$$

или

$$\operatorname{ch} a + 1 = \left| \frac{Z_1}{2Z_2} \right|.$$

Рис. 14.22

Из этого уравнения, учитывая $\operatorname{ch} a + 1 = 2 \operatorname{ch}^2(a/2)$, получаем выражение

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|}, \quad (14.33)$$

которое применительно к фильтру типа m записываем в виде

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|}. \quad (14.34)$$

Из выражения (14.34) следует, что при частоте, определяемой из уравнения

$$4Z_{2m} = \left| \frac{(1-m^2)\omega L}{m} - \frac{4}{m\omega C} \right| = 0,$$

т. е. при

$$\omega_\infty = \frac{2}{\sqrt{LC\sqrt{1-m^2}}} = \frac{\omega_2}{\sqrt{1-m^2}},$$

коэффициент затухания a имеет бесконечно большое значение. На рис. 14.23 показаны характеристики $a(\omega)$ для различных значений m . Чем меньше параметр m , тем более резко растет затухание вблизи граничной частоты, но при этом коэффициент затухания a уменьшается в области частот $\omega > \omega_\infty$. При $m = 1$ фильтр

типа m преобразуется в фильтр типа k . Для частот $\omega > \omega_\infty$ сопротивления Z_{1m} и Z_{2m} имеют одинаковые знаки, поэтому для определения величины затухания в этом диапазоне следует воспользоваться выражением

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|} \quad (14.35)$$

вместо (14.34), так как последнее справедливо только для схемы с комплексными значениями Z_{1m} и Z_{2m} , имеющими разные знаки.

Выражения для характеристического сопротивления при различных значениях параметра m имеют разный вид. На рис. 14.24 изображены кривые изменения характеристического сопротивления $Z_{c\Pi m}$ со стороны входных зажимов Г-образного фильтра (рис. 14.21, б) для различных значений m . Эти кривые построены по уравнению (14.12), в котором $Z = Z_{1m}$ и $Y = 1/Z_{2m}$. При $m = 0,6$ величина характеристического сопротивления $Z_{c\Pi m}$ в большей

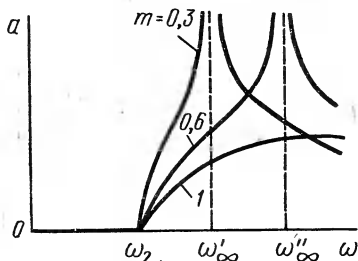


Рис. 14.23

части полосы пропускания ближе к значению характеристического сопротивления фильтра, равного $\sqrt{L/C}$, чем при $m = 1$. Это означает, что режим работы фильтра при указанных параметрах в большей части полосы пропускания будет близок к режиму согла-

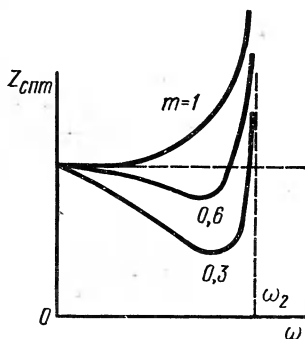


Рис. 14.24

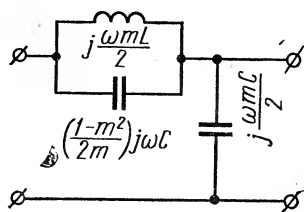


Рис. 14.25

сованной нагрузки, если сопротивление нагрузки выбрано равным $\sqrt{L/C}$.

Если в схеме Г-образного фильтра (см. рис. 14.21, а) принять $Z_{2m} = Z_2/m$, то сопротивление Z_{1m} можно определить из уравнения $Z_{c\Pi m} = Z_{c\Pi}$, т. е.

$$\sqrt{Z_{1m}Z_{2m}} / \sqrt{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}} = \sqrt{Z_1Z_2} / \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}},$$

откуда

$$\frac{1}{Z_{1m}} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1}{Z_2} \frac{(1-m^2)}{4m}$$

или

$$\frac{2}{Z_{1m}} = \frac{2}{mZ_1} + \frac{1-m^2}{2Z_2m}. \quad (14.36)$$

Из полученного выражения следует, что если сопротивление поперечного звена принять равным $2Z_{2m} = 2Z_2/m = 2/j\omega mC$, то продольная проводимость, равная обратной величине продольного сопротивления $2/Z_{1m}$, должна состоять из двух параллельных ветвей с параметрами $2/j\omega Lm$ и $\frac{(1-m^2)}{2m} j\omega C$. В результате получается Г-образный, так называемый параллельно-производный фильтр (рис. 14.25).

На рис. 14.26 построены графики изменения характеристического сопротивления $Z_{сГм}$ для различных значений m . Из этих графиков видно, что, так же как для характеристического сопротивления $Z_{сПм}$ (см. рис. 14.24), при $m \approx 0,6$ сопротивление $Z_{сГм}$ мало отличается от величины $\sqrt{L/C}$ во всем диапазоне пропускемых частот.

Недостатком фильтров типа m является снижение затухания при $\omega > \omega_\infty$ (для фильтров нижних частот и полосовых фильтров) и при $\omega < \omega_\infty$ (для фильтров верхних частот и полосовых фильтров).

§ 14.5. Безындукционные rC -фильтры

При построении реактивных LC -фильтров наиболее громоздким и дорогим элементом является индуктивная катушка, особенно в фильтрах, работающих в диапазоне низких частот. В таких схемах применяют индуктивные катушки с ферромагнитными сердечниками, как правило, имеющие очень большое число витков. Катушки с большим числом витков и громоздкими сердечниками обладают низкой добротностью $Q_L = \omega_0 L/r$, так как в них имеются потери не только в обмотках, но и в сердечниках. Таким образом, катушка не является идеальной индуктивностью,

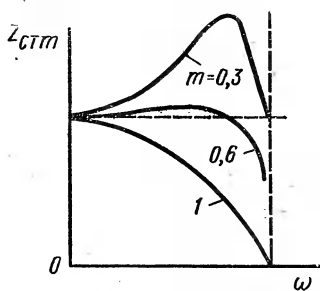


Рис. 14.26

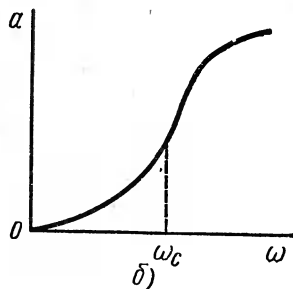
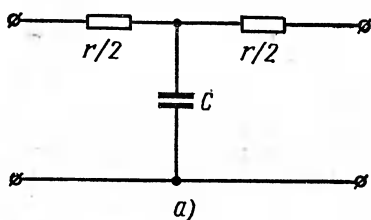


Рис. 14.27

в результате основные характеристики фильтров с катушками, имеющими низкую добротность, ухудшаются.

В настоящее время широкое применение находят интегральные схемы, в которых возможна микроминиатюризация элементов r и C . При этом индуктивная катушка, применяемая на низких частотах, не поддается миниатюризации.

Следовательно, целесообразно построение фильтров без индуктивных катушек, т. е. rC -фильтров. Рассмотрим простейшие примеры построения таких фильтров.

Т-образный фильтр нижних частот. На рис. 14.27, a изображена схема Т-образного rC -фильтра.

Для этой схемы при $I_2 = 0$ справедливо уравнение

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + j\omega C \frac{r}{2} \dot{U}_2 = \dot{U}_2 \left(1 + j\omega \frac{Cr}{2} \right) = A \dot{U}_2, \quad (14.37)$$

откуда

$$A = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 = 1 + j\omega \frac{Cr}{2}. \quad (14.38)$$

Для симметричного четырехполюсника

$$A = \operatorname{ch} g = \operatorname{ch} (a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b.$$

Приравнявая правые части уравнений (14.37) и (14.38), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} a \cos b &= 1; \\ \operatorname{sh} a \sin b &= \frac{\omega Cr}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.39)$$

При постоянном токе ($\omega = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} a \cos b &= 1; \\ \operatorname{sh} a \sin b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.40)$$

Эти равенства имеют решение одновременно при $a = 0$ и $b = 0$. Если $\omega > 0$, то $\sin b > 0$, так как при $a > 0$ $\operatorname{sh} a > 0$. В отличие от реактивных фильтров у rC -фильтров нет такой области частот, в которой $a = 0$. Из уравнений (14.39) можно найти зависимость a от ω . Для этого первое из уравнений (14.39) следует представить в виде

$$(1 + \operatorname{sh}^2 a)(1 - \sin^2 b) = 1.$$

Если в это выражение подставить значение $\sin b$, найденное из второго уравнения (14.39), то можно получить биквадратное уравнение относительно $\operatorname{sh} a$:

$$\operatorname{sh}^4 a - \left(\frac{\omega r C}{2} \right)^2 \operatorname{sh}^2 a - \left(\frac{\omega r C}{2} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{sh} a = \sqrt{\frac{(\omega r C)^2}{8} + \frac{\omega r C}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega r C}{4} \right)^2}. \quad (14.41)$$

При $\omega \ll 2/rC$ из выражения (14.41) находим

$$\operatorname{sh} a = a \approx \sqrt{\omega r C / 2}.$$

За частоту среза ω_c rC -фильтра нижних частот условно принимают такое значение, при котором активное и реактивное сопротивления ветвей соответствующего Γ -образного звена равны

$$\frac{r}{2} = \frac{2}{\omega_c C} \quad \text{или} \quad \frac{\omega_c r C}{4} = 1.$$

В этом случае $\text{sh } a = 2,2$, откуда $a = 1,53$ Нп. На рис. 14.27, б построена частотная характеристика коэффициента затухания T -образного rC -фильтра.

T -образный фильтр верхних частот.

На рис. 14.28, а показана T -образная схема rC -фильтра верхних частот. При низких частотах сопротивления конденсаторов имеют большие значения, в результате напряжение на выходных зажимах фильтра получается небольшим, что характеризуется большим затуханием. В частности, при $\omega = 0$ (при постоянном токе) коэффициент затухания имеет бесконечно большое значение.

При увеличении частоты емкостное сопротивление уменьшается, а напряжение на выходных зажимах увеличивается, в результате коэффициент затухания a уменьшается (рис. 14.28, б).

Для rC -фильтра верхних частот, так же как для rC -фильтра нижних частот,

$$\left. \begin{aligned} \text{ch } a \cos b &= 1; \\ \text{sh } a \sin b &= -1/2r\omega C. \end{aligned} \right\} \quad (14.42)$$

При $\omega = \infty$ условия $a = 0$ и $b = 0$ выполняются одновременно. При $0 < \omega < \infty$ $\text{sh } a \sin b < 0$, так как $a > 0$ и $b < 0$.

Совместное решение уравнений (14.42) приводит к биквадратному уравнению

$$\text{sh}^4 a - \frac{1}{(2\omega r C)^2} \text{sh}^2 a - \frac{1}{(2r\omega C)^2} = 0,$$

откуда

$$\text{sh } a = \sqrt{\frac{1}{8(\omega r C)^2} + \frac{1}{2\omega r C}} \sqrt{1 + \frac{1}{(4\omega r C)^2}}. \quad (14.43)$$

Для $\omega \gg 1/2rC$

$$\text{sh } a \approx 1/\sqrt{2\omega r C}.$$

Если за частоту среза ω_c условно принять частоту, определяемую из равенства сопротивлений ветвей Γ -образного звена:

$$2r = 1/2\omega_c C \quad \text{или} \quad \omega_c = 1/4rC,$$

то из уравнения (14.43) получается

$$\text{sh } a = 2,2, \quad a \approx 1,53 \text{ Нп.}$$

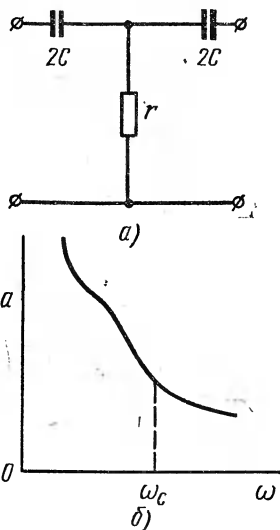
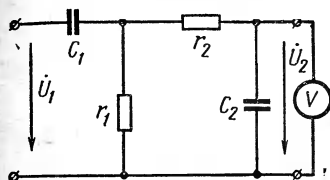


Рис. 14.28

Полосовой rC -фильтр. На рис. 14.29, а показана схема полосового фильтра, представляющего собой каскадное соединение



rC -фильтров верхних и нижних частот. Для анализа такого фильтра определим коэффициент A четырехполюсника в виде отношения $\dot{U}_1/\dot{U}_2$ при $I_2=0$ по топологиче-

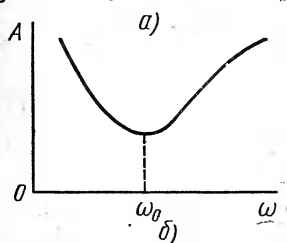


Рис. 14.29

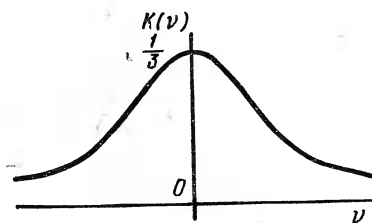


Рис. 14.30

ской формуле

$$A = \frac{\sum \Pi_k \Delta_k}{\sum \Pi'_k \Delta'_k} = \frac{\left(j\omega C_1 + \frac{1}{r_1}\right) \left(j\omega C_2 + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{j\omega C_2}{r_2}}{j\omega C_1 \frac{1}{r_2}} =$$

$$= 1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_2 r_2}{C_1 r_1} + j \left(\omega C_2 r_2 - \frac{1}{\omega r_1 C_1} \right). \quad (14.44)$$

Из полученного выражения можно определить квазирезонансную частоту по формуле

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{r_1 r_2 C_1 C_2}. \quad (14.45)$$

Так как вещественная часть коэффициента A не зависит от частоты, то изменению модуля этого коэффициента соответствует график на рис. 14.29, б. В частном случае при $r_1 = r_2 = r$, $C_1 = C_2 = C$

$$\omega_0 = \frac{1}{rC}; \quad A = 3 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Модуль коэффициента передачи напряжения $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ для этого случая

$$|K(\omega)| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + v^2}},$$

где

$$v = (\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega).$$

На рис. 14.30 построен график изменения коэффициента передачи напряжения в зависимости от v . При этом отрицательные значения v соответствуют частотам $\omega < \omega_0$, а положительные — частотам $\omega > \omega_0$.

РАЗДЕЛ ПЯТЫЙ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

ГЛАВА 15

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ И МЕТОДОМ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

§ 15.1. Классический метод расчета переходных процессов в разветвленных цепях

В гл. 3 и 6 были даны определения установившихся (стационарных) и переходных (нестационарных) процессов, или режимов, а также рассмотрены переходные процессы в простейших цепях с источниками постоянных и гармонических э. д. с. и токов.

Переходные процессы в цепях с источниками постоянных или периодических э. д. с. и токов возникают в результате различных коммутаций, которые приводят к изменению схемы или параметров цепи: подключение или отключение источников и нагрузок, короткие замыкания и т. п. Если в цепи имеются индуктивные катушки и (или) конденсаторы, то переход от одного установившегося режима (до коммутации) к другому (после коммутации) не может совершиться мгновенно даже при мгновенной коммутации, поскольку не может мгновенно измениться энергия магнитного и электрического полей, связанных с индуктивностями и емкостями. Для мгновенного или скачкообразного изменения энергии полей необходима бесконечно большая мощность источников энергии; реальные источники энергии обладают конечной мощностью.

Таким образом переход от одного установившегося режима к другому осуществляется в течение некоторого промежутка времени. Теоретически длительность переходного процесса бесконечно велика, практически она измеряется долями секунды. Как правило, длительность переходного процесса много больше длительности коммутации, поэтому коммутацию можно считать мгновенной.

При переходном процессе значения токов и напряжений на отдельных участках цепи могут существенно отличаться от значений токов и напряжений при установившемся режиме, что в ряде случаев приводит к нарушениям нормальной работы электротехнических устройств и даже к авариям. В цепях с источниками непериодических изменяющихся э. д. с. и токов переходный процесс является основным режимом работы.

Токи и напряжения при переходном процессе можно рассчитывать путем интегрирования дифференциального уравнения n -го

порядка. Такое уравнение получается в результате последовательного исключения из системы интегро-дифференциальных уравнений цепи (уравнений Кирхгофа, узловых или контурных уравнений) всех неизвестных величин, кроме одной. При наличии в цепи источников э. д. с. и тока правая часть дифференциального уравнения в общем случае является функцией напряжений и токов источников:

$$\alpha_n \frac{d^n x}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = F(t),$$

где $x = x(t)$ — напряжение или ток; α_j ($j = 0, 1, \dots, n$) — постоянные коэффициенты, $F(t)$ — функция времени, зависящая от параметров источников.

Метод расчета переходного процесса, заключающийся в интегрировании дифференциального уравнения n -го порядка, называют классическим методом.

Решение дифференциального уравнения записывается в виде суммы общего решения однородного (свободной составляющей) и частного решения неоднородного (принужденной составляющей) уравнений $x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{пр}}(t)$. Для расчета свободной составляющей следует найти корни характеристического уравнения p_k и n постоянных интегрирования A_k . Если характеристическое уравнение

$$\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0$$

имеет n различных корней p_k ($k = 1, 2, \dots, n$), то

$$x_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}.$$

Корню p_k кратности $m_k \geq 1$ соответствует слагаемое свободной составляющей вида

$$x_{k \text{ св}}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_{m_k} t^{m_k-1}) e^{p_k t}.$$

Расчет принужденной составляющей в цепи с источниками постоянных (периодических) э. д. с. и токов сводится к расчету установившегося значения искомой величины после коммутации.

Чтобы определить постоянные интегрирования, необходимо знать значения искомой величины и всех ее производных до $(n-1)$ -го порядка включительно в начальный момент времени $t=0$. Токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (см. гл. 3) изменяются только непрерывно, поэтому для них справедливы равенства

$$i_L(0_+) = i_L(0_-); \quad u_C(0_+) = u_C(0_-),$$

называемые законами коммутации. С помощью законов коммутации и уравнений цепи находят начальные значения напряжений, токов и их производных.

Составление характеристического уравнения. Характеристическое уравнение можно составить, не прибегая к получению из

системы интегро-дифференциальных уравнений цепи одного дифференциального уравнения n -го порядка.

Пусть в цепи исключены все источники (замкнуты источники э. д. с. и разомкнуты ветви источников тока) и рассматриваются

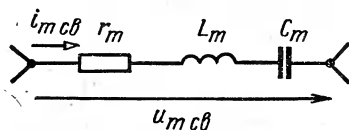


Рис. 15.1

только свободные составляющие токов и напряжений. Если составляющая тока в m -й ветви $i_{m\text{cb}} = Ae^{pt}$ (рис. 15.1), то напряжение на ее зажимах

$$\begin{aligned} u_{m\text{cb}} &= r_m i_{m\text{cb}} + L_m \frac{di_{m\text{cb}}}{dt} + \frac{1}{C_m} \int i_{m\text{cb}} dt = \\ &= \left(r_m + pL_m + \frac{1}{pC_m} \right) Ae^{pt} = Z_m(p) i_{m\text{cb}}, \end{aligned}$$

где $Z_m(p) = r_m + pL_m + \frac{1}{pC_m}$. Выражение для $Z_m(p)$ отличается от выражения для комплексного сопротивления ветви $Z_m(j\omega)$ тем, что множитель $j\omega$ заменен на p .

Для всех ветвей схемы можно записать матричное соотношение

$$\mathbf{u}_{\text{cb}}^{(B)} = \mathbf{Z}^{(B)}(p) \mathbf{i}_{\text{cb}}^{(B)}, \quad (15.1)$$

где матрица $\mathbf{Z}^{(B)}(p)$ совпадает с матрицей комплексных сопротивлений ветвей $\mathbf{Z}^{(B)}(j\omega)$ при замене p на $j\omega$.

Свободные напряжения ветвей должны удовлетворять закону Кирхгофа

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_{\text{cb}}^{(B)} = 0. \quad (15.2)$$

Если ввести понятие матрицы свободных контурных токов $\mathbf{i}_{\text{cb}}^{(K)}$, то

$$\mathbf{i}_{\text{cb}}^{(B)} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_{\text{cb}}^{(K)}. \quad (15.3)$$

Из соотношений (15.1) ÷ (15.3) получаем

$$\mathbf{Z}^{(K)}(p) \mathbf{i}_{\text{cb}}^{(K)} = 0, \quad (15.4)$$

где матрица $\mathbf{Z}^{(K)}(p) = \mathbf{B} \mathbf{Z}^{(B)}(p) \mathbf{B}^T$ совпадает с матрицей комплексных контурных сопротивлений $\mathbf{Z}^{(K)}(j\omega)$ при замене p на $j\omega$.

Система уравнений (15.4) имеет ненулевое решение, если определитель системы равен нулю:

$$\Delta^{(K)}(p) = \det \mathbf{Z}^{(K)}(p) = 0. \quad (15.5)$$

Уравнение (15.5) представляет собой характеристическое уравнение цепи.

Если воспользоваться узловыми уравнениями, то, аналогично предыдущему, характеристическое уравнение можно получить в виде

$$\Delta^{(y)}(p) = \det Y^{(y)}(p) = 0, \quad (15.6)$$

где матрица $Y^{(y)}(p) = AY^{(a)}(p)A^{(r)}$ совпадает с матрицей узловых проводимостей $Y^{(y)}(j\omega)$ при замене $j\omega$ на p .

Таким образом, характеристическое уравнение получается приравниванием к нулю определителя контурной ($Z^{(k)}(p)$) или узловой ($Y^{(y)}(p)$) матрицы. При составлении этих матриц сопротивления индуктивности L_m (емкости C_m) считают равным pL_m ($1/pC_m$). Контурный и узловой определители связаны между собой равенствами (8.17) или (8.18); следовательно, корни уравнений (15.5) и (15.6) одинаковы.

Выражение для входного сопротивления схемы относительно зажимов источника э. д. с., включенного в некоторую ветвь (входной проводимости относительно зажимов источника тока, включенного между парой узлов), определяется дробью, числитель которой представляет собой контурный (узловой) определитель, а знаменатель — алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя (см. § 7.8). Поэтому уравнения (15.5) и (15.6) эквивалентны соответственно уравнениям

$$Z_{\text{вх}}(p) = 0; \quad (15.7)$$

$$Y_{\text{вх}}(p) = 0, \quad (15.8)$$

где $Z_{\text{вх}}(p)$ — входное сопротивление схемы относительно двух зажимов, получающихся в результате размыкания любой ветви схемы; $Y_{\text{вх}}(p)$ — входная проводимость схемы относительно произвольной пары узлов схемы. При вычислении $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ сопротивление индуктивности L_m (емкости C_m), как уже отмечалось, считают равным pL_m ($1/pC_m$); источники, как правило, исключаются из схемы. Если в схеме нет короткозамкнутых ветвей, то уравнения (15.7) и (15.8), составленные для различных ветвей или пар узлов, имеют одни и те же корни.

Корни характеристического уравнения называют собственными частотами цепи, так как они определяют характер свободных процессов.

Пример 15.1. Составить рассмотренными в § 15.1 способами характеристическое уравнение для цепи на рис. 15.2 (при разомкнутом ключе). Параметры схемы: $r_1 = r_2 = 10$ Ом; $L = 0,1$ Г; $C = 10^{-3}$ Ф.

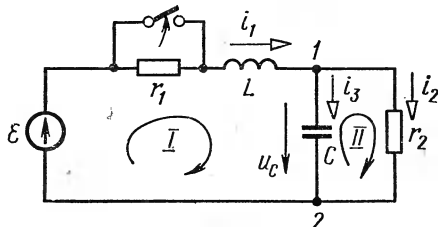


Рис. 15.2

Решение. Матрица контурных сопротивлений

$$Z^{(K)}(p) = \begin{bmatrix} \left(r_1 + pL + \frac{1}{pC}\right) & -\frac{1}{pC} \\ -\frac{1}{pC} & \left(r_2 + \frac{1}{pC}\right) \end{bmatrix}.$$

Если приравнять к нулю определитель этой матрицы, то получим характеристическое уравнение вида (15.5):

$$\Delta^{(K)}(p) = \left(r_1 + pL + \frac{1}{pC}\right) \left(r_2 + \frac{1}{pC}\right) - \left(\frac{1}{pC}\right)^2 = 0,$$

или после преобразования

$$LCr_2p^2 + (Cr_1r_2 + L)p + r_1 + r_2 = 0.$$

Узловой определитель $\Delta^{(U)}(p)$ в цепях без взаимной индуктивности найдем по топологической формуле. Так, записывая узловой определитель с помощью разложения по путям между узлами 1, 2 (при замкнутом источнике $\mathcal{E}$) и приравнявая его к нулю, получим характеристическое уравнение вида (15.6):

$$\frac{1}{pL} \cdot \frac{1}{r_1} + \left(pC + \frac{1}{r_2}\right) \left(\frac{1}{pL} + \frac{1}{r_1}\right) = 0.$$

Для заданной схемы можно записать три уравнения вида (15.7).

1. Приравнявая нулю входное сопротивление относительно зажимов источника $\mathcal{E}$, получим

$$Z_{вх1}(p) = r_1 + pL + \frac{r_2(1/pC)}{r_2 + (1/pC)} = 0.$$

2. Если замкнуть источник $\mathcal{E}$ и разомкнуть ветвь с сопротивлением или емкостью C , то нетрудно получить уравнения, приравнявая нулю входные сопротивления относительно точек разрыва ветвей:

$$Z_{вх2}(p) = r_2 + \frac{(r_1 + pL)(1/pC)}{r_1 + pL + (1/pC)} = 0$$

или

$$Z_{вх3}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{(r_1 + pL)r_2}{r_1 + r_2 + pL} = 0.$$

3. Если приравнять к нулю проводимость между узлами 1, 2, то получим характеристическое уравнение вида (15.8):

$$\frac{1}{r_1 + pL} + pC + \frac{1}{r_2} = 0.$$

После преобразования любого из уравнений и подстановки численных значений параметров найдем

$$p^2 + 200p + 20 \cdot 10^3 = 0.$$

Вычислим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -100 \pm j100.$$

Порядок расчета переходных процессов классическим методом. Токи и напряжения схемы при переходном процессе могут быть рассчитаны следующим образом.

Анализируя схему до коммутации, необходимо найти значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях: $i_L(0_-)$; $u_C(0_-)$. Эти значения позволяют определить на основании законов коммутации независимые начальные условия, т. е. $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ и $u_C(0_+) = u_C(0_-)$.

В схеме после коммутации следует рассчитать принужденные составляющие искомых токов и напряжений. Далее для схемы после коммутации требуется составить характеристическое уравнение и определить его корни. Искомые величины следует представить как суммы свободных и принужденных составляющих и вычислить постоянные интегрирования. Начальные значения искомых величин и их производных, необходимые для вычисления постоянных интегрирования, находят с помощью независимых начальных условий и уравнений цепи.

Рассмотренная методика расчета переходных процессов применима и к цепям, содержащим электронные лампы и транзисторы.

Пример 15.2. Рассчитать напряжение $u_2(t)$ на выходе лампового резонансного усилителя, эквивалентная схема которого приведена на рис. 15.3, при подключении источника гармонического напряжения $u_1(t) = U_{m1} \sin(\omega t + \psi)$.

Решение. Нагрузкой резонансного усилителя служит параллельный контур $L-C-r_1$. Параметры данного усилителя таковы, что характеристическое уравнение для этого контура

$$\frac{1}{pL} + pC + \frac{1}{r_1} = 0$$

имеет комплексно-сопряженные корни.

Для схемы на рис. 15.3 можно составить уравнение

$$C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{r} + \frac{1}{L} \int u_2 dt = -S u_1,$$

где $r = r_1 r_i / (r_i + r_1)$. После дифференцирования этого уравнения получим

$$C \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{L} = -S \frac{du_1}{dt}.$$

Следовательно, характеристическое уравнение принимает вид

$$Cp^2 + \frac{1}{r} p + \frac{1}{L} = 0.$$

Полученное уравнение эквивалентно уравнению

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{r} + pC + \frac{1}{pL} = 0,$$

где $Y_{\text{вх}}(p)$ — входная проводимость относительно узлов 2—3 при $u_1 = 0$ и $S u_1 = 0$, т. е. при разомкнутом зависимом источнике тока. Таким образом, для заданной схемы можно воспользоваться соотношением (15.8).

Если обозначить

$$J(t) = J_m \sin(\omega t + \psi) = -S u_{1m} \sin(\omega t + \psi),$$

то для определения напряжения $u_2(t)$ можно воспользоваться выражениями, полученными в § 6.7.

Для цепей с электронными элементами и взаимной индукцией запись характеристического уравнения в виде (15.7) и (15.8) может

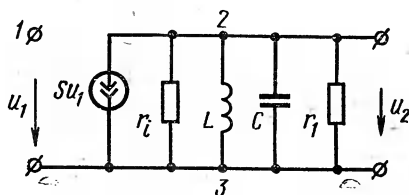


Рис. 15.3

быть затруднена, поэтому для составления характеристического уравнения целесообразно воспользоваться другими способами, например применить выражения (15.5) и (15.6).

§ 15.2. Переходные и импульсные характеристики цепей

При анализе цепей во временной области часто применяют две специальные функции: единичную функцию и единичный импульс.

Единичную функцию $1(t)$ определяют следующим образом (рис. 15.4, а):

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (15.9)$$

Функция $1(t)$ непрерывна всюду, кроме точки $t=0$; значение функции $1(t)$ в точке разрыва можно считать неопределенным*.

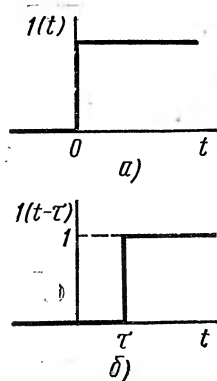


Рис. 15.4

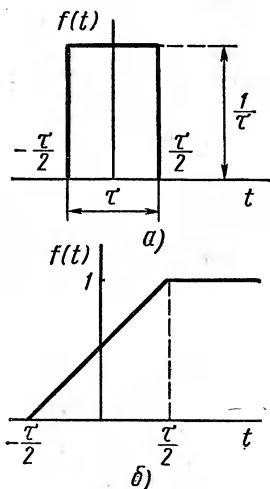


Рис. 15.5

Аналогично можно определить функцию $1(t-\tau)$ (рис. 15.4, б).

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau; \\ 1 & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (15.10)$$

Умножение любой ограниченной функции $f(t)$ на $1(t-\tau)$ дает функцию

$$f(t) 1(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau; \\ f(t) & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (15.11)$$

* Можно также считать значение функции в точке разрыва равным $1/2$ или 1.

Таким образом, если в цепи имеется источник э. д. с. или тока $f(t)1(t)$, то это означает, что источник $f(t)$ включается в цепь в момент времени $t=0$.

Единичный импульс или дельта-функцию $\delta(t)$ определяют как функцию, равную нулю для всех t , кроме $t=0$. В момент времени $t=0$ $\delta(0)=\infty$ и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Дельта-функцию можно рассматривать как предел последовательности импульсов длительности τ и амплитуды $1/\tau$ (рис. 15.5, а) при $\tau \rightarrow 0$; площадь таких импульсов равна единице. Импульс на рис. 15.5, а представляет собой производную от функции (рис. 15.5, б), которая при $\tau \rightarrow 0$ превращается в функцию $1(t)$.

Импульс, показанный на рис. 15.5, может быть записан в виде разности

$$\frac{1}{\tau} \left[1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right].$$

Следовательно,

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = \frac{d}{dt} 1(t),$$

т. е. дельта-функция является производной от единичной функции:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t).$$

Из определения дельта-функции следует, что

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\theta) d\theta, \quad (15.12)$$

где θ — переменная интегрирования.

Определение дельта-функции как производной от единичной функции не является строгим, так как производной в обычном смысле от функции $1(t)$ при $t=0$ не существует*.

Дельта-функция, смещенная на время τ относительно начала координат,

$$\delta(t - \tau) = \frac{d}{dt} 1(t - \tau).$$

Для некоторой функции времени $f(t)$, непрерывной при $t=\tau$, интеграл

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (15.13)$$

* Все операции с дельта-функциями могут быть строго обоснованы с помощью теории обобщенных функций. Обобщенные функции включают как частный случай обычные функции и дельта-функции. Для последующего изложения достаточно соотношений (15.11) и (15.12).

Действительно, произведение $f(t) \delta(t - \tau)$ равно нулю при всех значениях $t \neq \tau$ и

$$f(\tau) \int_{\tau-}^{\tau+} \delta(t - \tau) dt = f(\tau).$$

Важными характеристиками электрической цепи являются переходная и импульсная характеристики.

Переходная характеристика цепи представляет собой реакцию цепи (при нулевых начальных условиях) на единичную возмущающую функцию.

Импульсная характеристика цепи определяется как реакция цепи (при нулевых начальных условиях) на единичный возмущающий импульс.

Возмущающее воздействие может быть напряжением источника э. д. с. или током источника тока. В качестве реакции цепи также рассматриваются напряжение или ток. Следовательно, переходные характеристики могут быть безразмерными или иметь размерность проводимости или сопротивления.

В соответствии с этим переходные характеристики называют *переходными коэффициентами передачи напряжения или тока*, а также *переходными проводимостями или сопротивлениями*.

Переходные характеристики могут быть найдены путем расчета токов или напряжений при подключении источника постоянной э. д. с. в 1 В или источника постоянного тока в 1 А.

Пример 15.3. Для цепи на рис. 15.6 определить следующие переходные характеристики при $r_1 = r_2 = r$, $u_C(0) = 0$: переходную входную проводимость $g_{11}(t)$, переходные взаимные проводимости $g_{21}(t)$, $g_{31}(t)$ и переходный коэффициент передачи напряжений $K_{21}^{(u)}(t)$.

Решение. Если $u_1(t) = 1(t)$, то искомые функции $g_{11}(t)$, $g_{21}(t)$, $g_{31}(t)$ и $K_{21}^{(u)}(t)$ равны соответственно $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ и $u_2(t)$. Рассчитывая токи i_1 , i_2 , i_3 и напряжение u_2 при подключении на вход цепи источника постоянной э. д. с. $\mathcal{E} = u_1 = 1$ В, для $t > 0$ получим:

$$g_{11}(t) = \frac{1}{2r} (1 + e^{-t/\tau});$$

$$g_{21}(t) = \frac{1}{2r} (1 - e^{-t/\tau});$$

$$g_{31}(t) = \frac{1}{r} e^{-t/\tau};$$

$$K_{21}^{(u)} = \frac{1}{2} (1 - e^{-t/\tau}),$$

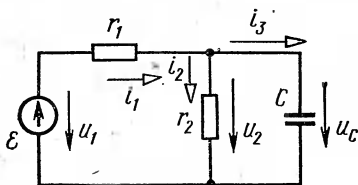


Рис. 15.6

где $\tau = rC/2$. Не указывая области определения, переходные характеристики запишем в следующем виде:

$$g_{11}(t) = \frac{1}{2r} (1 + e^{-t/\tau}) 1(t);$$

$$g_{21}(t) = \frac{1}{2r} (1 - e^{-t/\tau}) 1(t);$$

$$g_{31}(t) = \frac{1}{r} e^{-t/\tau} 1(t);$$

$$K_{21}^{(u)}(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-t/\tau}) 1(t).$$

При этом $g_{11} = g_{21} + g_{31}$, $K_{21}^{(u)} = r_2 g_{21} = r g_{21}$.

Нетрудно установить соотношения между переходными и импульсными характеристиками. Пусть, например, реакция цепи на единичное напряжение $1(t)$ равна $g(t)$. Реакция на единичный импульс может быть определена как предел реакции на импульс, показанный на рис. 15.5, а при $\tau \rightarrow 0$. Так как в линейной цепи справедлив принцип наложения, реакцию на этот импульс, равный

$$\frac{1}{\tau} \left[1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right],$$

определяем как разность

$$\frac{1}{\tau} \left[g\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - g\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right].$$

Следовательно, импульсная характеристика

$$g_{\delta}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} = \frac{d}{dt} g(t)$$

представляет собой производную от переходной характеристики

$$g_{\delta}(t) = \frac{d}{dt} g(t) = g'(t). \quad (15.14)$$

Справедливо также соотношение

$$g(t) = \int_{-\infty}^t g_{\delta}(\theta) d\theta. \quad (15.15)$$

Равенства (15.14) и (15.15) являются следствиями равенств (15.11) и (15.12).

Следует рассмотреть воздействие ступенчатых и импульсных источников на индуктивность и емкость. Если ток в индуктивности $i_L = J 1(t)$ ($J = \text{const}$), т. е. представляет собой ступенчатую функцию величины J , то напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = LJ \frac{d1(t)}{dt} = LJ \delta(t).$$

При умножении импульсной функции $\delta(t)$ на LJ получают импульсную функцию, площадь которой равна LJ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_L dt = LJ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = LJ.$$

Следовательно, если $i_L = J1(t)$, то при $t=0$ $u_L = \infty$; при $t \neq 0$ напряжение $u_L = 0$.

Пусть к индуктивности приложено импульсное напряжение $LJ\delta(t)$. Тогда ток в индуктивности

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\theta) d\theta = J \int_{-\infty}^t \delta(\theta) d\theta = J1(t),$$

т. е. воздействие импульсного напряжения приводит к скачкообразному изменению тока в индуктивности.

Если напряжение на емкости является ступенчатой функцией $u_C = U1(t)$ ($U = \text{const}$), то ток в емкости

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = CU\delta(t)$$

представляет собой импульсную функцию с площадью CU . При воздействии на емкость импульсного тока $CU\delta(t)$ напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\theta) d\theta = U \int_{-\infty}^t \delta(\theta) d\theta = U1(t)$$

изменяется скачком при $t=0$.

Таким образом, при действии импульсных источников нарушается непрерывность токов в индуктивностях и напряжений на емкостях, установленная из условия конечной величины напряжений u_L , токов i_C и, следовательно, мощностей (см. гл. 3).

Пример 15.4. Для цепи рис. 15.6 рассчитать импульсные характеристики, соответствующие переходным характеристикам $g_{11}(t)$, $g_{31}(t)$ и $K_{21}^{(u)}(t)$.

Решение. Переходная характеристика (см. пример 15.3)

$$g_{11}(t) = \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} e^{-t/\tau} \right) 1(t).$$

Дифференцируя это выражение по правилу дифференцирования произведения, получим импульсную характеристику

$$g_{\delta 11}(t) = g'_{11}(t) = \frac{1}{2r} \delta(t) + \frac{1}{2r} \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} 1(t) + \frac{1}{2r} e^{-t/\tau} \delta(t).$$

Так как $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$, произведение

$$e^{-t/\tau} \delta(t) = e^0 \delta(t) = \delta(t).$$

Таким образом,

$$g_{\delta 11}(t) = \frac{1}{r} \delta(t) - \frac{1}{r^2 C} e^{-t/\tau} 1(t).$$

Если $t > 0$, то

$$g_{\delta_{11}}(t) = -\frac{1}{r^2 C} e^{-t/\tau}.$$

Аналогично найдем импульсные характеристики:

$$g_{\delta_{21}}(t) = g'_{21}(t) = \frac{1}{r^2 C} e^{-t/\tau} 1(t);$$

$$g_{\delta_{31}}(t) = g'_{31}(t) = \frac{1}{r} \delta(t) - \frac{2}{r^2 C} e^{-t/\tau} 1(t);$$

$$K_{\delta_{21}}^{(u)}(t) = K'_{21}(t) = \frac{1}{r C} e^{-t/\tau} 1(t).$$

На рис. 15.7, а—г приведены соответственно графики импульсных характеристик $g_{\delta_{11}}(t)$, $g_{\delta_{21}}(t)$, $g_{\delta_{31}}(t)$, $K_{\delta_{21}}(t)$, которые показывают, что при воздействии импульсного напряжения на входе цепи (см. рис. 15.6) токи i_1 и i_3 в мо-

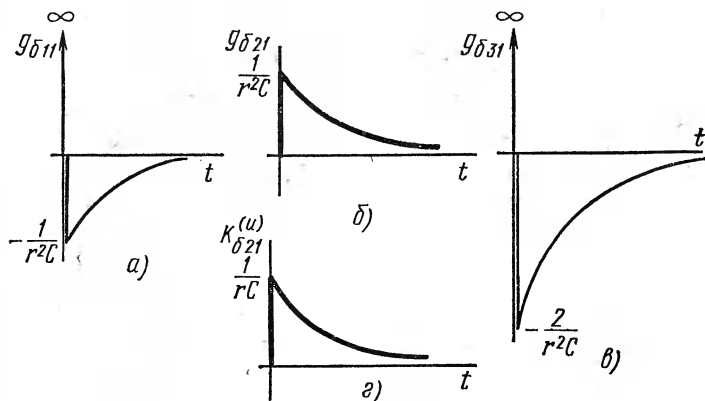


Рис. 15.7

мент $t=0$ принимают бесконечно большие значения, поэтому емкость мгновенно заряжается (напряжение на емкости скачкообразно возрастает). При $t > 0$ напряжение на входе цепи становится равным нулю и в цепи начинается свободный процесс разряда емкости.

§ 15.3. Расчет переходных процессов при воздействии источников э. д. с. и тока произвольной формы

С помощью переходных и импульсных характеристик можно определить реакцию цепи при воздействии источников э. д. с. (тока) произвольной формы и нулевых начальных условиях.

Пусть на цепь воздействует напряжение, форма которого показана на рис. 15.8. Это напряжение можно приближенно представить в виде суммы ступенчатых функций, сдвинутых последовательно относительно друг друга на малый отрезок времени $\Delta\tau$:

$$u(t) \approx \sum_k \Delta u(k \Delta\tau) 1(t - k \Delta\tau),$$

где

$$\Delta u(k \Delta\tau) = u(k \Delta\tau) - u[(k-1) \Delta\tau] \approx u'(k \Delta\tau) \Delta\tau.$$

Если требуется определить ток $i(t)$ в некоторой ветви схемы, то, применяя принцип наложения, можно записать

$$i(t) \approx \sum_k u'(k\Delta\tau) g(t - k\Delta\tau) \Delta\tau,$$

где $g(t)$ — соответствующая переходная проводимость; $u'(k\Delta\tau) \times \Delta\tau$ — реакция цепи на ступенчатое напряжение $\Delta u(k\Delta\tau)$.

При условии, что $\Delta\tau$ стремится к бесконечно малой величине, суммирование заменяется интегрированием:

$$i(t) = \int_0^t u'(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (15.16)$$

Формула (15.16) представляет собой точное выражение для определения реакции цепи на напряжение $u(t)$. Аналогично можно записать выражение для тока некоторой ветви при действии

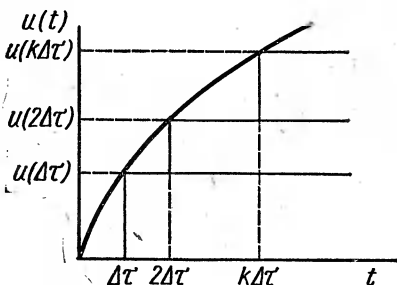


Рис. 15.8

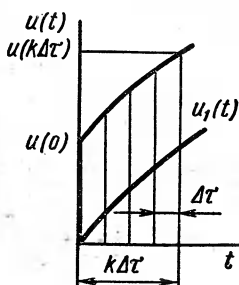


Рис. 15.9

источника тока произвольной формы или для напряжения между парой узлов при действии источника э. д. с. или источника тока.

Формулу (15.16) можно распространить и на случай, когда функция $u(t)$ имеет разрывы. Например, напряжение $u(t)$, форма которого показана на рис. 15.9, имеет разрыв в точке $t=0$ и, следовательно,

$$u(t) = u(0) 1(t) + u_1(t),$$

где $u_1(t) = u(t) - u(0)$. Производная

$$u'(\tau) = u(0) \delta(\tau) + u'_1(\tau),$$

где $u'_1(\tau) = u'(\tau)$ при $\tau > 0$ содержит импульсную функцию. Из выражения (15.16) получаем

$$i(t) = u(0) g(t) + \int_0^t u'_1(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (15.17)$$

Это равенство может быть также установлено [аналогично (15.16)] с помощью принципа наложения.

Выражению (15.17) можно придать другую форму, если под знаком интеграла переменную $t - \tau$ заменить на τ :

$$i(t) = u(0) g(t) + \int_0^t u' (t - \tau) g(\tau) d\tau. \quad (15.18)$$

Чтобы получить соотношения для расчета реакции цепи с помощью импульсной характеристики, заданное напряжение (рис. 15.9) следует представить как совокупность импульсов длительностью $\Delta\tau$. Площадь одного импульса можно считать равной произведению $u(k\Delta\tau)\Delta\tau$. Если каждый импульс заменить импульсной функцией $u(k\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t - k\Delta\tau)$, то

$$u(t) \approx \sum_k u(k\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t - k\Delta\tau).$$

Реакция цепи на импульс $u(k\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t - k\Delta\tau)$ определяется как произведение

$$u(k\Delta\tau)g_\delta(t - k\Delta\tau)\Delta\tau,$$

где $g_\delta(t - k\Delta\tau)$ — импульсная характеристика. По принципу наложения реакция цепи на напряжение $u(t)$ выражается соотношением

$$i(t) \approx \sum_k u(k\Delta\tau)g_\delta(t - k\Delta\tau)\Delta\tau,$$

или при $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$i(t) = \int_0^t u(\tau)g_\delta(t - \tau)d\tau. \quad (15.19)$$

Учитывая равенство (15.14), формулу (15.19) можно также записать в виде

$$i(t) = \int_0^t u(\tau)g'(t - \tau)d\tau. \quad (15.20)$$

Если переходная характеристика $g(t)$ имеет разрыв в точке $t = 0$, то она может быть представлена в виде суммы:

$$g(t) = g(0)1(t) + g_1(t),$$

где $g_1(t) = g(t) - g(0)$ при $t > 0$. В этом случае импульсная характеристика

$$g_\delta(t - \tau) = g'(t - \tau) = g(0)\delta(t - \tau) + g'_1(t - \tau),$$

где $g'_1(t - \tau) = g'(t - \tau)$ при $t > \tau$, т. е. содержит импульсную функцию $g(0)\delta(t - \tau)$. Из выражения (15.20)

$$i(t) = g(0)u(t) + \int_0^t u(\tau)g'(t - \tau)d\tau. \quad (15.21)$$

Равенство (15.21) можно доказать на основании (15.17), если применить формулу интегрирования по частям. Заменяя под знаком интеграла в соотношении (15.21) переменную $t - \tau$ на τ , можно получить еще одно соотношение

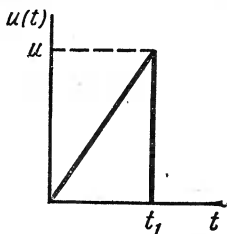


Рис. 15.10

$$i(t) = g(0) u(t) + \int_0^t u(t-\tau) g'(\tau) d\tau. \quad (15.22)$$

Формулы (15.16) ÷ (15.22) называют интегралами Дюамеля или интегралами наложения.

Пример 15.5. Определить ток в последовательной rL -цепи при подключении к источнику импульсного напряжения (рис. 15.10).

Решение. В интервале времени $0 \div t_1$ напряжение $u(t)$ изменяется по линейному закону

$$u(t) = \frac{U}{t_1} t$$

и производная $u'(t) = U/t_1$ постоянна. Для расчета тока воспользуемся соотношением (15.16). Переходная проводимость

$$g(t) = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L} t} \right),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t u'(\tau) g(t-\tau) d\tau = \frac{U}{t_1 r} \int_0^t \left[1 - e^{-\frac{r}{L} (t-\tau)} \right] d\tau = \\ &= \frac{U}{t_1 r} \left[t - \frac{L}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L} t} \right) \right]; \quad 0 \leq t \leq t_1. \end{aligned}$$

В интервале времени $t > t_1$ напряжение $u(t) = 0$. С учетом разрыва функции $u(t)$ в момент $t = t_1$

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^{t_1} u'(t) g(t-\tau) d\tau - U g(t-t_1) = \\ &= \frac{U}{t_1 r} \int_0^{t_1} \left[1 - e^{-\frac{r}{L} (t-\tau)} \right] d\tau - \frac{U}{r} \left[1 - e^{-\frac{r}{L} (t-t_1)} \right] = \\ &= \frac{U}{t_1 r} \left[\frac{L}{r} \left(e^{-\frac{r}{L} t_1} - 1 \right) \right] + t_1 e^{-\frac{r}{L} (t-t_1)}; \quad t \geq t_1. \end{aligned}$$

При $t = t_1$ решения, найденные для различных интервалов, дают одно и то же значение тока $i(t_1)$.

§ 15.4. Особенности расчета переходных процессов в цепях с емкостными контурами и индуктивными сечениями

В схеме электрической цепи в результате коммутации могут быть образованы контуры, которые состоят только из емкостей или емкостей и источников э. д. с. (емкостные контуры). Если

контур состоит только из емкостей, то в первый момент после коммутации, по уравнению Кирхгофа, $\sum_k u_{C_k}(0_+) = 0$, где u_{C_k} — напряжение на k -й емкости контура. Считая напряжение на емкости $u_{C_k}(0_+) = u_{C_k}(0_-)$ непрерывным, легко прийти к противоречию: для произвольных начальных условий $\sum_k u_{C_k}(0_-) \neq 0$, однако $\sum_k u_{C_k}(0_+) = 0$.

Аналогично в результате коммутации в схеме могут быть образованы сечения, состоящие только из индуктивностей или из индуктивностей и источников тока (индуктивные сечения). Если сечение состоит только из индуктивностей, то, согласно закону

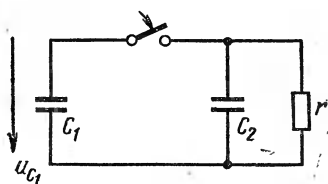


Рис. 15.11

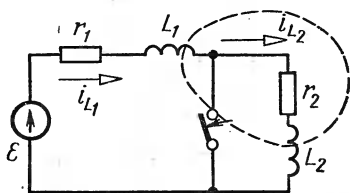


Рис. 15.12

Кирхгофа, $\sum_k i_{L_k}(0_+) = 0$, где i_{L_k} — ток k -й индуктивности сечения.

Для произвольных начальных условий $\sum_k i_{L_k}(0_-) \neq 0$, поэтому при условии непрерывности токов в индуктивностях $i_{L_k}(0_+) = i_{L_k}(0_-)$ также возникает противоречие.

В схеме на рис. 15.11 емкость C_1 , заряженная до напряжения U , присоединяется к незаряженной емкости C_2 , образуя емкостной контур $C_1 - C_2$. До коммутации $u_{C_1}(0_-) = U \neq u_{C_2}(0_-) = 0$; после коммутации $u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+)$. В схеме на рис. 15.12 после коммутации индуктивности L_1 и L_2 включаются последовательно, образуя индуктивное сечение $L_1 - L_2$. До коммутации $i_1(0_-) = \mathcal{E}/r_1 \neq i_2(0_-) = 0$; после коммутации $i_1(0_+) = i_2(0_+)$.

Таким образом, при расчете схем с емкостными контурами или индуктивными сечениями нельзя применять условия непрерывности напряжений на емкостях или токов в индуктивностях (законы коммутации). В таких случаях следует применять более общие условия (законы): условия сохранения заряда и потокосцепления.

Условие сохранения (непрерывности) заряда для схемы на рис. 15.11 имеет вид

$$q_1(0_-) + q_2(0_-) = q_1(0_+) + q_2(0_+),$$

где $q_1 = C_1 u_{C_1}$, $q_2 = C_2 u_{C_2}$ — заряды емкостей C_1 и C_2 , т. е. суммарный заряд емкостей C_1 и C_2 непрерывен в момент коммутации.

Из условия сохранения заряда получаем уравнение для начальных значений $u_{C_1}(0_+)$ и $u_{C_2}(0_+)$:

$$C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-) = C_1 U = C_1 u_{C_1}(0_+) + C_2 u_{C_2}(0_+).$$

Учитывая, что $u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+)$, находим

$$u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+) = u_C(0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U.$$

Характеристическое уравнение цепи (см. рис. 15.11) после коммутации

$$p(C_1 + C_2) + \frac{1}{r} = 0$$

имеет корень $p_1 = -1/r(C_1 + C_2)$ и, следовательно, для напряжений u_{C_1} и u_{C_2} при $t > 0$ ($u_{C_{1np}} = u_{C_{2np}} = 0$) справедливо выражение

$$u_{C_1}(t) = u_{C_2}(t) = u_C(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U e^{p_1 t}.$$

В момент времени $t = 0$ напряжение u_{C_1} скачкообразно уменьшается, а напряжение u_{C_2} скачкообразно возрастает (рис. 15.13).

Такое изменение напряжений обусловлено импульсными токами емкостей, которые возникают в момент $t = 0$ и осуществляют мгновенное перераспределение зарядов между емкостями.

Для схемы на рис. 15.12 условие сохранения (непрерывности) потокосцепления записывается в следующем виде:

$$\Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-) = \Psi_1(0_+) + \Psi_2(0_+),$$

где $\Psi_1 = L_1 i_{L_1}$, $\Psi_2 = L_2 i_{L_2}$ — потокосцепления индуктивностей L_1 и L_2 , т. е. суммарное потокосцепление индуктивностей

L_1 и L_2 в момент коммутации непрерывно. Из этого условия получаем уравнение

$$L_1 i_{L_1}(0_-) + L_2 i_{L_2}(0_-) = L_1 \frac{\mathcal{E}}{r_1} = L_1 i_{L_1}(0_+) + L_2 i_{L_2}(0_+).$$

Так как после коммутации $i_{L_1}(0_+) = i_{L_2}(0_+)$, начальные значения токов

$$i_{L_1}(0_+) = i_{L_2}(0_+) = i_L(0) = \frac{L_1 \mathcal{E}}{(L_1 + L_2) r_1}.$$

Характеристическое уравнение схемы (см. рис. 15.12) после коммутации

$$p(L_1 + L_2) + r_1 + r_2 = 0$$

имеет корень $p_1 = -(r_1 + r_2)/(L_1 + L_2)$ и, следовательно, для токов i_{L_1} и i_{L_2} при $t > 0$ справедливо выражение

$$i_{L_1}(t) = i_{L_2}(t) = i_L(t) = i_{L_{св}}(t) + i_{L_{np}}(t) = i_{L_{св}}(0) e^{p_1 t} + \frac{\mathcal{E}}{r_1 + r_2},$$

где $i_{L_{св}}(0) = i_L(0) - \mathcal{E}/(r_1 + r_2) = \mathcal{E}(L_1 r_2 - L_2 r_1)/r_1(r_1 + r_2)(L_1 + L_2)$.

Графики токов $i_{L_1}(t)$ и $i_{L_2}(t)$ показаны на рис. 15.14 при условии, что $i_L(0) > i_{L_{np}}$. В момент коммутации токи изменяются скачкообразно, так как на индуктивностях возникают импульсные напряжения, приводящие к мгновенному перераспределению магнитного потока между индуктивностями.

В общем случае условие непрерывности заряда формулируется для зарядов емкостей, входящих в емкостные контуры, следующим образом: *алгебраическая сумма зарядов емкостей, присоединенных к любому общему узлу, непрерывна*:

$$\begin{aligned} \sum_j q_j(0_-) &= \sum_j C_j u_{C_j}(0_-) = \\ &= \sum_j q_j(0_+) = \sum_j C_j u_{C_j}(0_+). \end{aligned} \quad (15.23)$$

Сумму зарядов $\sum_j q_j$ записывают

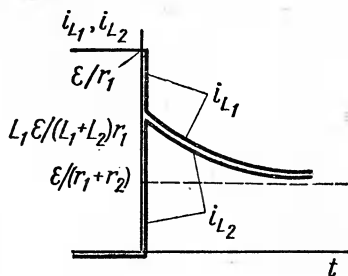


Рис. 15.14

с учетом положительных направлений напряжений на емкостях аналогично первому закону Кирхгофа для токов; при этом учитывают только ветви емкостных контуров.

Условие непрерывности потокосцепления в общем случае формулируется для потокосцеплений индуктивностей, входящих в индуктивные сечения следующим образом: *алгебраическая сумма потокосцеплений индуктивностей в любом замкнутом контуре непрерывна*:

$$\sum_j \Psi_j(0_-) = \sum_j L_j i_{L_j}(0_-) = \sum_j \Psi_j(0_+) = \sum_j L_j i_{L_j}(0_+). \quad (15.24)$$

Сумму потокосцеплений $\sum_j \Psi_j$ записывают с учетом положи-

тельных направлений токов в индуктивностях и направления обхода контура аналогично второму закону Кирхгофа для напряжений; при этом учитывают только ветви индуктивных сечений.

С помощью уравнений вида (15.23) и (15.24), уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа для напряжений $u_{C_j}(0_+)$ ветвей емкостных контуров, а также уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для токов $i_{L_j}(0_+)$ ветвей индуктивных сечений, можно определить все начальные значения $u_{C_j}(0_+)$ и $i_{L_j}(0_+)$ *.

Пример 15.6. Составить уравнения для определения начальных значений напряжений на емкостях схемы рис. 15.15.

Решение. После замыкания ключа в схеме образуется емкостный контур $\mathcal{C} - C_1 - C_2 - C_3$. Для узлов 1 и 2 составим уравнения непрерывности

* Емкостные контуры и индуктивные сечения не обязательно образуются в результате коммутации; такие контуры и сечения могут быть в схеме до коммутации. Уравнения (15.23) и (15.24) в этом случае также справедливы

варядов:

$$-C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-) = -C_1 u_{C_1}(0_+) + C_2 u_{C_2}(0_+);$$

$$-C_2 u_{C_2}(0_-) + C_3 u_{C_3}(0_-) = -C_2 u_{C_2}(0_+) + C_3 u_{C_3}(0_+).$$

В этих уравнениях учитываются только емкости контура.

По второму закону Кирхгофа для емкостного контура получим уравнение

$$\mathcal{E}(0_+) = u_{C_1}(0_+) + u_{C_2}(0_+) + u_{C_3}(0_+).$$

С помощью составленных уравнений определим напряжения $u_{C_1}(0_+)$, $u_{C_2}(0_+)$ и $u_{C_3}(0_+)$ при известных значениях $u_{C_1}(0_-)$, $u_{C_2}(0_-)$, $u_{C_3}(0_-)$ и $\mathcal{E}(0_+)$.

Емкость C_4 не входит в емкостный контур, поэтому ее напряжение непрерывно:

$$u_{C_4}(0_-) = u_{C_4}(0_+).$$

Пример 15.7. Составить уравнения для определения начальных значений токов в индуктивностях схемы на рис. 15.16.

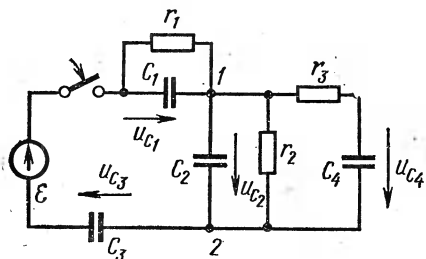


Рис. 15.15

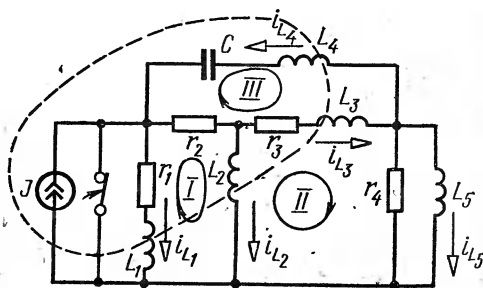


Рис. 15.16

Решение. При подключении источника тока J в схеме образуется индуктивное сечение $J-L_1-L_2-L_3-L_4$. Рассматривая контуры, показанные на рис. 15.16, составим следующие уравнения непрерывности потокоцеплений (учитываются только индуктивности сечения)*:

$$-L_1 i_{L_1}(0_-) + L_2 i_{L_2}(0_-) = -L_1 i_{L_1}(0_+) + L_2 i_{L_2}(0_+);$$

$$-L_2 i_{L_2}(0_-) + L_3 i_{L_3}(0_-) = -L_2 i_{L_2}(0_+) + L_3 i_{L_3}(0_+);$$

$$-L_3 i_{L_3}(0_-) - L_4 i_{L_4}(0_-) = -L_3 i_{L_3}(0_+) - L_4 i_{L_4}(0_+).$$

По первому закону Кирхгофа для сечения получим уравнение

$$J(0_+) = i_{L_1}(0_+) + i_{L_2}(0_+) + i_{L_3}(0_+) - i_{L_4}(0_+).$$

С помощью записанных уравнений определим токи $i_{L_1}(0_+) \div i_{L_4}(0_+)$.

Индуктивность L_5 не входит в сечение, поэтому ток непрерывен:

$$i_{L_5}(0_-) = i_{L_5}(0_+).$$

Скачкообразное изменение напряжений на емкостях и токов в индуктивностях приводит и к скачкообразному изменению энергий электрического и магнитного полей. Например, в цепи на

* Для составления уравнений непрерывности потокоцеплений можно выбрать и другие контуры, содержащие индуктивности $L_1 \div L_4$.

рис. 15.11 энергия электрического поля до коммутации

$$W_{\text{э}}(0_-) = \frac{C_1 U^2}{2},$$

после коммутации

$$W_{\text{э}}(0_+) = \frac{(C_1 + C_2) u_c^2(0)}{2} = \frac{C_1^2 U^2}{2(C_1 + C_2)} < W_{\text{э}}(0_-).$$

Аналогично определяется энергия магнитного поля в цепи на рис. 15.12.

Энергия электрического и магнитного полей не может исчезнуть. В реальных цепях при коммутациях, подобных коммутациям, показанным на рис. 15.11 и 15.12, между контактами ключа возникает дуга (искра), которая существует малое время. В сопротивлении дуги и происходит необратимое рассеяние энергии; кроме того, часть энергии может рассеиваться в сопротивлении соединительных проводов, а также излучаться.

Емкостные контуры и индуктивные сечения в схемах можно устранить, если учесть малые («паразитные») параметры реальных элементов цепи: сопротивления потерь конденсаторов и индуктивных катушек, межвитковую емкость катушек, сопротивление и индуктивность проводов. При этом в схемах будут невозможны скачкообразные изменения напряжений на емкостях и токов в индуктивностях (т. е. будут справедливы законы коммутации), а также импульсные токи и напряжения. Однако учет малых параметров неоправданно усложнит расчет цепи.

Например, если в схеме на рис. 15.11 учесть малое сопротивление соединительных проводов между емкостями, то схема будет описываться дифференциальным уравнением второго порядка. Напряжения u_{c1} и u_{c2} будут представлять сумму двух экспоненциальных функций и изменяться непрерывно. Так как сопротивление соединительных проводов очень мало, одна из экспоненциальных функций будет затухать значительно быстрее другой. В пределе, если пренебречь сопротивлением проводов, получается цепь, описываемая дифференциальным уравнением первого порядка. В общем случае каждый емкостной контур и каждое индуктивное сечение уменьшают порядок характеристического уравнения схемы на единицу.

В эквивалентных схемах цепей с взаимной индукцией и электронными элементами также возможны скачкообразные изменения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Например, как показано в § 6.8, токи трансформатора в момент коммутации изменяются скачкообразно, если коэффициент связи $K_c = 1$. Заме-

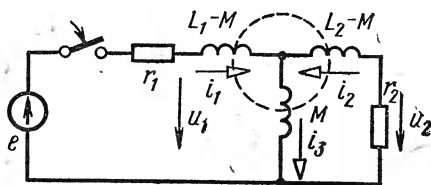


Рис. 15.17

няя трансформатор на рис. 6.30 эквивалентной схемой без взаимной индукции (см. рис. 9.15, а), легко прийти к схеме, содержащей индуктивное сечение (рис. 15.17). Условие непрерывности потокоцеплений для такой схемы имеет вид

$$(L_1 - M) i_1(0_-) + M i_3(0_-) = (L_1 - M) i_1(0_+) + M i_3(0_+);$$

$$(L_2 - M) i_2(0_-) + M i_3(0_-) = (L_2 - M) i_2(0_+) + M i_3(0_+)$$

или с учетом равенств $i_3 = i_1 + i_2$; $i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0$

$$\left. \begin{aligned} L_1 i_1(0_+) + M i_2(0_+) &= 0; \\ M i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Полученная система уравнений выражает условие непрерывности потокоцепления каждой обмотки трансформатора и может быть записана непосредственно при рассмотрении схемы на рис. 6.30. Если $K_c = 1$, то $M = \sqrt{L_1 L_2}$ и из любого уравнения следует

$$i_2(0_+) = -\sqrt{L_1/L_2} i_1(0_+).$$

Таким образом, полученная система уравнений не позволяет найти значения токов $i_1(0_+)$, $i_2(0_+)$, так как при $K_c = 1$ определитель системы $L_1 L_2 - M^2 = 0$. Следовательно, правая часть уравнений также равна нулю. Для расчета начальных значений токов необходимо составить дополнительное уравнение.

Так как напряжения u_1 и u_2 трансформатора при $K_c = 1$ связаны соотношениями $u_1 = \sqrt{L_1/L_2} u_2$ (см. § 9.2) и $u_2 = -r_2 i_2$, справедливо уравнение

$$e(0_+) = r_1 i_1(0_+) + u_1(0_+) = r_1 i_1(0_+) - r_2 \sqrt{L_1/L_2} i_2(0_+)$$

или

$$e(0_+) = r_1 i_1(0_+) + \frac{r_2 L_1}{L_2} i_1(0_+).$$

Начальные значения токов:

$$i_1(0_+) = \frac{L_2}{r_1 L_2 + r_2 L_1} e(0_+); \quad i_2(0_+) = -\frac{M}{r_1 L_2 + r_2 L_1} e(0_+),$$

что совпадает с результатами, полученными в § 6.8 при $K_c = 1$.

§ 15.5. Основные положения метода переменных состояния

Уравнениями состояния электрической цепи называют любую систему уравнений, определяющую режим цепи. В более узком смысле уравнениями состояния называют систему дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенную относительно производных. Метод анализа цепи, основанный на составлении и решении системы дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений состояния), называют методом переменных состояния.

Как было показано, закон изменения тока любой ветви $i(t)$ в переходном процессе для линейной цепи находят путем интегрирования дифференциального уравнения n -го порядка:

$$\alpha_n \frac{d^n i}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{di}{dt} + \alpha_0 i = F(t), \quad (15.25)$$

где $F(t)$ — функция, зависящая от параметров источников. Аналогичное дифференциальное уравнение может быть составлено для любого напряжения $u(t)$.

Уравнение (15.25) сводится к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. Так, полагая

$$i = x_1, \quad \frac{di}{dt} = x_2, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} = x_n,$$

получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n; \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_n + \frac{1}{\alpha_n} F(t). \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

Уравнения (15.26) можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} & \dots & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix} F(t), \quad (15.27)$$

где $\dot{x}_k = dx_k/dt$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Система n дифференциальных уравнений первого порядка (15.27) эквивалентна одному дифференциальному уравнению n -го порядка (15.25). Переменными x_k системы (15.27) служат ток некоторой ветви и его производные. Такие переменные называют переменными состояния, а уравнения (15.27) — уравнениями состояния. Если известны значения переменных x_k в момент времени t_0 , т. е. $x_k(t_0)$, и функция $F(t)$, то с помощью уравнений (15.27) можно найти значения $x_k(t)$ для $t > t_0$.

Как уже было показано, значения тока (напряжения) любой ветви и его производных в начальный момент времени t_0 определяются независимыми начальными условиями — напряжениями на емкостях и токами в индуктивностях, а также параметрами источников в момент времени t_0 . Следовательно, любые токи и напря-

жения цепи при $t > t_0$ могут быть найдены по известным значениям напряжений на емкостях и токов в индуктивностях в момент времени t_0 и известным законам изменения напряжений и токов источников.

Напряжения на емкостях и токи в индуктивностях следует рассматривать как основные переменные, характеризующие состояние линейной электрической цепи (переменные состояния), так как другие переменные, как, например, переменные в уравнении (15.27), зависят от этих напряжений и токов. В общем случае переменными состояния называют любые переменные $x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), которые позволяют определить выходные переменные $y_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) для $t > t_0$ по известным значениям $x_k(t_0)$ и входным воздействиям $v_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, q$). При этом выходными переменными могут быть токи ветвей и напряжения между узловыми парами, а входными воздействиями служат напряжения источников э. д. с. и токи источников тока.

Выбирая в качестве переменных состояния напряжения на емкостях и токи в индуктивностях, уравнение состояния можно записать аналогично (15.27):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{v}, \quad (15.28)$$

где $\mathbf{x}$ — столбцовая матрица размера $n \times 1$ переменных состояния; $\mathbf{A}_1$ — квадратная матрица порядка n ; $\mathbf{B}_1$ — матрица размера $n \times q$; $\mathbf{v}$ — столбцовая матрица размера $q \times 1$ напряжений источников э. д. с. и токов источников тока. Элементы матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$ определяются параметрами схемы и ее топологией.

К уравнению (15.28) следует добавить уравнение для выходных (искомых) переменных

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}, \quad (15.29)$$

где $\mathbf{y}$ — столбцовая матрица размера $m \times 1$ выходных переменных; $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{B}_2$ — матрицы, имеющие соответственно размеры $m \times n$ и $m \times q$, элементы которых определяются параметрами и топологией схемы.

Матричное уравнение (15.28) представляет систему дифференциальных уравнений в нормальной форме; уравнения (15.29) являются алгебраическими.

Метод переменных состояния относится к наиболее универсальным методам анализа электрических цепей. Он применим как к линейным, так и нелинейным цепям. Для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка разработаны численные методы, позволяющие автоматизировать расчет переходных процессов с помощью цифровых вычислительных машин.

§ 15.6. Составление дифференциальных уравнений состояния электрических цепей

Применение законов Кирхгофа. В простых случаях уравнения вида (15.28) и (15.29) составляют с помощью законов Кирхгофа.

Пусть требуется составить уравнения (15.28) и (15.29) для цепи, схема которой (после коммутации) приведена на рис. 15.18.

На основании законов Кирхгофа для узла 1 и контура 1

$$C \frac{du_C}{dt} = -g_1 u_C - i_L + J;$$

$$L \frac{di_L}{dt} = u_C - r_2 i_L - e,$$

где $g_1 = 1/r_1$. Эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g_1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если в качестве матрицы переменных состояния выбрана матрица

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix},$$

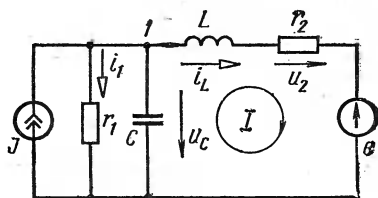


Рис. 15.18

а матрица параметров источников записана как

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix},$$

то

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{g_1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r_2}{L} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагая искомыми (выходными) переменными ток i_1 и напряжение u_2 , т. е.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

легко составить уравнение (15.29):

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для рассматриваемого примера

$$A_2 = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Применение принципа наложения. На основании принципа наложения можно составить уравнения (15.28) и (15.29), если в цепи нет емкостных контуров и индуктивных сечений, включая контуры, состоящие из емкостей и источников э. д. с., и сечения, состоящие из индуктивностей и источников тока.

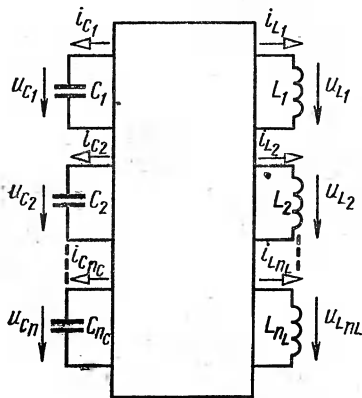


Рис. 15.19

На рис. 15.19 показана схема, в которой выделены все емкости и индуктивности. Часть схемы, изображенная в виде прямоугольника, содержит только резистивные элементы и источники э. д. с. и тока. Если в схеме нет емкостных контуров и индуктивных сечений, то напряжения всех n_C емкостей и токи всех n_L индуктивностей выбирают в качестве переменных состояния.

Для токов в емкостях и напряжений на индуктивностях справедливо соотношение

$$\begin{bmatrix} i_{C1} \\ \vdots \\ i_{Cn_C} \\ u_{L1} \\ \vdots \\ u_{Ln_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_{n_C} & L_1 & \dots & L_{n_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \vdots \\ \dot{u}_{Cn_C} \\ i_{L1} \\ \vdots \\ i_{Ln_L} \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_C \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_C \\ \dot{\mathbf{i}}_L \end{bmatrix}, \quad (15.30)$$

где $\mathbf{i}_C$ ($\mathbf{u}_L$) и $\dot{\mathbf{u}}_C$ ($\dot{\mathbf{i}}_L$) — столбцовые матрицы соответственно токов в емкостях (напряжений на индуктивностях) и производных от напряжений на емкостях (токов в индуктивностях); $\mathbf{C}$ ($\mathbf{L}$) — диагональная матрица емкостей (индуктивностей) схемы.

Заменяя емкости источниками э. д. с., а индуктивности — источниками тока (рис. 15.20), токи в емкостях $\mathbf{i}_C$ и напряжения на индуктивностях $\mathbf{u}_L$ находим по принципу наложения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_C &= \mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_C + \mathbf{H}_{CL}\mathbf{i}_L + \mathbf{H}_{Ce}\mathbf{e} + \mathbf{H}_{CJ}\mathbf{J}; \\ \mathbf{u}_L &= \mathbf{H}_{LC}\mathbf{u}_C + \mathbf{H}_{LL}\mathbf{i}_L + \mathbf{H}_{Le}\mathbf{e} + \mathbf{H}_{LJ}\mathbf{J}; \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

где $\mathbf{e}$ и $\mathbf{J}$ — столбцовые матрицы напряжений источников э. д. с. и токов источников тока; матрицы $\mathbf{H}_{CC}$, $\mathbf{H}_{CL}$ и другие определяют связь между соответствующими переменными в схеме на рис. 15.20. Например, при $\mathbf{i}_L = 0$, $\mathbf{e} = 0$ и $\mathbf{J} = 0$ из первого уравнения системы (15.31) получаем $\mathbf{i}_C = \mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_C$; следовательно, элементы матрицы $\mathbf{H}_{CC}$ представляют собой входные и взаимные проводимости ветвей с источниками $\mathbf{u}_C$. Аналогично можно убедиться, что элементы матриц $\mathbf{H}_{Ce}$ являются входными и взаимными проводимостями ветвей с источниками $\mathbf{u}_C$ и $\mathbf{e}$; элементы матриц $\mathbf{H}_{CL}$, $\mathbf{H}_{CJ}$ — коэффициенты передачи тока соответствующих ветвей; элементы матриц $\mathbf{H}_{LC}$, $\mathbf{H}_{Le}$ — коэффициенты передачи напряжения; элементы матриц $\mathbf{H}_{LL}$ и $\mathbf{H}_{LJ}$ — входные и взаимные сопротивления соответствующих ветвей.

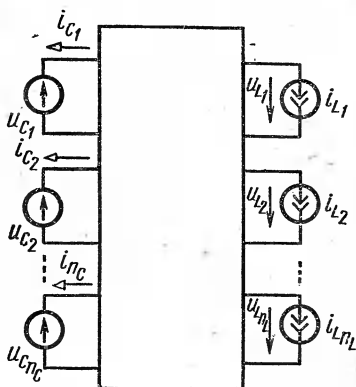


Рис. 15.20

Уравнения (15.31) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_C \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{H}_{CL} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{Ce} & \mathbf{H}_{CJ} \\ \mathbf{H}_{Le} & \mathbf{H}_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}. \quad (15.32)$$

Приравнявая правые части уравнений (15.30) и (15.32), получаем уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_C \\ \dot{\mathbf{i}}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{H}_{CL} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{Ce} & \mathbf{H}_{CJ} \\ \mathbf{H}_{Le} & \mathbf{H}_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}. \quad (15.33)$$

Данное уравнение совпадает с (15.28), если принять:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{H}_{CL} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LL} \end{bmatrix}, \quad (15.34)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{Ce} & \mathbf{H}_{CJ} \\ \mathbf{H}_{Le} & \mathbf{H}_{LJ} \end{bmatrix}. \quad (15.35)$$

Уравнение (15.29) для выходных переменных также можно составить по принципу наложения. Если

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{u}_2$ — столбцовые матрицы соответственно выходных токов и напряжений, то по аналогии с уравнением (15.32)

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1C} & H_{1L} \\ H_{2C} & H_{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{1e} & H_{1J} \\ H_{2e} & H_{2J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix}, \quad (15.36)$$

где элементы матриц H_{1C} , H_{1L} , H_{2C} , H_{2L} , H_{1e} , H_{1J} , H_{2e} , H_{2J} представляют собой соответственно входные и взаимные проводимости, коэффициенты передачи тока, входные и взаимные сопротивления, коэффициенты передачи напряжения соответствующих ветвей. Таким образом, в уравнении (15.29)

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} H_{1C} & H_{1L} \\ H_{2C} & H_{2L} \end{bmatrix}; \quad (15.37)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} H_{1e} & H_{1J} \\ H_{2e} & H_{2J} \end{bmatrix}. \quad (15.38)$$

Пример 15.8. Составить уравнения вида (15.28) и (15.29) для цепи на рис. 15.21, а с помощью принципа наложения.

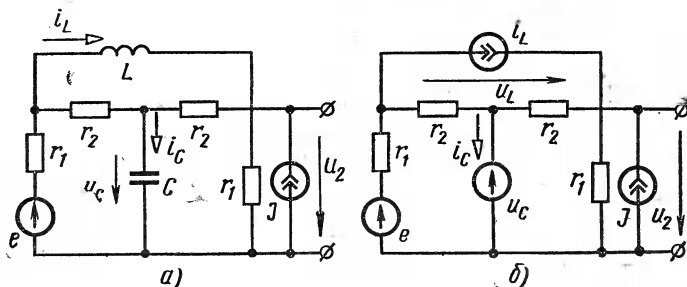


Рис. 15.21

Решение. Пусть

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix}; \quad y = u_2;$$

тогда общие уравнения (15.32) и (15.36) принимают вид

$$\begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{CC} & H_{CL} \\ H_{LC} & H_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{Ce} & H_{CJ} \\ H_{Le} & H_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix};$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} H_{2C} & H_{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{2e} & H_{2J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix}.$$

Заменяя емкость источником э. д. с., а индуктивность — источником тока (рис. 15.21, б), определим H_{CC} , H_{CL} и т. д.

Сначала в схеме на рис. 15.21, б исключим источники i_L , e , J , т. е. придем $i_L = 0$, $e = 0$ и $J = 0$. Тогда

$$i_C = -\frac{2}{r_1 + r_2} u_C; \quad u_L = 0; \quad u_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} u_C$$

и, следовательно,

$$H_{CC} = \frac{i_C}{u_C} = -\frac{2}{r_1 + r_2}; \quad H_{LC} = 0; \quad H_{2C} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Если $i_L \neq 0$, $u_C = 0$, $e = 0$ и $J = 0$, то

$$i_C = 0; \quad u_L = -\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} i_L; \quad u_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} i_L,$$

поэтому

$$H_{CL} = \frac{i_C}{i_L} = 0; \quad H_{LL} = \frac{u_L}{i_L} = -\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}; \quad H_{2L} = \frac{u_2}{i_L} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Полагая в схеме на рис. 15.21, б $u_C = 0$, $i_L = 0$, $J = 0$; $e \neq 0$, найдем:

$$i_C = \frac{1}{r_1 + r_2} e; \quad u_L = \frac{r_2}{r_1 + r_2} e; \quad u_2 = 0;$$

$$H_{Ce} = \frac{i_C}{e} = \frac{1}{r_1 + r_2}; \quad H_{Le} = \frac{u_L}{e} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}; \quad H_{2e} = 0.$$

При $e = 0$, $u_C = 0$, $i_L = 0$, $J \neq 0$

$$i_C = \frac{r_1}{r_1 + r_2} J; \quad u_L = -\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} J; \quad u_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} J;$$

$$H_{CJ} = \frac{i_C}{J} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}; \quad H_{LJ} = \frac{u_L}{J} = -\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}; \quad H_{2J} = \frac{u_2}{J} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Матрицы A_1 и B_1 вычислим в соответствии с выражениями (15.34) и (15.35), учитывая равенство

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}.$$

В результате уравнения (15.28) и (15.29) принимают вид

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{C(r_1 + r_2)} & 0 \\ 0 & -\frac{2r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(r_1 + r_2)} & \frac{r_1}{C(r_1 + r_2)} \\ \frac{r_2}{L(r_1 + r_2)} & -\frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix};$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_1 + r_2} & \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix}.$$

Применение топологических соотношений. Рассмотренная методика составления уравнений (15.28) и (15.29) с помощью принципа наложения непригодна, если в схеме цепи имеются емкостные контуры и индуктивные сечения, так как в таком случае нельзя записать уравнение (15.32). Для произвольных цепей (с емкостными контурами, индуктивными сечениями, а также электронными элементами), если воспользоваться топологическими матрицами сечений и контуров, уравнениями Кирхгофа в матричной форме и уравнениями для схемных элементов, могут быть составлены уравнения состояния. Уравнения состояния произвольных цепей можно привести к виду (15.28). При этом в правой части появятся дополнительные слагаемые, содержащие производные от напряжений

источников э. д. с. и токов источников тока. Подробно такие уравнения здесь не рассматриваются.

Порядок матрицы A_1 в уравнении (15.28), определяемый числом переменных состояния, в схеме без емкостных контуров и индуктивных сечений равен суммарному числу емкостей и индуктивностей *. Каждый емкостной контур и каждое индуктивное сечение уменьшают на единицу порядок матрицы A_1 , поскольку в качестве переменных состояния выбираются только независимые напряжения на емкостях и токи в индуктивностях.

§ 15.7. Способы решения уравнений состояния

Аналитические выражения для решения уравнений состояния. Если в цепи исключены источники ($v = 0$), то уравнение (15.28) принимает вид

$$\dot{x} = A_1 x. \quad (15.39)$$

Полученное уравнение характеризует свободные процессы в цепи. Решение этого уравнения выражается формулой

$$x = e^{A_1 t} x(0), \quad (15.40)$$

где $e^{A_1 t} = \exp(A_1 t)$ — матричная экспоненциальная функция; $x(0)$ — вектор начальных значений переменных состояния ($t_0 = 0$). Для того чтобы убедиться в справедливости выражения (15.40), можно подставить его в уравнение (15.39) ** и получить тождество

$$A_1 e^{A_1 t} x(0) \equiv A_1 e^{A_1 t} x(0).$$

Если матрица параметров источников $v \neq 0$, то решение уравнения (15.28) можно представить как произведение:

$$x = e^{A_1 t} F(t), \quad (15.41)$$

где $F(t)$ — некоторая матричная функция времени. Дифференцируя выражение (15.41), получаем

$$\dot{x} = A_1 e^{A_1 t} F(t) + e^{A_1 t} \dot{F}(t) = A_1 x + e^{A_1 t} \dot{F}(t). \quad (15.42)$$

Из сравнения уравнений (15.28) и (15.42) следует

$$e^{A_1 t} \dot{F}(t) = B_1 v. \quad (15.43)$$

После умножения обеих частей равенства (15.43) слева на матричную функцию $e^{-A_1 t}$ и интегрирования определяем

$$F(t) = \int_{-\infty}^t e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau.$$

* Порядок матрицы A_1 называется часто порядком сложности схемы и совпадает со степенью характеристического уравнения.

** Правила дифференцирования матричных функций аналогичны правилам дифференцирования скалярных функций.

Таким образом, решение (15.41) записывается как сумма:

$$x = e^{A_1 t} \int_{-\infty}^0 e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau + e^{A_1 t} \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau. \quad (15.44)$$

Подставляя в полученное выражение значение $t=0$, находим

$$x(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau.$$

Таким образом, окончательное решение уравнения (15.28) имеет вид

$$x = e^{A_1 t} x(0) + e^{A_1 t} \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau. \quad (15.45)$$

Решение этого уравнения является суммой двух слагаемых: первое слагаемое определяется начальным состоянием цепи (реакция цепи при «нулевом входе»: $v=0$), второе слагаемое определяется действием источников [реакция цепи при «нулевом состоянии»: $x(0)=0$].

С учетом соотношения (15.45) матрица выходных переменных (15.29) выражается равенством

$$y = A_2 e^{A_1 t} x(0) + A_2 e^{A_1 t} \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau + B_2 v. \quad (15.46)$$

Если в цепи действует только один источник э. д. с. (или тока), представляющей единичную функцию, то $v(t)=1(t)$ и при нулевых начальных условиях $x(0)=0$ решение (15.45) принимает вид

$$x = e^{A_1 t} [-e^{A_1 \tau} A_1^{-1}]_0^t B_1 = e^{A_1 t} (1 - e^{-A_1 t}) A_1^{-1} B_1$$

или

$$x = (e^{A_1 t} - 1) A_1^{-1} B_1. \quad (15.47)$$

В этом случае матрица выходных переменных

$$y = A_2 (e^{A_1 t} - 1) A_1^{-1} B_1 + B_2. \quad (15.48)$$

Формулы (15.47) и (15.48) выражают соответствующие переходные характеристики цепи.

Если в цепи действует источник импульсных э. д. с. или тока, т. е. $v(t)=\delta(t)$, то при нулевых начальных условиях получается

$$x = e^{A_1 t} \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 \delta(\tau) d\tau = e^{A_1 t} B_1 \int_0^t \delta(\tau) d\tau,$$

так как подынтегральное выражение отлично от нуля только при $\tau=0$. Следовательно, при действии импульсного источника

$$x = e^{A_1 t} B_1, \quad (15.49)$$

$$y = A_2 e^{A_1 t} B_1 + B_2 \delta(t). \quad (15.50)$$

Полученные формулы выражают соответствующие импульсные характеристики цепи.

Как видно из формул (15.45) ÷ (15.50), главным при решении уравнений состояния служит вычисление матричной экспоненциальной функции $e^{A_1 t}$. Известны различные аналитические способы вычисления этой функции; далее будет рассмотрен один из таких способов.

Пусть через λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) обозначены собственные значения матрицы A_1 , т. е. корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A_1) = 0, \quad (15.51)$$

где матрица I имеет порядок, равный порядку матрицы A_1 , т. е. n . Собственные значения матрицы A_1 совпадают с корнями характеристического уравнения цепи. Действительно, если производную $\dot{x}_k = dx_k/dt$ в (15.39) заменить на $p x_k$, то уравнение (15.39) можно переписать в виде

$$p x - A_1 x = (p I - A_1) x = 0. \quad (15.52)$$

Характеристическое уравнение получаем, приравнявая к нулю определитель системы (15.52):

$$\Delta(p) = \det(p I - A_1) = 0. \quad (15.53)$$

Корни уравнений (15.51) и (15.53) одинаковы.

Матричная функция $e^{A_1 t}$ наиболее просто вычисляется, если собственные значения матрицы A_1 различны. Общее выражение для искомой матричной функции

$$e^{A_1 t} = \alpha_0 I + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} A_1^{n-1}, \quad (15.54)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ — некоторые функции, подлежащие определению; $A_1^2 = A_1 A_1$; $A_1^3 = A_1 A_1 A_1$ и т. д. Для нахождения функций $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют полином

$$F(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} \quad (15.55)$$

и составляют уравнения:

$$e^{\lambda_1 t} = F(\lambda_1), \quad e^{\lambda_2 t} = F(\lambda_2), \quad \dots, \quad e^{\lambda_n t} = F(\lambda_n),$$

или

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (15.56)$$

Из этих уравнений получаем

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (15.57)$$

Подстановка функций (15.57) в (15.54) дает искомое решение.

Если среди собственных значений матрицы A_1 есть кратные значения, то общие выражения (15.54) и (15.55) останутся справедливыми, а уравнения для определения функций $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ изменятся. Так, если λ_i — собственное значение кратности m_i , то составляют m_i уравнений:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i t} &= F(\lambda_i); \\ \frac{d e^{\lambda_i t}}{d \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i} &= t e^{\lambda_i t} = \frac{d F(\lambda)}{d \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i}; \\ \frac{d^2 e^{\lambda_i t}}{d \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_i} &= t^2 e^{\lambda_i t} = \frac{d^2 F(\lambda)}{d \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_i}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^{m_i-1} e^{\lambda_i t}}{d \lambda^{m_i-1}} \Big|_{\lambda=\lambda_i} &= t^{m_i-1} e^{\lambda_i t} = \frac{d^{m_i-1} F(\lambda)}{d \lambda^{m_i-1}} \Big|_{\lambda=\lambda_i}. \end{aligned}$$

Составляя такие уравнения для каждого собственного значения и решая их совместно, определяем функции $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Пример 15.9. Для цепи на рис. 15.18 определить $i_1(t)$ и $u_2(t)$, если $J(t)=0$; $e(t)=1(t)$; $r_1=0,5$ Ом; $r_2=2,5$ Ом; $C=1$ Ф; $L=0,5$ Г. Начальные условия: $u_C(0)=0$, $i_L(0)=0$.

Решение. Уравнения состояния цепи получены в § 15.6 при условии, что в цепь включены источники тока и э. д. с. Если источник тока отсутствует ($J(t)=0$), то матрицы A_1 и A_2 не изменяют своих значений:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{g_1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r_2}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix}.$$

Матрицы B_1 и B_2 при наличии в цепи только источника э. д. с. $e(t)$ принимают вид

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так как напряжение источника э. д. с. представляет единичную функцию, для выходных переменных справедливо выражение вида (15.48)

$$y = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} \left\{ e^{A_1 t} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} A_1^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления матричной функции $e^{A_1 t}$ следует найти собственные значения матрицы A_1 из уравнения

$$\Delta(\lambda) = \det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -2 & \lambda+5 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5)+2=0$$

или

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -4$. Так как порядок матрицы A_1 $n=2$, полином $F(\lambda)$ имеет первую степень:

$$F(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda.$$

Функции α_0 и α_1 определяем из уравнений

$$e^{-3t} = \alpha_0 - 3\alpha_1;$$

$$e^{-4t} = \alpha_0 - 4\alpha_1,$$

откуда $\alpha_0 = 4e^{-3t} - 3e^{-4t}$; $\alpha_1 = e^{-3t} - e^{-4t}$.

Матричная функция

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 = (4e^{-3t} - 3e^{-4t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-3t} - e^{-4t}) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-3t} - e^{-4t} & -e^{-3t} + e^{-4t} \\ 2e^{-3t} - 2e^{-4t} & -e^{-3t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица, обратная матрице $\mathbf{A}_1$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя выражения для $e^{A_1 t}$ и $\mathbf{A}_1^{-1}$ в формулу для выходных величин, получим

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} e^{-3t} + e^{-4t} + \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} e^{-3t} + \frac{5}{2} e^{-4t} - \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

В рассмотренном примере выражение для i_1 совпадает с переходной взаимной проводимостью, а выражение для u_2 — с переходным коэффициентом передачи напряжения.

Численные методы решения уравнений состояния. Матричная экспоненциальная функция может быть представлена в виде ряда

$$e^{A_1 t} = \mathbf{1} + \mathbf{A}_1 t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_1^2 t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_1^k t^k}{k!}.$$

Если ограничиться конечным числом слагаемых, то вычисление матричной функции $e^{A_1 t}$ можно свести к умножению и суммированию матриц, что нетрудно выполнить с помощью ЦВМ.

Уравнения состояния проще всего решаются методом численного интегрирования — методом Эйлера. При численном интегрировании интервал интегрирования разделяется на ряд отрезков — шагов. Не снижая общности, шаг h можно считать постоянным. Зная начальное значение переменных состояния $\mathbf{x}(0)$, сначала необходимо вычислить $\mathbf{x}(h)$, затем $\mathbf{x}(2h)$ и т. д.

Матрицу переменных состояния для $(n+1)$ -го шага $\mathbf{x}[(n+1)h]$ можно разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь слагаемым, содержащим первую производную:

$$\mathbf{x}[(n+1)h] = \mathbf{x}(nh) + h\dot{\mathbf{x}}(nh). \quad (15.58)$$

Подставляя в равенство (15.47) выражение

$$\dot{\mathbf{x}}(nh) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(nh) + \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(nh),$$

записанное согласно уравнению (15.28), получим

$$\mathbf{x}[(n+1)h] = (\mathbf{1} + h\mathbf{A}_1) \mathbf{x}(nh) + h\mathbf{B}_1 \mathbf{v}(nh). \quad (15.59)$$

Формула (15.59) представляет собой расчетную формулу для вычисления переменных состояния по методу Эйлера. В соответствии с этой формулой

$$x(h) = (1 + hA_1)x(0) + hB_1v(0);$$

$$x(2h) = (1 + hA_1)x(h) + hB_1v(h)$$

и т. д.

Процесс вычисления значений $x[(n+1)h]$ легко автоматизируется.

Так как разложение (15.58) в ряд Тейлора содержит только одну производную, точность расчета по методу Эйлера может быть недостаточно высокой. Известны более точные методы численного интегрирования: метод трапеций, методы Рунге—Кутты и др. (см. приложение I).

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА И ФУРЬЕ К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 16.1. Преобразования Лапласа

Прямое и обратное преобразования Лапласа. Линейные дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами могут быть решены с помощью интегральных преобразований Лапласа или Карсона. Различным функциям вещественной переменной (времени t) эти преобразования ставят в соответствие функции комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$ и наоборот*. Наибольшее применение находят интегральные преобразования Лапласа.

Прямое преобразование Лапласа функции времени $f(t)$ определяется соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (16.1)$$

Функцию $f(t)$ называют оригиналом, а функцию $F(p)$ — изображением по Лапласу функции $f(t)$ **.

Изображение по Лапласу существует, если интеграл в правой части равенства (16.1) сходится. Можно доказать, что для функций времени $f(t)$, удовлетворяющих условиям Дирихле на любом конечном интервале времени, равных нулю при $t < 0$ и ограниченных неравенством

$$|f(t)| < Me^{\sigma_0 t},$$

где $\sigma_0 > 0$; $M > 0$, интеграл (16.1) абсолютно сходится в области $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$. Изображение $F(p)$ является аналитической функцией комплексной переменной p в области сходимости интеграла.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывают в виде

$$F(p) \doteq f(t)$$

или

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Решение интегрального уравнения (16.1) относительно оригинала

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (16.2)$$

* Комплексную переменную $p = \sigma + j\omega$ следует отличать от переменной $p = d/dt$, обозначающей оператор дифференцирования.

** В отличие от изображения по Лапласу изображение по Карсону определяется равенством $F_k(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$.

называют обратным преобразованием Лапласа и обозначают

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t).$$

Интеграл в правой части равенства (16.2) следует понимать как предел

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(p) e^{pt} dp.$$

Интегрирование осуществляется по бесконечной прямой, параллельной оси $j\omega$ и расположенной в области сходимости интеграла (16.1), т. е. при $\sigma > \sigma_0$.

Основные свойства прямого преобразования Лапласа*.

1. *Свойство линейности.* Если

$$F_k(p) = \mathcal{L}[f_k(t)],$$

то

$$\sum_k a_k F_k(p) = \mathcal{L}\left\{\sum_k a_k f_k(t)\right\}, \quad (16.3)$$

где a_k — некоторые постоянные ($k = 1, 2, \dots$). Согласно равенству (16.3), изображение линейной комбинации функций $f_k(t)$ представляет собой линейную комбинацию изображений $F_k(p)$.

2. *Теорема запаздывания.* Изображение функции $f(t - t_0)$ имеет вид

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-pt_0} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-pt_0} F(p). \quad (16.4)$$

3. *Теорема сдвига.* Изображение функции $e^{-\alpha t} f(t)$ имеет вид

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(p + \alpha), \quad (16.5)$$

где α — положительная или отрицательная постоянная.

4. *Умножение изображений.* Изображение свертки функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равно произведению изображений:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(p) F_2(p). \quad (16.6)$$

5. *Предельные соотношения.* Если существует предел $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = f(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p)]. \quad (16.7)$$

Если существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)]. \quad (16.8)$$

* Основные свойства преобразования Лапласа, вытекающие из соотношения (16.1), приводятся без доказательства. Доказательство этих свойств рассматривается в курсе математики.

6. *Изображение производной.* Изображение производной

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

связано с изображением $F(p)$ функции $f(t)$ соотношением

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0), \quad (16.9)$$

где $f(0) = f(0_+)$. Изображение n -й производной имеет вид

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (16.10)$$

В частном случае при нулевых начальных условиях

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p); \quad (16.11)$$

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = p^n F(p). \quad (16.12)$$

7. *Изображение интеграла.* Изображение интеграла

$$\int_0^t f(t) dt$$

находят через изображение $F(p)$ функции $f(t)$ следующим образом:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = F(p)/p. \quad (16.13)$$

Изображение некоторых функций времени. Для заданной функции $f(t)$ изображение может быть найдено по соотношению (16.1). Так, если $f(t)$ представляет собой единичную функцию $f(t) = 1(t)$, то

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p},$$

т. е.

$$\mathcal{L}[1(t)] = 1/p.$$

Изображение дельта-функции

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \delta(t) dt = \int_0^\infty \delta(t) dt = 1,$$

так как произведение

$$e^{-pt} \delta(t) = \begin{cases} \delta(t) & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Полученный результат справедлив, если нижний предел интегрального преобразования равен $t=0=0_-$. В этом случае в (16.9) $f(0) = f(0_-)$ и на основании этой формулы

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}[1'(t)] = p \frac{1}{p} - 1(0_-) = 1 - 0 = 1,$$

так как, по определению единичной функции, $1(0) = 0$ при $t < 0$. Таким образом, непосредственное вычисление изображения или

применение соотношения (16.9) приводят к одинаковому результату:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

Изображение показательной функции $e^{\alpha t} (t \geq 0)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha},$$

т. е.

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = 1/(p-\alpha).$$

Аналогично могут быть получены изображения других функций. Некоторые оригиналы и их изображения по Лапласу приведены в табл. 16.1.

Т а б л и ц а 16.1

Некоторые оригиналы и их изображения по Лапласу

Оригинал $f(t)$ при $t \geq 0$	Изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
a	$\frac{a}{p}$
$a\delta(t)$	a
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega_0 \cos \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega_0 \sin \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$\frac{e^{-\alpha t} t^{n-1}}{(n-1)!}, (n=1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^n}$

Следует найти выражение для изображения периодической функции $f(t)$ на рис. 16.1. Функцию $f(t)$ можно представить как сумму:

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \dots,$$

где $f_1(t) = f(t)$ при $0 \leq t \leq T$; $f_1(t-T) = f(t)$ при $T \leq t \leq 2T$ и т. д.

Если $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(p)$ — изображение функции $f_1(t)$, то на основании свойства линейности и теоремы запаздывания изображение функции $f(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_1(t-T)] + \\ &+ \mathcal{L}[f_1(t-2T)] + \dots = F_1(p) + e^{-Tp}F_1(p) + \\ &+ e^{-2Tp}F_1(p) + \dots = F_1(p)[1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \dots].\end{aligned}$$

Учитывая, что сумма бесконечного ряда

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1,$$

легко получить выражение для изображения

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-Tp}}. \quad (16.14)$$

Полученным соотношением пользуются при определении в замкнутой форме установившихся напряжений и токов в цепи с периодическими негармоническими возмущающими воздействиями.

Теорема разложения. Изображения $F(p)$ различных функций времени $f(t)$ в общем случае можно представить в виде дроби:

$$F(p) = A(p)/B(p). \quad (16.15)$$

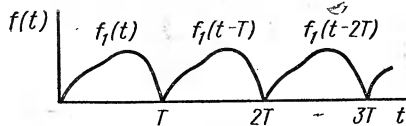


Рис. 16.1

Значения аргумента p , удовлетворяющие условию $F(p) = 0$, называются нулями функции $F(p)$, а значения аргумента p , при которых $1/F(p) = 0$ или $F(p) = \infty$, — полюсами этой функции. Конечные значения нулей и полюсов могут быть найдены соответственно как корни уравнений $A(p) = 0$ и $B(p) = 0$. Если, например,

$$B(p) = (p - p_1)^{m_1} (p - p_2)^{m_2} \dots (p - p_n)^{m_n},$$

то $p = p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — полюс кратности m_k . В частном случае при $m_k = 1$ полюс p_k называют простым. Аналогично можно говорить о кратных и простых нулях.

Полюсы относятся к особым точкам функций $F(p)$. В пассивных электрических цепях функции $F(p)$, представляющие собой изображения напряжений и токов, имеют особые точки — полюсы, которые расположены в левой полуплоскости комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$ или на мнимой оси*. Как правило, изображения напряжений и токов равномерно стремятся к нулю: $F(p) \rightarrow 0$, если $p \rightarrow \infty$ в левой полуплоскости. При выполнении такого условия интеграл в правой части соотношения (16.2), как известно,

* Расположение полюсов и нулей подробнее будет рассмотрено в гл. 18.

равен сумме вычетов подынтегральной функции $F(p) e^{pt}$ во всех полюсах p_k функции $F(p)$. Таким образом, оригинал

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p) e^{pt}] \text{ при } t > 0. \quad (16.16)$$

Если функция $F(p)$ имеет полюс порядка m_k в точке $p = p_k$, то функция $\Phi(p) = (p - p_k)^{m_k} F(p) e^{pt}$ будет аналитической в точке p_k и ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \Phi(p) = \Phi(p_k) + \frac{d\Phi}{dp} \Big|_{p=p_k} (p - p_k) + \dots + \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \frac{d^{m_k - 1} \Phi}{dp^{m_k - 1}} \Big|_{p=p_k} \times \\ \times (p - p_k)^{m_k - 1} + \frac{1}{m_k!} \cdot \frac{d^{m_k} \Phi}{dp^{m_k}} (p - p_k)^{m_k} + \dots \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} F(p) e^{pt} = \frac{\Phi(p)}{(p - p_k)^{m_k}} = \Phi(p_k) (p - p_k)^{-m_k} + \frac{d\Phi}{dp} \Big|_{p=p_k} (p - p_k)^{-m_k + 1} + \\ + \dots + \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \frac{d^{m_k - 1} \Phi}{dp^{m_k - 1}} \Big|_{p=p_k} (p - p_k)^{-1} + \frac{1}{m_k!} \cdot \frac{d^{m_k} \Phi}{dp^{m_k}} + \dots \end{aligned}$$

Записанный ряд представляет собой ряд Лорана для функции $F(p) e^{pt}$, а коэффициент при члене $(p - p_k)^{-1}$ является вычетом этой функции в полюсе p_k :

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt} = \frac{1}{(m_k - 1)!} \left\{ \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} [(p - p_k)^{m_k} F(p) e^{pt}] \right\}_{p=p_k}.$$

При $m_k = 1$ вычет

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt} = (p - p_k) F(p_k) e^{p_k t}.$$

С учетом полученных выражений для вычетов и на основании равенства (16.16) можно записать следующие формулы для оригинала:

$$f(t) = \sum_k \frac{1}{(m_k - 1)!} \left\{ \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} [(p - p_k)^{m_k} F(p) e^{pt}] \right\}_{p=p_k} \quad (16.17)$$

или

$$f(t) = \sum_k (p - p_k) F(p_k) e^{p_k t}. \quad (16.18)$$

Формула (16.17) справедлива, если полюсы функции $F(p)$ имеют любую кратность $m_k \geq 1$. Формула (16.18) справедлива, если все полюсы $F(p)$ простые; так как в этом случае

$$(p - p_k) F(p) = (p - p_k) \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)}{B'(p)},$$

соотношению (16.18) можно придать другой вид:

$$f(t) = \sum_k \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (16.18a)$$

Если полюсы p_i и p_{i+1} — комплексно-сопряженные: $p_{i+1} = p_i^*$, то соответствующие два слагаемых в правой части равенства (16.18а) можно заменить одним:

$$\frac{A(p_i)}{B'(p_i)} e^{p_i t} + \frac{A(p_i^*)}{B'(p_i^*)} e^{p_i^* t} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{A(p_i)}{B'(p_i)} e^{p_i t} \right].$$

Формулы (16.17), (16.18) или (16.18а) выражают теорему разложения для вычисления оригинала при кратных и простых полюсах изображения.

Часто изображения токов и напряжений представляют собой дробно-рациональные функции, т. е. отношение двух полиномов переменной p , причем степень полинома числителя $A(p)$ ниже степени полинома знаменателя $B(p)$. В таком случае оригинал можно найти с помощью разложения изображения на элементарные дроби. Если, например,

$$F(p) = \frac{A(p)}{(p-p_1)^{m_1} (p-p_{m_1+1}) \dots (p-p_n)},$$

т. е. изображение имеет полюс p_1 кратности m_1 и простые полюсы $p_{m_1+1}, \dots, p_n$, то разложение на элементарные дроби имеет вид

$$F(p) = \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{(p-p_1)^2} + \dots + \frac{K_{m_1}}{(p-p_1)^{m_1}} + \frac{K_{m_1+1}}{p-p_{m_1+1}} + \dots + \frac{K_n}{p-p_n}, \quad (16.19)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{(m_1-1)!} \left\{ \frac{d^{m_1-1}}{dp^{m_1-1}} [(p-p_1)^{m_1} F(p)] \right\}_{p=p_1};$$

$$K_2 = \frac{1}{(m_1-2)!} \left\{ \frac{d^{m_1-2}}{dp^{m_1-2}} [(p-p_1)^{m_1} F(p)] \right\}_{p=p_1};$$

.....

$$K_{m_1} = [(p-p_1)^{m_1} F(p)]_{p=p_1};$$

$$K_v = [(p-p_v) F(p)]_{p=p_v} \quad (v = m_1+1, \dots, n).$$

Оригинал каждой дроби разложения (16.19) может быть найден с помощью табл. 16.1. В результате

$$f(t) = \left(K_1 + K_2 t + \dots + \frac{K_{m_1} t^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \right) e^{p_1 t} + \sum_{v=m_1+1}^n K_v e^{p_v t}. \quad (16.20)$$

Для дробно-рациональных функций вычисление оригинала с помощью разложения на элементарные дроби эквивалентно применению теоремы разложения.

§ 16.2. Уравнения электрических цепей в операторной форме

Операторные уравнения и эквивалентные схемы для элементов электрической цепи. Операторные уравнения для элементов электрической цепи получают из соответствующих уравнений, связывающих мгновенные значения напряжений и токов. Так, резистор с сопротивлением r характеризуется уравнением $u = ri$. Переходя к изображению $U(p) = \mathcal{L}[u(t)]$ и учитывая свойство линейности для изображений, получаем операторное уравнение

$$U(p) = rI(p), \quad (16.21)$$

где

$$I(p) = \mathcal{L}[i(t)],$$

или

$$I(p) = \frac{1}{r} U(p) = gU(p). \quad (16.21a)$$

Таким образом, резистор характеризуется операторным сопротивлением r или проводимостью $g = r^{-1}$.

Напряжение и ток индуктивности связаны соотношением $u = L di_L/dt$. При переходе к изображениям с учетом равенства (16.9) имеем

$$U(p) = pLI_L(p) - Li_L(0) \quad (16.22)$$

или

$$I_L(p) = \frac{1}{pL} U(p) + \frac{i_L(0)}{p}. \quad (16.22a)$$

Выражениям (16.22) и (16.22a) соответствуют операторные эквивалентные схемы индуктивности на рис. 16.2, а, б. Индуктивность характеризуется операторным сопротивлением pL (проводимостью $1/pL$), а начальное значение тока $i_L(0)$ учитывается в виде последовательного источника э. д. с. $Li_L(0)$ (рис. 16.2, а) или параллельного источника тока $i_L(0)/p$ (рис. 16.2, б). Следует отметить, что выражение (16.22a) можно получить также из равенства

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u dt$$

с помощью соотношения (16.13).

Напряжение на емкости и ток в ней связаны уравнением $i = C du_C/dt$, дуальным уравнению индуктивности. Для изображения получают соотношения, дуальные (16.22) и (16.22a):

$$I(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0); \quad (16.23)$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (16.23a)$$

Две операторные схемы для емкости показаны на рис. 16.3, а, б; эти схемы дуальны схемам на рис. 16.2, а, б. Емкость характе-

ризуется операторным сопротивлением $1/pC$ (проводимостью pC), а начальное значение напряжения $u_C(0)$ учитывается в виде параллельного источника тока $Cu_C(0)$ или последовательного источника э. д. с. $u_C(0)/p$ *.

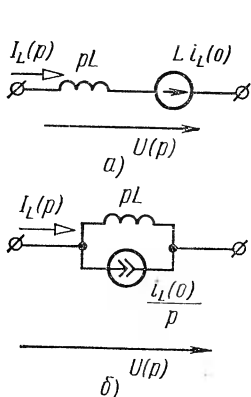


Рис. 16.2

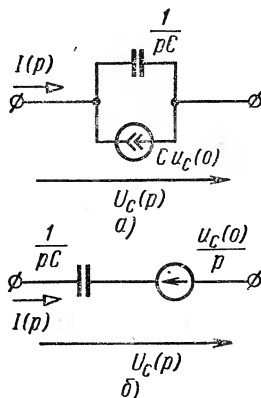


Рис. 16.3

Источникам э. д. с. $e(t)$ и тока $J(t)$ соответствуют источники с операторным напряжением $\mathcal{E}(p) = \mathcal{L}[e(t)]$ и током $J(p) = \mathcal{L}[J(t)]$. Аналогичное утверждение справедливо для зависимых источников, которые входят в эквивалентные схемы электронных ламп и транзисторов.

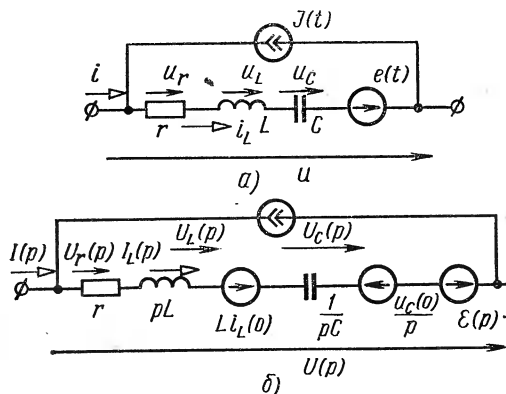


Рис. 16.4

Заменяя каждый элемент электрической цепи его эквивалентной операторной схемой, нетрудно составить операторную схему цепи. На рис. 16.4, а показана отдельная ветвь исходной схемы цепи, а на рис. 16.4, б — операторная схема этой ветви.

Индуктивность и емкость ветви на рис. 16.4 а, заменены последовательными эквивалентными схемами (см. рис. 16.2, а и 16.3, б). На основании свойства линейности для изображений алгебраической сумме напряжений

$$u = u_r + u_L + u_C - e(t)$$

* В схемах на рис. 16.2, а, б и 16.3, а, б указаны операторные сопротивления элементов.

соответствует сумма изображений

$$U(p) = U_r(p) + U_L(p) + U_C(p) - \mathcal{E}(p),$$

а сумме токов

$$i_L = i + J(t)$$

— сумма изображений

$$I_L(p) = I(p) + J(p).$$

Поэтому для изображения напряжения на зажимах ветви операторной схемы с учетом равенств (16.21), (16.22), (16.23а) получаем выражение

$$U(p) = \left(r + pL + \frac{1}{pC} \right) [I(p) + J(p)] - \mathcal{E}(p) - Li_L(0) + \frac{u_C(0)}{p}$$

или

$$U(p) = Z(p) [I(p) + J(p)] - \mathcal{E}(p) - Li_L(0) + \frac{u_C(0)}{p}, \quad (16.24)$$

где $Z(p) = r + pL + (1/pC)$ — операторное сопротивление ветви. При $i_L(0) = 0$ и $u_C(0) = 0$ выражение (16.24) упрощается:

$$U(p) = Z(p) [I(p) + J(p)] - \mathcal{E}(p). \quad (16.24a)$$

На основании равенства (16.24а) ток

$$I(p) = Y(p) [U(p) + \mathcal{E}(p)] - J(p), \quad (16.24б)$$

где $Y(p) = 1/Z(p)$ — операторная проводимость ветви.

Соотношения (16.24), (16.24а) и (16.24б) представляют собой закон Ома для участка цепи с э. д. с. и источником тока в операторной форме. Эти соотношения можно записать непосредственно по операторной схеме на рис. 16.4, б. При нулевых начальных условиях выражения (16.24а) и (16.24б) аналогичны соответствующим выражениям, связывающим комплексные напряжение и ток ветви в установившемся режиме для цепи с источниками гармонических э. д. с. и токов. Формально выражения (16.24а) и (16.24б) могут быть получены из соотношения между комплексными напряжением и током при замене $j\omega$ на p (и наоборот). При ненулевых начальных условиях напряжения дополнительных источников $Li_L(0)$ и $u_C(0)/p$ алгебраически суммируются с напряжением источника $\mathcal{E}(p)$.

Если в схеме имеются индуктивно связанные элементы (рис. 16.5, а), то из уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_j &= L_j \frac{di_j}{dt} + M \frac{di_k}{dt}; \\ u_k &= M \frac{di_j}{dt} + L_k \frac{di_k}{dt} \end{aligned} \right\}$$

при переходе к изображениям получаем:

$$\left. \begin{aligned} U_j(p) &= pL_j I_j(p) + pM I_k(p) - L_j i_j(0) - M i_k(0); \\ U_k(p) &= pM I_j(p) + pL_k I_k(p) - M i_j(0) - L_k i_k(0). \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

Уравнениям (16.25) для изображений соответствует эквивалентная операторная схема на рис. 16.5, б. Следовательно, взаимная индуктивность характеризуется операторным сопротивлением pM ; дополнительные источники учитывают в общем случае ненулевые начальные условия.

Матричные уравнения цепи в операторной форме. Уравнения (16.24 а) и (16.24 б), записанные для всех ветвей операторной схемы, можно объединить в матричные уравнения:

$$\mathbf{U}^{(B)}(p) = \mathbf{Z}^{(B)}(p) [\mathbf{I}^{(B)}(p) + \mathbf{J}^{(B)}(p)] - \mathcal{E}^{(B)}(p) \quad (16.26)$$

или

$$\mathbf{I}^{(B)}(p) = \mathbf{Y}^{(B)}(p) [\mathbf{U}^{(B)}(p) + \mathcal{E}^{(B)}(p)] - \mathbf{J}^{(B)}(p), \quad (16.26a)$$

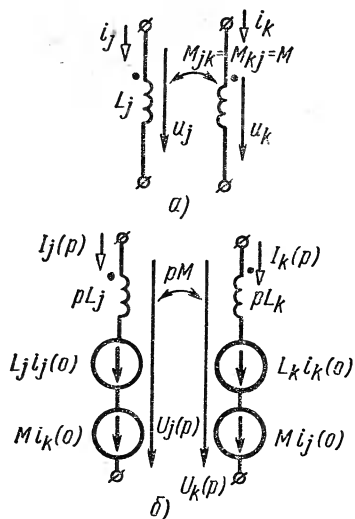


Рис. 16.5

где $\mathbf{U}^{(B)}(p)$, $\mathbf{I}^{(B)}(p)$ и $\mathcal{E}^{(B)}(p)$, $\mathbf{J}^{(B)}(p)$ — соответственно столбцовые матрицы изображений напряжений, токов ветвей и напряжений источников э. д. с., токов источников тока ветвей; $\mathbf{Z}^{(B)}(p)$ и $\mathbf{Y}^{(B)}(p)$ — квадратные матрицы сопротивлений и проводимостей ветвей в операторной форме, причем $\mathbf{Y}^{(B)}(p) = [\mathbf{Z}^{(B)}(p)]^{-1}$. Для цепей, не содержащих взаимной индукции и электронных элементов, матрицы $\mathbf{Z}^{(B)}(p)$ и $\mathbf{Y}^{(B)}(p)$ диагональны. При наличии взаимной индукции эти

матрицы имеют внедиагональные элементы вида $pM_{jk} = pM_{kj}$. В схемах с электронными лампами и транзисторами появляются несимметричные внедиагональные элементы матриц $\mathbf{Z}^{(B)}$ и $\mathbf{Y}^{(B)}$ (см. § 9.5). Дополнительные источники, обусловленные ненулевыми начальными условиями, можно учесть, например, в матрице $\mathcal{E}^{(B)}$; при этом вид уравнений (16.26) и (16.26a) не изменяется.

Так как уравнениям по законам Кирхгофа $\sum_k i_k = 0$ и $\sum_k u_k = 0$ соответствуют на основании свойства линейности уравнения для изображений $\sum_k I_k(p) = 0$ и $\sum_k U_k(p) = 0$, для операторной схемы справедливы матричные уравнения:

$$\mathbf{A} \mathbf{I}^{(B)}(p) = 0; \quad (16.27)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{U}^{(B)}(p) = 0. \quad (16.28)$$

Аналогично для этой схемы справедливы соотношения:

$$\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{A}^T \Phi(p); \quad (16.29)$$

$$\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}^{(L)}(p); \quad (16.30)$$

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{B}^T \mathbf{I}^{(K)}(p), \quad (16.31)$$

где $\Phi(p)$, $U^{(n)}(p)$ и $I^{(k)}(p)$ — соответственно столбцовые матрицы изображений узловых потенциалов, напряжений ветвей дерева и контурных токов.

Из соотношений (16.26) ÷ (16.31) следует, что узловые уравнения, уравнения с напряжениями ветвей дерева и контурными токами в операторной форме аналогичны соответствующим уравнениям для установившегося режима при гармонических токах и напряжениях. Все методы расчета цепей с источниками гармонических (постоянных) э. д. с. и токов пригодны и для расчета операторных схем.

Переходя к изображениям, можно получить операторную форму уравнений состояния (15.28) и (15.29)*:

$$p\mathcal{X}(p) - x(0) = A_1\mathcal{X}(p) + B_1V(p);$$

$$\mathcal{Y}(p) = A_2\mathcal{X}(p) + B_2V(p),$$

где $x(0)$ — матрица начальных значений переменных состояния.

Из этих уравнений получаем

$$(pI - A_1)\mathcal{X}(p) = x(0) + B_1V(p)$$

или

$$\mathcal{X}(p) = (pI - A_1)^{-1}x(0) + (pI - A_1)^{-1}B_1V(p), \quad (16.32)$$

$$\mathcal{Y}(p) = A_2(pI - A_1)^{-1}x(0) + [A_2(pI - A_1)^{-1}B_1 + B_2]V(p). \quad (16.33)$$

В частном случае нулевых начальных условий

$$\mathcal{Y}(p) = [A_2(pI - A_1)^{-1}B_1 + B_2]V(p). \quad (16.34)$$

Все уравнения цепи в операторной форме являются алгебраическими в отличие от дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений для мгновенных значений. Таким образом, применение преобразования Лапласа позволяет алгебраизировать уравнения электрических цепей.

§ 16.3. Расчет переходных напряжений и токов операторным методом

Расчет переходных напряжений и токов. Для расчета переходных напряжений и токов составляется эквивалентная операторная схема (после коммутации). Из уравнений этой схемы можно найти изображения искомых величин, а затем с помощью таблиц или теоремы разложения — оригиналы. В схемах с непрерывно изменяющимися напряжениями на емкостях и токами в индуктивностях величины напряжений (токов) дополнительных источников, обусловленных ненулевыми начальными условиями, определяются значениями

$$i_L(0) = i_L(0_+) = i_L(0_-), \quad u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

* Прямое (обратное) изображение матрицы, элементами которой служат функции переменной t (переменной p), определяется как матрица изображений каждого элемента.

Пример 16.1. Вычислить ток $i_1(t)$ в цепи на рис. 16.6. Параметры схемы: $r = 100$ Ом; $L = 0,319$ Г; $C = 15,95$ мкФ; $u = 2000 \sin(314t + 90^\circ) = 2000 \cos 314t$ В.

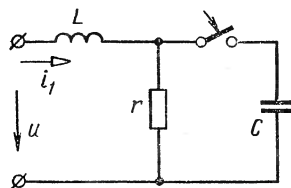


Рис. 16.6

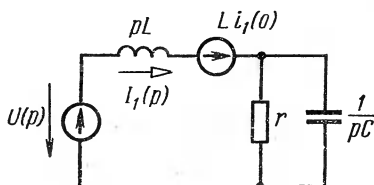


Рис. 16.7

Решение. До коммутации

$$i_{1m} = \frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L} = \frac{2000e^{j90^\circ}}{100 + j314 \cdot 0,319} = 10 \sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ A};$$

$$i_1(t) = 10 \sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ) \text{ A}.$$

Начальные значения:

$$i_L(0) = i_1(0) = 10 \text{ A}; \quad u_C(0) = 0 \text{ В}.$$

Операторная эквивалентная схема показана на рис. 16.7. В этой схеме изображение источника

$$U(p) = \mathcal{L}[U_m \cos \omega t] = \frac{U_m p}{p^2 + \omega^2} = \frac{2000p}{p^2 + 314^2}.$$

Изображение искомого тока

$$I_1(p) = \frac{U(p) + Li_1(0)}{Z_{\text{вх}}(p)},$$

где $Z_{\text{вх}}(p) = pL + \frac{r \frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}}$. После преобразования получим

$$I_1(p) = \frac{[U_m p + Li_1(0)(p^2 + \omega^2)](prC + 1)}{(p^2 + \omega^2)(p^2 rLC + pL + r)} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Определим полюсы изображения, т. е. корни уравнения $B(p) = 0$:

$$p_{1,2} = \pm j314; \quad p_{3,4} = -314 \pm j314.$$

Производная знаменателя

$$B'(p) = 2p(p^2 rLC + pL + r) + (2prLC + L)(p^2 + \omega^2).$$

По теореме разложения, искомый ток

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = 2 \operatorname{Re} \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} e^{p_3 t} = 20 \sin(314t + 53^\circ 10') + 2 \sqrt{10} e^{-314t} \sin(314t - 71^\circ 30') \text{ A}.$$

В рассмотренном примере полюсы p_1 и p_2 обусловлены изображением напряжения источника $U(p)$ и определяют принужденную составляющую, а полюсы p_3 и p_4 , равные корням характеристического уравнения схемы, определяют свободную составляющую тока.

При расчете операторным методом схем, в которых могут быть импульсные токи и напряжения (схемы с источниками напряжения или тока в виде импульсных функций, схемы с емкостными контурами или индуктивными сечениями), напряжения (токи) дополнительных источников должны определяться значениями $i_L(0) = i_L(0_-)$, $u_C(0) = u_C(0_-)$. Это означает, что в прямом преобразовании Лапласа (16.1) нижний предел интегрирования $t = 0 = 0_-$. Так как изображение импульсной функции $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, признаком наличия импульсных составляющих тока (напряжения) служит равенство степеней полиномов в числителе и знаменателе соответствующих изображений. Если степени полиномов в числителе и знаменателе изображения одинаковы, то можно выделить постоянную составляющую. При этом остаток будет правильной рациональной дробью. Постоянной составляющей изображения соответствует оригинал — импульсная функция.

Пример 16.2. Рассчитать токи i_1 и i_2 и напряжения u_1 и u_2 в цепи на рис. 16.8. Параметры схемы: $C_1 = 1$ Ф; $C_2 = 2$ Ф; $r_3 = 1/2$ Ом; $r_4 = r_5 = 1$ Ом; $e(t) = 1(t)$.

Решение. При замыкании ключа в схеме образуется емкостной контур $e(t) - C_1 - C_2$, следовательно, токи в ветвях этого контура содержат импульсные составляющие, а напряжения на емкостях изменяются скачкообразно.

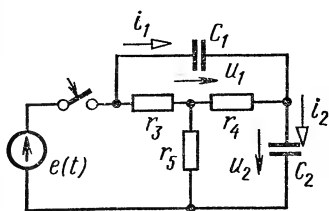


Рис. 16.8

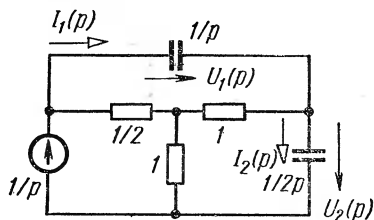


Рис. 16.9

Так как $u_1(0_-) = u_2(0_-) = 0$, операторная эквивалентная схема имеет вид, показанный на рис. 16.9.

Найдем изображения токов i_1 и i_2 :

$$I_1(p) = \frac{8p^2 + p}{3p(4p + 1)} = \frac{8p + 1}{3(4p + 1)};$$

$$I_2(p) = \frac{8p^2 + 4p}{3p(4p + 1)} = \frac{4(2p + 1)}{3(4p + 1)}.$$

Полученные изображения содержат одинаковую постоянную составляющую

$$I_1(\infty) = I_2(\infty) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Разности $I_1(p) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{4p + 1}$; $I_2(p) - \frac{2}{3} = \frac{2}{4p + 1}$ представляют правильные дроби. Записав изображения в виде сумм:

$$I_1(p) = \frac{2}{3} - \frac{\frac{1}{4}}{p + \frac{1}{4}}; \quad I_2(p) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{p + \frac{1}{4}},$$

Вычислим оригиналы токов:

$$i_1(t) = \frac{2}{3} \delta(t) - \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{4}}; \quad i_2(t) = \frac{2}{3} \delta(t) + \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{4}} A.$$

Токи i_1 и i_2 содержат одинаковые импульсные составляющие $2\delta(t)/3$. Нетрудно убедиться, что токи в сопротивлениях не имеют импульсных составляющих.

Изображения напряжений u_1 и u_2

$$U_1(p) = \frac{8p+1}{3p(4p+1)}; \quad U_2(p) = \frac{2(2p+1)}{3p(4p+1)}$$

являются правильными рациональными дробями. Разложим эти изображения на элементарные дроби:

$$U_1(p) = \frac{1}{3p} + \frac{\frac{1}{3}}{p + \frac{1}{4}}; \quad U_2(p) = \frac{2}{3p} - \frac{\frac{1}{3}}{p + \frac{1}{4}}.$$

В соответствии с табл. 16.1 оригиналы напряжений

$$u_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{4}t} \text{ В}; \quad u_2(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{4}t} \text{ В}.$$

В момент времени $t=0_+$

$$u_1(0_+) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ В}; \quad u_2(0_+) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ В},$$

т. е. напряжения изменяются скачкообразно от значений $u_1(0_-) = u_2(0_-) = 0$ до значений $u_1(0_+)$, $u_2(0_+)$. В установившемся режиме

$$u_1(\infty) = \frac{1}{3} \text{ В}, \quad u_2(\infty) = \frac{2}{3} \text{ В}.$$

Напряжения и токи при переходном процессе можно рассчитывать, применяя выражения (16.33) и (16.34); матрица выходных переменных $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Y}(p)]$. Если в уравнении (16.32) матрица параметров источников $V(p) = 0$, то

$$X(p) = (pI - A_1)^{-1} x(0) \quad (16.35)$$

и, следовательно, матрица переменных состояния

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(pI - A_1)^{-1} x(0)] = [\mathcal{L}^{-1}(pI - A_1)^{-1}] x(0). \quad (16.36)$$

Сравнивая соотношения (16.36) и (15.40), можно получить формулу для расчета матричной экспоненциальной функции с помощью преобразования Лапласа:

$$e^{A_1 t} = -\mathcal{L}^{-1}[(pI - A_1)^{-1}]. \quad (16.37)$$

Пример 16.3. Вычислить напряжение $u_2(t)$ для цепи на рис 15.21, а, воспользовавшись уравнениями состояния в операторной форме. Параметры цепи: $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$; $C = 1 \text{ Ф}$; $L = 1/2 \text{ Г}$; $e(t) = 1(t) \text{ В}$; $J(t) = 0$. Начальные условия нулевые.

Решение. При нулевых начальных условиях справедливо соотношение (16.34). Для указанных параметров схемы в уравнениях состояния определим

матрицы A_1 , A_2 , B_1 и B_2 (см. пример 15.8):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$pI - A_1 = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 0 & p+2 \end{bmatrix},$$

обратная матрица

$$(pI - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 0 & p+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p+2} \end{bmatrix}.$$

Подставляя выражения для матриц в формулу (16.34) с учетом равенства

$$V(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} \\ p \\ 0 \end{bmatrix},$$

найдем изображение выходной величины:

$$Y(p) = U_2(p) = \frac{3p+4}{4p(p+1)(p+2)}.$$

Найдем полюсы изображения: $p_1=0$; $p_2=-1$; $p_3=-2$. С помощью теоремы разложения получим

$$u_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \text{ В.}$$

§ 16.4. Расчет свободных и принужденных составляющих напряжений и токов

В общем случае с помощью операторного метода, как уже отмечалось, могут быть найдены переходные напряжения и токи в виде сумм свободных и принужденных составляющих. Если цепь содержит источники постоянных или гармонических э. д. с. (токов), то принужденные составляющие нетрудно рассчитать без применения преобразования Лапласа. В таком случае операторным методом можно воспользоваться лишь для расчета свободных составляющих напряжений и токов.

Свободные составляющие напряжений и токов представляют собой оригиналы изображений этих составляющих. Изображение любого свободного напряжения или тока получают при расчете операторной схемы для свободных составляющих. Такая схема аналогична операторной схеме для переходных напряжений и токов, за исключением того, что схема для свободных составляющих содержит только источники э. д. с. (тока), обусловленные ненулевыми начальными значениями: $i_{\text{Лсв}}(0) = i_{\text{Л}}(0) - i_{\text{Лпр}}(0)$ и $u_{\text{св}}(0) = u_{\text{с}}(0) - u_{\text{спр}}(0)$. Эти источники включают последовательно или параллельно каждой индуктивности и емкости (см. рис. 16.2, а, б; 16.3, а, б и 16.4, б). Следует подчеркнуть, что операторные схемы

для свободных составляющих не содержат источников с изображениями напряжения $\mathcal{E}(p)$ и тока $J(p)$, соответствующих источникам $e(t)$ и $J(t)$ ветвей исходной схемы, поэтому изображения свободных напряжений и токов будут более простыми по сравнению с изображениями переходных напряжений и токов.

Применение операторного метода целесообразно для расчета принужденных составляющих напряжений и токов при воздействии периодических негармонических возмущений. В этом случае принужденные составляющие могут быть найдены в замкнутой форме, а не в виде суммы бесконечного (конечного) числа слагаемых ряда Фурье.

Пусть $e(t)$ — периодическая негармоническая э. д. с. источника, включенного в k -ю ветвь схемы, причем в первом периоде закон изменения э. д. с. описывается функцией $e_1(t)$, т. е.

$$e(t) = e_1(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T.$$

При условии, что в схеме имеется единственный источник $e(t)$, изображение тока j -й ветви

$$I(p) = \frac{\Delta_{kj}^{(k)}(p)}{\Delta^{(k)}(p)} \mathcal{E}(p), \quad (16.38)$$

где $\mathcal{E}(p) = \mathcal{L}[e(t)]$; $\Delta^{(k)}(p)$ — определитель контурных уравнений в операторной форме; $\Delta_{kj}^{(k)}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента k, j этого определителя; начальные условия предполагаются нулевыми.

Учитывая (16.14), изображение тока (16.38) можно переписать в виде

$$I(p) = \frac{\Delta_{kj}^{(k)}(p)}{\Delta^{(k)}(p)} \frac{\mathcal{E}_1(p)}{1 - e^{-Tp}} = Y_{jk}(p) \frac{\mathcal{E}_1(p)}{1 - e^{-Tp}}, \quad (16.39)$$

где $\mathcal{E}_1(p) = \mathcal{L}[e_1(t)]$; $Y_{jk}(p) = \Delta_{kj}^{(k)}(p) / \Delta^{(k)}(p)$ — взаимная проводимость в операторной форме*. Оригинал изображения (16.39) $i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(p)]$ содержит периодическую принужденную и свободную составляющие. Если $i_{1np}(t)$ — принужденная составляющая в первом периоде:

$$i_{1np}(t) = i_{np}(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T,$$

то изображение тока $i(t)$

$$I(p) = \frac{I_{1np}(p)}{1 - e^{-Tp}} + I_{св}(p), \quad (16.40)$$

где $I_{св}(p)$ — изображение свободной составляющей. Приравнивая правые части равенств (16.39) и (16.40), получаем

$$I_{1np}(p) = Y_{jk}(p) \mathcal{E}_1(p) - I_{св}(p) (1 - e^{-Tp}), \quad (16.41)$$

* Схемные функции (входные и взаимные проводимости и сопротивления, коэффициенты передачи напряжения и тока) в операторной форме определяют как отношение изображений соответствующих величин.

откуда

$$i_{1np}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{jk}(p) \mathcal{E}_1(p)] - \mathcal{L}^{-1}[I_{св}(p)(1 - e^{-Tp})]$$

или

$$i_{1np}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{jk}(p) \mathcal{E}_1(p)] - i_{св}(t) + i_{св}(t - T) \cdot 1(t - T).$$

Так как $i_{1np}(t)$ — принужденная составляющая в первом периоде, слагаемое $i_{св}(t - T) \cdot 1(t - T) = 0$ должно быть отброшено:

$$i_{1np}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{jk}(p) \mathcal{E}_1(p)] - i_{св}(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T. \quad (16.42)$$

Оригинал $\mathcal{L}^{-1}[Y_{jk}(p) \mathcal{E}_1(p)]$ представляет собой переходный ток, вызванный э. д. с. $e_1(t)$, т. е. по формуле (16.42) принужденный ток вычисляют как разность переходного и свободного токов.

Изображение тока (16.38) имеет полюсы p_k , определяемые уравнением $\Delta^{(k)}(p) = 0^*$, а также полюсы, обусловленные изображением э. д. с. $\mathcal{E}(p)$. Если оригинал $i(t)$ изображения $I(p)$ можно найти как сумму вычетов функции $I(p)e^{pt}$ во всех полюсах, то сумма вычетов функции $I(p)e^{pt}$ в полюсах p_k равна свободной составляющей $i_{св}(t)$. Действительно, уравнение $\Delta^{(k)}(p) = 0$ является характеристическим уравнением схемы. Если схема содержит активные сопротивления, индуктивности и емкости, то корни характеристического уравнения (полюсы p_k) имеют отрицательные вещественные части и вычеты функции $I(p)e^{pt}$ в полюсах p_k обращаются в нуль при $t \rightarrow \infty$. Сумма вычетов функции $I(p)e^{pt}$ в полюсах, обусловленных изображением э. д. с. $\mathcal{E}(p)$, дает принужденную составляющую $i_{np}(t)$ для всех значений t .

К полюсам функции $\mathcal{E}(p)$ относятся, как видно из выражения (16.39), корни уравнения $1 - e^{-Tp} = 0$. Этому уравнению удовлетворяют корни $p_v = jv \frac{2\pi}{T}$ ($v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), число которых бесконечно велико. Вычисление вычетов функции $I(p)e^{pt}$ в полюсах p_v эквивалентно вычислению слагаемых ряда Фурье для принужденной составляющей. Если принужденная составляющая определяется не для всех значений t , а только для $0 \leq t \leq T$, то не нужно находить бесконечное число слагаемых ряда, так как можно применить формулу (16.42). Заменяя в этой формуле $i_{св}(t)$ суммой вычетов в полюсах p_k и учитывая выражение (16.39), получаем равенство

$$i_{1np}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{jk}(p) \mathcal{E}_1(p)] - \sum_{p=p_k} \text{Res} \left[Y_{jk} \frac{\mathcal{E}_1(p)}{1 - e^{-Tp}} e^{pt} \right]. \quad (16.43)$$

Так как число полюсов p_k [корней уравнения $\Delta^{(k)}(p) = 0$] конечно, выражение (16.43) дает замкнутую форму для i_{1np} .

Если вместо источника э. д. с. $e(t)$ в цепи действует источник периодического тока $J(t)$, то для составляющей $i_{1np}(t)$ справедливо выражение, аналогичное (16.43), в котором взаимная проводимость

* Полюсы p_k являются полюсами взаимной проводимости $Y_{jk}(p)$.

заменяется операторным коэффициентом передачи тока, а изображение э. д. с. — изображением тока источника. Нетрудно видоизменить формулу (16.43) и для расчета принужденных напряжений, обусловленных источником периодической э. д. с. (периодического тока).

Пример 16.4. Рассчитать напряжение $u_{\text{пр}}(t)$ в схеме рис. 16.10. Параметры схемы: $r = 2 \text{ Ом}$; $C = 1 \text{ Ф}$; напряжение источника $e(t)$ изменяется по пилообразному закону, как показано на рис. 16.11, а.

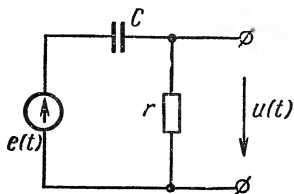


Рис. 16.10

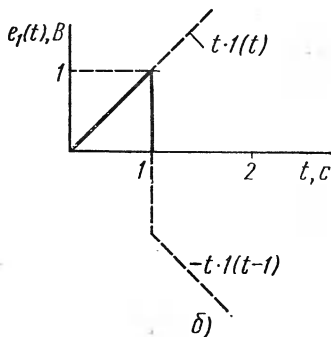
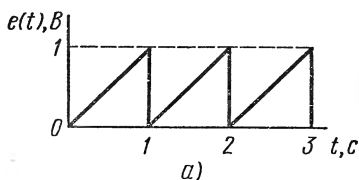


Рис. 16.11

Решение. Изображение переходного напряжения $u(t)$

$$U(p) = \frac{\mathcal{E}(p)}{r + \frac{1}{pC}} \quad r = \frac{pCr}{prC + 1} \quad \mathcal{E}(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{2}} \mathcal{E}''(p),$$

где отношение

$$\frac{p}{p + \frac{1}{2}} = K^{(u)}(p)$$

представляет собой коэффициент передачи напряжения в операторной форме.

Закон изменения напряжения источника в первом периоде (рис. 16.11, б) запишем с помощью единичных функций (период $T = 1$):

$$\begin{aligned} e_1(t) &= t[1(t) - 1(t-1)] = t[1(t) - 1(t-1)] = \\ &= t \cdot 1(t) - (t-1)1(t-1) - 1(t-1). \end{aligned}$$

Изображение функции $t \cdot 1(t)$

$$\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{p^2}.$$

По теореме смещения найдем изображения функций $(t-1)1(t-1)$ и $1(t-1)$:

$$\mathcal{L}[(t-1)1(t-1)] = \frac{1}{p^2} e^{-p};$$

$$\mathcal{L}[1(t-1)] = \frac{1}{p} e^{-p}.$$

Таким образом, изображение функции $e_1(t)$

$$\mathcal{E}_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{1}{p} e^{-p}.$$

Переходное напряжение в первом периоде

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1} [K^{(u)}(p) \mathcal{E}_1(p)].$$

Изображение $\mathcal{E}_1(p)$ напряжения $e_1(t)$ имеет три слагаемых, причем второе и третье слагаемые получают в результате вычитания функции $t \cdot 1(t-1)$ из функции $t \cdot 1(t)$ (рис. 16.11, б). В первом периоде функция $t \cdot 1(t-1) = 0$ и не влияет на переходное напряжение $u_1(t)$. Следовательно, при расчете $u_1(t)$ учитываем только первое слагаемое изображения $\mathcal{E}_1(p)$:

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{p}{p + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{p^2} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)p} \right].$$

Вычисляя $u_1(t)$ как сумму вычетов функции $e^{pt} / \left(p + \frac{1}{2}\right)p$ в полюсах $p_1 = -\frac{1}{2}$ и $p_2 = 0$, определим

$$u_1(t) = 2 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}t} \right) \text{ В при } 0 \leq t \leq 1.$$

Свободная составляющая напряжения

$$u_{\text{св}}(t) = \text{Res}_{p=p_1} \left[K^{(u)}(p) \frac{\mathcal{E}_1(p)}{1 - e^{-Tp}} e^{pt} \right],$$

так как коэффициент передачи напряжения $K^{(u)}(p)$ имеет только один полюс $p_1 = -1/2$. Если подставить выражения для $K^{(u)}(p)$ и $\mathcal{E}_1(p)$, то получим

$$\begin{aligned} u_{\text{св}}(t) &= \text{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{pt}}{p \left(p + \frac{1}{2}\right) (1 - e^{-p})} - \frac{e^{pt} e^{-p}}{p \left(p + \frac{1}{2}\right) (1 - e^{-p})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{pt} e^{-p}}{\left(p + \frac{1}{2}\right) (1 - e^{-p})} \right] = \text{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{pt}}{p \left(p + \frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{pt}}{\left(p + \frac{1}{2}\right) (e^p - 1)} \right] = \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{e^{-\frac{1}{2}} - 1} \text{ В.} \end{aligned}$$

Принужденную составляющую в первом периоде вычислим как разность:

$$u_1(t) - u_{\text{св}}(t) = u_{\text{пр}}(t) = 2 + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{e^{-\frac{1}{2}} - 1} \text{ В при } 0 \leq t \leq 1$$

При $t > T = 1$ принужденное напряжение периодически повторяется

§ 16.5. Приведение цепи к нулевым начальным условиям

Во многих случаях токи и напряжения рассчитывают при переходном процессе, вызванном подключением или отключением какой-либо ветви схемы. Если при этом начальные условия ненулевые, то на основании принципа наложения подключение (отключение) ветви в исходной схеме можно заменить включением источника э. д. с. (источника тока) в схеме с нулевыми начальными условиями. Такая замена упрощает расчет изображений искомых величин, так как не требует учета дополнительных источников, обусловленных ненулевыми начальными условиями.

На рис. 16.12, *а* показано подключение ветви к активному двухполюснику в момент времени $t=0$. Напряжение $u_p(t)$ представляет собой напряжение на зажимах разомкнутого ключа. Можно считать, что закон изменения напряжения $u_p(t)$ справедлив

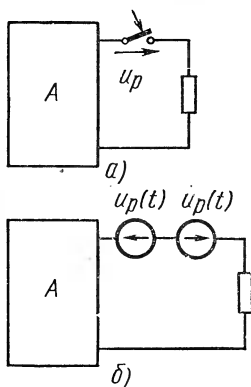


Рис. 16.12

и для $t > 0$. Если после замыкания ключа в выделенную ветвь схемы подключить два противоположно направленных источника напряжения $u_p(t)$ (рис. 16.12, *б*), то эти источники не будут влиять на режим цепи. Расчет токов и напряжений с помощью принципа наложения в данной схеме можно свести к расчету токов и напряжений двух схем, показанных на рис. 16.13, *а*, *б*.

В схеме на рис. 16.13, *а* токи всех ветвей и напряжения между любой парой узлов не отличаются от соответствующих токов и напряжений схемы на рис. 16.12, *а*; в частности, в выделенной ветви ток равен нулю. Схема на рис. 16.13, *б* содержит один источник, подключаемый к пассивному двухполюснику с нулевыми начальными условиями. Таким образом, напряжения и токи при переходном процессе можно рассчитать как сумму соответствующих напряжений и токов в схеме до коммутации (рис. 16.12, *а*) и в схеме с одним источником напряжения (рис. 16.13, *б*). При этом законы изменения напряжений и токов в схеме до коммутации справедливы для $t > 0$.

На рис. 16.14, *а* показано отключение ветви от активного двухполюсника в момент времени $t=0$. Ток $i_k(t)$ представляет собой ток в выделенной ветви. Если после размыкания ключа в выделенную ветвь подключить два источника тока (рис. 16.14, *б*), то эти источники не изменят режима цепи. Расчет токов и напряжений с помощью принципа наложения в схеме на рис. 16.14, *б* сводится к расчету токов и напряжений двух схем (рис. 16.15, *а*, *б*).

Схема на рис. 16.15, *а* эквивалентна схеме до коммутации на рис. 16.14, *а*. Схема на рис. 16.15, *б* содержит один источник тока, подключаемый к пассивному двухполюснику с нулевыми начальными условиями. Таким образом, переходные напряжения и токи можно рассчитать как сумму соответствующих напряжений и токов в схеме до коммутации (рис. 16.14, *а*) и в схеме с одним источником тока (рис. 16.15, *б*). Законы изменения напряжений и токов в схеме до коммутации считаются справедливыми для $t > 0$.

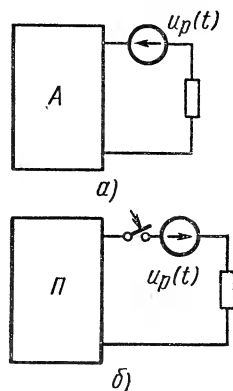


Рис. 16.13

Если в схеме на рис. 16.12, *а* параллельно ключу присоединено активное сопротивление r , которое после коммутации замыкается, то переходные напряжения и токи можно определить как сумму напряжений и токов в схеме до коммутации и в схеме на рис. 16.13, *б*. После коммутации в ветвь схемы (рис. 16.14, *а*) параллельно ключу может быть подключено дополнительное сопротивление r . Пере-

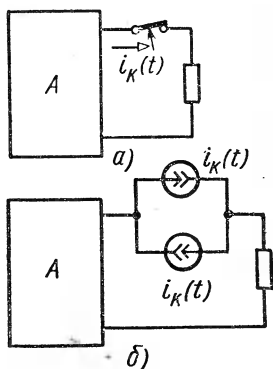


Рис. 16.14

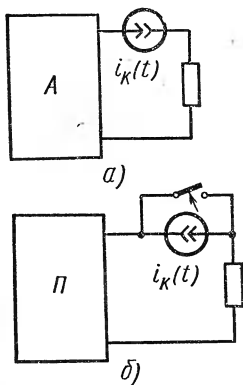


Рис. 16.15

ходные напряжения и токи в этом случае получают как сумму напряжений и токов в схеме до коммутации и в схеме на рис. 16.15, *б*, если последнюю дополнить сопротивлением r , параллельным источнику тока $i_K(t)$.

Пример 16.5. Рассчитать ток $i_1(t)$ в цепи на рис. 16.16, *а* с помощью приведения цепи к нулевым начальным условиям. Параметры схемы: $\mathcal{E} = 20$ В; $r_1 = r_2 = r_3 = 10$ Ом; $L = 0,1$ Г; $C = 5 \cdot 10^{-4}$ Ф.

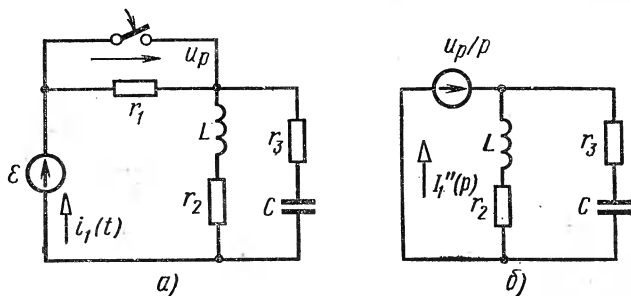


Рис. 16.16

Решение. До коммутации ток

$$i_1' = \frac{\mathcal{E}}{r_1 + r_2} = 1 \text{ А;}$$

напряжение на зажимах ключа

$$u_p = \frac{\mathcal{E}}{r_1 + r_2} r_1 = 10 \text{ В.}$$

Схема с нулевыми начальными условиями показана на рис. 16.16, б. Из этой схемы изображение тока

$$I_1'(p) = \frac{u_p}{p(r_2 + pL)} + \frac{u_p}{p\left(r_3 + \frac{1}{pC}\right)} = \frac{100}{p(p+100)} + \frac{1}{p+200}.$$

При переходе к оригиналам получим

$$i_1''(t) = 1 - e^{-100t} + e^{-200t}.$$

Искомый ток

$$i_1(t) = i_1' + i_1'' = 2 - e^{-100t} + e^{-200t} \text{ А.}$$

Следует отметить, что при подключении одного источника постоянной э. д. с. (тока) к пассивной цепи изображение искомого напряжения (тока) имеет вид

$$F(p) = \frac{A(p)}{pB(p)}.$$

При этом на основании теоремы разложения оригинал

$$j(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_k \frac{A(p_k) e^{p_k t}}{p_k B'(p_k)}, \quad (16.44)$$

где p_k — полюсы, определяемые характеристическим уравнением $B(p) = 0$.

Гармоническая функция $e(t) = \mathcal{E}_m \sin(\omega_0 t + \psi)$ представляет собой мнимую часть комплексной величины $\mathcal{E}_m e^{j\omega_0 t}$ ($\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m e^{j\psi}$), изображение которой равно $\mathcal{E}_m / (p - j\omega_0)$. При подключении одного источника гармонического напряжения (тока) к пассивной цепи изображение искомого комплексного напряжения (тока) может быть записано следующим образом:

$$F(p) = \frac{A(p)}{(p - j\omega_0) B(p)}.$$

Соответствующее мгновенное значение

$$f(t) = \text{Im} \left[\frac{A(j\omega_0)}{B(j\omega_0)} e^{j\omega_0 t} + \sum_k \frac{A(p_k) e^{p_k t}}{(p_k - j\omega_0) B'(p_k)} \right]. \quad (16.45)$$

Формулы (16.44) и (16.45) называют формулами включения; первые слагаемые в правой части этих формул определяют установившееся значение напряжения (тока).

§ 16.6. Преобразование Фурье и спектральные характеристики

Преобразование Фурье и его основные свойства. Как уже отмечалось, прямое преобразование Лапласа существует для функций времени $f(t)$, ограниченных условием $|f(t)| < M e^{\sigma_0 t}$ при $\sigma_0 > 0$ ($t > 0$). Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию $|f(t)| < M e^{\sigma_0 t}$ при $\sigma_0 < 0$ ($t > 0$), то эта функция абсолютно интегрируема.

Изображение по Лапласу $F(p)$ абсолютно интегрируемой функции $f(t)$ представляет собой аналитическую функцию переменной p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и, в частности, на мнимой оси. Для такой функции в формулах прямого и обратного преобразования Лапласа можно принять $p = j\omega$. В результате

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (16.46)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16.47)$$

Формула (16.46) характеризует прямое преобразование Фурье, а формула (16.47) — обратное преобразование (интеграл) Фурье. Преобразования Фурье можно рассматривать как частный случай преобразований Лапласа при $p = j\omega$ для абсолютно интегрируемых функций. Если абсолютно интегрируемая функция $f(t)$ имеет изображение по Лапласу $F(p)$, то прямое преобразование Фурье этой функции $F(j\omega) = F(p)|_{p=j\omega}$.

В формуле (16.46) предполагается, что функция $f(t)$ задана при $t > 0$. При $t < 0$ $f(t) = 0$. Если $f(t) \neq 0$ при $t < 0$, то прямое преобразование Фурье имеет вид

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16.48)$$

и называется двусторонним*. Интеграл Фурье (16.47) определяет функцию $f(t)$, равную или не равную нулю при $t < 0$, если в подынтегральном выражении функция $F(j\omega)$ соответствует формуле (16.46) или (16.48).

В гл. 13 было рассмотрено разложение периодических функций $f(t)$ в ряд Фурье. Такое разложение позволяет определить спектральный состав функции — амплитуды и начальные фазы ее гармонических составляющих. Интеграл Фурье представляет собой предельный случай ряда Фурье для непериодической функции.

Переход от ряда к интегралу Фурье осуществляется следующим образом. Пусть $f(t)$ — непериодическая функция, отличная от нуля в некотором конечном интервале времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Выбирая произвольно период $T > \Delta t$, можно образовать функцию

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT).$$

Эта функция является периодической и в интервале $t_1 < t < t_2$ совпадает с функцией $f(t)$ (рис. 16.17). Если $T \rightarrow \infty$, то функция $\bar{f}(t)$ обращается в функцию $f(t)$.

* Аналогично можно определить и двустороннее преобразование Лапласа.

Для периодической функции $\bar{f}(t)$ справедливо разложение в ряд Фурье*:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (16.49)$$

где

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (16.50)$$

Обозначив частоту основной гармоники $\omega_1 = 2\pi/T = \Delta\omega$, можно получить

$$\dot{A}_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt.$$

Если $T \rightarrow \infty$, то разность между частотами $(k+1)$ -й и k -й гармоник, равная частоте основной гармоники, а также амплитуды

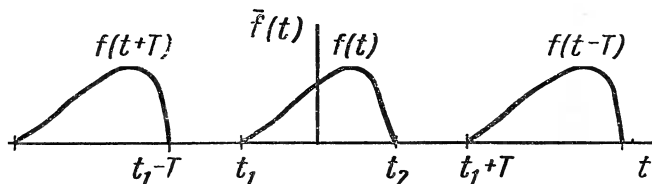


Рис. 16.17

всех гармонических составляющих бесконечно уменьшаются ($\dot{A}_k \rightarrow 0$). Функция

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt \right] e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Если учесть равенство (16.48), то это выражение совпадет с (16.47).

Так как интеграл Фурье определяют как предельный случай ряда Фурье, непериодическая функция $f(t)$ в соответствии с фор-

* Здесь ряд Фурье записан в показательной форме, которая может быть получена из тригонометрической формы с помощью соотношений (см. гл. 13)

$$\sin k\omega_1 t = \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t});$$

$$\cos k\omega_1 t = \frac{1}{2} (e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}).$$

мулой (16.47) представляет собой сумму бесконечно большого числа гармонических составляющих. У этих составляющих в отличие от гармоник периодических функций амплитуды бесконечно малы, а частоты принимают все значения в диапазоне $0 \div \infty$. Непериодическая функция имеет непрерывный (сплошной) спектр, тогда как спектр периодической функции является дискретным.

Функцию $F(j\omega) = F(\omega) e^{j\psi(\omega)}$, определяемую по соотношению (16.46) или (16.48), называют спектральной функцией, спектральной характеристикой или спектральной плотностью. Модуль $F(\omega) = |F(j\omega)|$ и аргумент $\psi(\omega) = \arg F(j\omega)$ функции $F(j\omega)$ называют соответственно амплитудной и фазовой спектральными характеристиками.

Учитывая связь между изображением по Лапласу и спектральной характеристикой, можно сформулировать свойства преобразования Фурье, аналогичные рассмотренным в § 16.1 свойствам преобразования Лапласа. Например, если $F(j\omega)$ — спектральная характеристика функции $f(t)$, то спектральная характеристика производной $f'(t)$ равна $j\omega F(j\omega) - f(0)$, а спектральная характеристика интеграла $\int_0^t f(t) dt$ есть $F(j\omega)/j\omega$.

Амплитудная спектральная характеристика является четной функцией частоты, а фазовая — нечетной:

$$F(\omega) = F(-\omega);$$

$$\psi(\omega) = -\psi(-\omega).$$

Действительно, функция

$$F(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$$

представляет собой сопряженную функцию для $F(j\omega)$; модули сопряженных функций $F(j\omega)$ и $F(-j\omega)$ одинаковы, а аргументы отличаются знаком.

Если $f(t)$ — напряжение (ток), то интеграл

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

определяет энергию, которая рассеивается в сопротивлении, равном 1 Ом при напряжении (токе) $f(t)$. С учетом равенства (16.47) энергия

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

После изменения порядка интегрирования

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega,$$

где внутренний интеграл равен функции $F(-j\omega)$. Так как $F(j\omega)F(-j\omega)=[F(\omega)]^2$, энергия

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F(\omega)]^2 d\omega. \quad (16.51)$$

Таким образом, энергия может быть вычислена по амплитудной спектральной характеристике $F(\omega)$; функцию $\frac{1}{\pi} [F(\omega)]^2$ можно рассматривать как спектральную плотность энергии непериодического сигнала. На практике ширина спектра функции $f(t)$ определяется диапазоном частот, в котором сосредоточена подавляющая часть энергии W .

Спектральные характеристики некоторых функций. Целесообразно рассмотреть переход от дискретного спектра периодической функции к сплошному спектру непериодической функции.

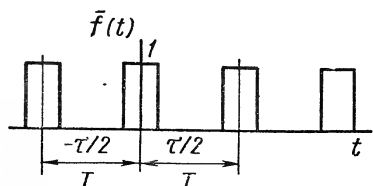


Рис. 16.18

Как видно из сравнения выражений (16.48) и (16.50), значения спектральной характеристики $F(j\omega)$ совпадают с произведением $\dot{A}_k T = \dot{A}_k \frac{2\pi}{\omega_1}$ в тех точках, где

полняется равенство $\omega = k\omega_1$. Это означает, что спектральная харак-

теристика непериодической функции $f(t)$ служит огибающей для дискретного ряда величин $\dot{A}_k(t)$, пропорциональных комплексным амплитудам гармонических составляющих периодической функции $\bar{f}(t)$.

На рис. 16.18 показана периодическая последовательность прямоугольных импульсов. Для k -й гармонической составляющей этой последовательности

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{2}{k\omega_1 T} \cdot \frac{e^{jk\omega_1 \tau/2} - e^{-jk\omega_1 \tau/2}}{2j} = \frac{2}{k\omega_1 T} \sin \frac{k\omega_1 \tau}{2}. \end{aligned}$$

В случае непериодической функции, представляющей собой один прямоугольный импульс в интервале $-\tau/2 < t < \tau/2$, спектральная характеристика

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2}.$$

На рис. 16.19, а, б приведены соответственно дискретный спектр последовательности импульсов и непрерывный спектр одного импульса. Если период T последовательности импульсов

увеличивается, то число линий дискретного спектра возрастает, расстояние между ними уменьшается; в пределе дискретный спектр переходит в сплошной. Амплитудная и фазовая спектральные характеристики прямоугольного импульса показаны соответственно на рис. 16.20, а, б; каждая перемена знака $\sin(\omega\tau/2)$ учитывается при изменении фазы на π .

Если начало импульса совпадает с моментом времени $t = 0$, то амплитудная характеристика не изменяется, а фазовая — дополняется слагаемым $\omega\tau/2$ *.

При увеличении (уменьшении) длительности импульса расстояние между нулями функции $F(\omega)$ уменьшается (увеличивается).

Если амплитуда импульса равна $1/\tau$, то при $\tau \rightarrow 0$ спектральная характеристика

$$F(j\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{\omega\tau} \sin \frac{\omega\tau}{2} = 1.$$

Импульс, имеющий длительность τ и амплитуду $1/\tau$ в пределе при $\tau \rightarrow 0$, представляет собой дельта-функцию $\delta(t)$. Следовательно, спектральная характеристика дельта-функции вещественна и равна единице для всех частот $-\infty < \omega < \infty$. На основании теоремы запаздывания спектральная характеристика дельта-функции $\delta(t - t_0)$

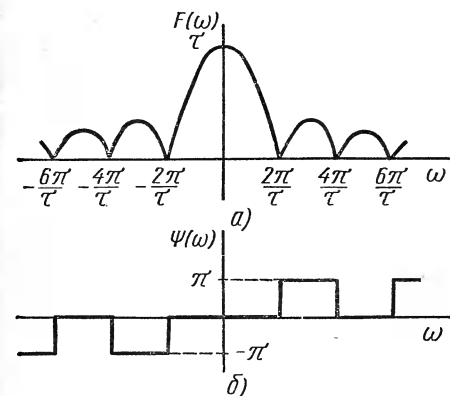


Рис. 16.20

равна $F(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$; модуль этой характеристики $F(\omega) = 1$; аргумент $\varphi(\omega) = -\omega t_0$.

Спектральные характеристики абсолютно интегрируемых функций, для которых найдено изображение по Лапласу, могут быть получены с помощью замены в изображении переменной p на $j\omega$.

* По теореме запаздывания, смещение импульса на $\tau/2$ (в сторону положительных значений t) приводит к умножению спектральной характеристики на $e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$.

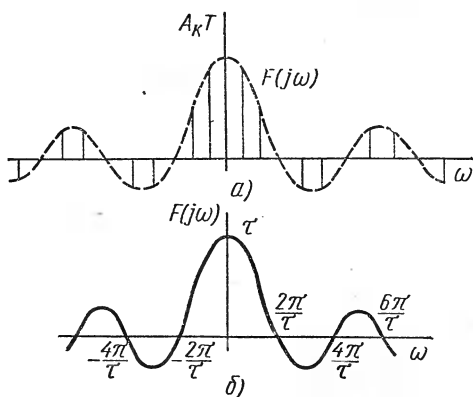


Рис. 16.19

Пример 16.6. Построить амплитудную спектральную характеристику прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением (рис. 16.21, а). Длительность импульса равна целому числу периодов.

Решение. Заданная функция абсолютно интегрируема и описывается соотношениями

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

С помощью единичных функций заданную функцию можно представить в виде разности:

$$f(t) = \sin \omega_0 t \cdot 1(t) - \sin \omega_0 (t - \tau) \cdot 1(t - \tau).$$

Следовательно, изображение функции $f(t)$

$$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} (1 - e^{-p\tau}).$$

Спектральная характеристика

$$F(j\omega) = F(p) \big|_{p=j\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (1 - e^{-j\omega\tau}).$$

Так как

$$\left| 1 - e^{-j\omega\tau} \right| = \left| \frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{e^{j\frac{\omega\tau}{2}}} \right| = 2 \left| \sin \frac{\omega\tau}{2} \right|,$$

модуль спектральной характеристики

$$F(\omega) = 2 \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega\tau}{2} \right| = 2 \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi\omega}{\omega_0} \right|.$$

Амплитудная спектральная характеристика $F(\omega)$ приведена на рис. 16.21, б.

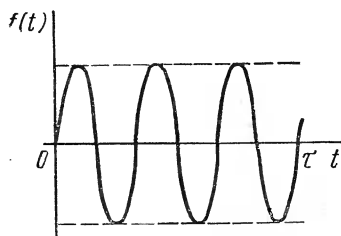
Значение $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow \omega_0$ найдем с помощью правила Лопиталя:

$$F(\omega_0) = n\pi/\omega_0.$$

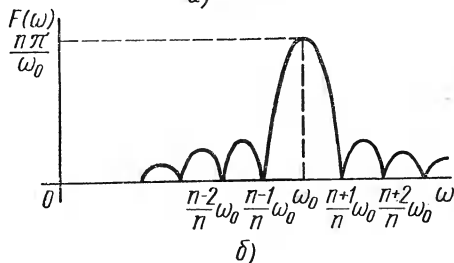
Нули функции $F(\omega)$ расположены в точках $\omega = k\omega_0/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Если число периодов синусоиды n увеличивается, то значение $F(\omega_0)$ возрастает, а расстояние между нулями функции уменьшается.

Ряд важных функций времени (например, единичная и гармоническая функции) не являются абсолютно интегрируемыми. Спектральные характеристики таких функций не могут быть найдены непосредственно по формуле (16.46). Умножая функцию $f(t)$ на экспоненту $e^{-\sigma t}$, во многих случаях удастся найти спектральную характеристику произведения $f(t)e^{-\sigma t}$. Если в этой характеристике принять $\sigma = 0$, то можно получить спектральную характеристику функции $f(t)$.



а)



б)

Рис. 16.21

стику произведения $f(t)e^{-\sigma t}$. Если в этой характеристике принять $\sigma = 0$, то можно получить спектральную характеристику функции $f(t)$.

С помощью рассмотренного приема в формулах для прямого преобразования Фурье производится переход от переменной ω к переменной $p = \sigma + j\omega$, т. е. вычисляется изображение по Лапласу функции $f(t)$ с последующей заменой p на $j\omega$. Такой прием получения спектральной характеристики неинтегрируемой абсолютно функции нельзя считать корректным. Например, если единичную функцию $1(t)$ умножить на экспоненту $e^{-\sigma t}$, то спектральная характеристика этого произведения

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sigma + j\omega}.$$

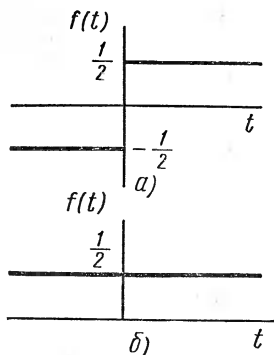


Рис. 16.22

Полагая $\sigma = 0$, можно получить спектральную характеристику $F(j\omega) = 1/j\omega$. Функция $1/j\omega$ строго математически не является спектральной характеристикой единичной функции. Действительно, вычисляя обратное преобразование (16.47), получаем *

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cos \omega t}{j\omega} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } t > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{при } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Полученная функция $f(t)$, показанная на рис. 16.22, а, отличается от единичной функции $1(t)$.

Ранее было показано, что дельта-функция $\delta(t)$ имеет спектральную характеристику $F(j\omega) = 1$. Если предположить, что для некоторой функции $f(t)$ спектральная характеристика представляет собой дельта-функцию $F(j\omega) = \delta(\omega)$, то на основании (16.47)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi}.$$

Таким образом, функции $f(t) = 1/2\pi$ при $-\infty < t < \infty$ соответствует спектральная характеристика в виде дельта-функции $\delta(\omega)$. Функция $f(t) = 1$ при $-\infty < t < \infty$ имеет спектральную характеристику $2\pi \delta(\omega)$.

Единичная функция $1(t)$ может быть получена суммированием двух функций: функции на рис. 16.22, а, имеющей спектральную характеристику $1/j\omega$, и функции на рис. 16.22, б, спектральная характеристика которой $\pi \delta(\omega)$. Следовательно, спектральная харак-

* Значение несобственного интеграла можно найти в математических справочниках.

теристика единичной функции

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (16.52)$$

Функция $f(t) = 1$ при $-\infty < t < \infty$ не интегрируется абсолютно; спектральная характеристика этой функции $F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$. Воспользовавшись равенством (16.48), можно записать

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt. \quad (16.53)$$

С помощью этой формулы нетрудно вычислить спектральные характеристики для гармонических функций. Например, синусоидальная функция ($-\infty < t < \infty$)

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}),$$

поэтому формальное применение равенства (16.48) приводит к выражению

$$F(j\omega) = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt.$$

С учетом формулы (16.53) получаем

$$F(j\omega) = -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Эта функция отлична от нуля только при $\omega = \pm \omega_0$. Таким образом, гармоническому колебанию с частотой ω_0 соответствует бесконечно большая спектральная плотность при $\omega = \pm \omega_0$.

Спектральную характеристику гармонической функции, умноженной на единичную функцию, можно найти, воспользовавшись выражением (16.52) и теоремой смещения. Согласно теореме смещения*, при умножении функции $f(t)$ на $e^{\pm j\omega_0 t}$ спектральная характеристика $F(j\omega)$ принимает вид $F[j(\omega \mp \omega_0)]$. Поэтому, например, для функции

$$\sin \omega_0 t \cdot 1(t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \cdot 1(t)$$

получаем спектральную характеристику

$$F(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} - j\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Если не учитывать импульсных составляющих при $\omega = \pm \omega_0$, то спектральная характеристика синусоидальной функции ($t > 0$) $F(j\omega) = \omega_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$. Такое выражение можно определить, заменяя в изображении по Лапласу p на $j\omega_0$.

* В § 16.1 теорема смещения сформулирована для изображений по Лапласу.

§ 16.7. Применение преобразования Фурье к расчету переходных процессов

Преобразования Фурье, как уже отмечалось, можно рассматривать как частный случай преобразований Лапласа. Поэтому расчет переходных процессов с помощью преобразований Фурье аналогичен расчету переходных процессов операторным методом.

Например, при подключении источника непериодической э. д. с. $e(t)$ к некоторому пассивному двухполюснику для спектральной характеристики тока справедливо выражение*

$$I(j\omega) = Y(j\omega) \mathcal{E}(j\omega),$$

где $\mathcal{E}(j\omega)$ — спектральная характеристика функции $e(t)$; $Y(j\omega)$ — входная проводимость двухполюсника, при расчете которой сопротивление индуктивности (емкости) принимается равным $j\omega L$ ($1/j\omega C$). По спектральной характеристике $I(j\omega)$ на основании обратного преобразования Фурье можно найти ток $i(t)$.

Рассмотренный подход к расчету переходных процессов отличается от операторного метода лишь заменой переменной p на $j\omega$. В подобных случаях нет необходимости применять преобразования Фурье, а целесообразнее воспользоваться более общими преобразованиями Лапласа.

Значение преобразований Фурье для расчета переходных процессов состоит в том, что эти преобразования позволяют связать напряжения (токи) при переходном процессе с частотными характеристиками цепи. Зная спектральный состав входного воздействия и частотную характеристику цепи, можно найти спектральный состав выходной величины, оценить влияние частотной характеристики на выходное напряжение или ток. С помощью спектральных функций может быть решена задача выбора полосы пропускания, формы частотной характеристики и т. п.

Следует обратить внимание, что существует взаимное соответствие между функцией $f(t)$ и ее спектральной характеристикой $F(\omega)$. Например, как было показано, спектральная характеристика функции $\delta(t)$ постоянна во всем диапазоне частот и, наоборот, постоянной функции $f(t) = 1$ соответствует импульсная спектральная характеристика. Чем меньше длительность импульса, тем более широким спектром он обладает (и наоборот).

Если четырехполюсник имеет операторный коэффициент передачи напряжения $K^{(u)}(p)$, то спектральная характеристика выходного напряжения

$$U_2(j\omega) = K^{(u)}(j\omega) U_1(j\omega),$$

где $U_1(j\omega)$ — спектральная характеристика входного напряжения. Комплексный коэффициент передачи $K^{(u)}(j\omega) = K(\omega) e^{j\theta(\omega)}$ в общем случае имеет модуль и аргумент, зависящие от частоты. При $K(\omega) = K = \text{const}$, $\theta(\omega) = -\omega t_3$ спектральная характеристика

* Начальные условия предполагаются нулевыми.

$U_2(j\omega) = KU_1(j\omega)e^{-j\omega t_3}$. На основании теоремы запаздывания можно утверждать, что выходное напряжение $U_2(t)$ в рассматриваемом

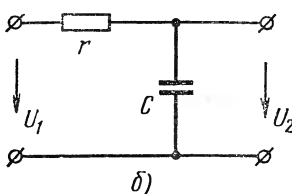
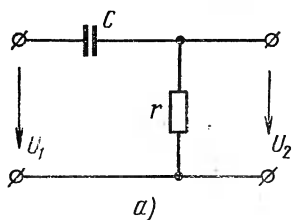


Рис. 16.23

частном случае отличается от входного напряжения $U_1(t)$ только постоянным множителем K и запаздывает на время t_3 . Таким образом, для неискаженной передачи сигнала амплитудно-частотная характеристика $K(\omega)$ должна быть постоянной, а фазочастотная $\theta(\omega)$ — линейной. Сформулированные требования к частотным характеристикам цепи нельзя обеспечить во всем диапазоне частот, однако следует стремиться, чтобы полоса частот, в которой эти требования удовлетворяются, соответствовала практической ширине спектра входных сигналов.

Влияние частотных характеристик на реакцию цепи можно рассмотреть на примере цепей, схемы которых приведены на рис. 16.23, а, б.

Коэффициент передачи напряжения схемы на рис. 16.23, а

$$K^{(u)}(j\omega) = \frac{r}{r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega rC}{1 + j\omega rC}.$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики выражаются равенствами

$$K^{(u)}(\omega) = \frac{\omega rC}{\sqrt{1 + (\omega rC)^2}},$$

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega rC.$$

Если для частот составляющих входного сигнала удовлетворяется условие $\omega rC \ll 1$, то $K^{(u)}(\omega) \approx \omega rC$, $\theta(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$, $K^{(u)}(j\omega) \approx j\omega rC$. Спектральная характеристика выходного напряжения

$$U_2(j\omega) \approx j\omega rCU_1(j\omega).$$

Функция $j\omega U_1(j\omega)$ представляет собой спектральную характеристику производной входного напряжения $u_1'(t)$. Таким образом, схема на рис. 16.23, а при $\omega rC \ll 1$ осуществляет дифференцирование (и ослабление) входного напряжения.

Коэффициент передачи напряжения схемы на рис. 16.23, б

$$K^{(u)}(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{r + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega rC},$$

следовательно,

$$K^{(u)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega rC)^2}}; \quad \theta(\omega) = -\arctg \omega rC.$$

Если для частот составляющих входного сигнала выполняется условие $\omega rC \gg 1$, то $K^{(u)}(\omega) \approx 1/\omega rC$, $\theta(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$; $K^{(u)}(j\omega) \approx 1/j\omega rC$. Спектральная характеристика выходного напряжения

$$U_2(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega rC} U_1(j\omega).$$

Функция $U_1(j\omega)/j\omega$ представляет собой спектральную характеристику интеграла $\int_0^t u_1 dt$ от входного напряжения. Таким образом, схема на рис. 16.23, б осуществляет интегрирование (и ослабление) входного напряжения при $\omega rC \gg 1$.

На рис. 16.24, а, б показаны соответственно выходные напряжения дифференцирующей и интегрирующей цепей при одном и том же входном напряжении. Как видно, различие частотных характеристик обуславливает существенное различие выходных напряжений.

Преобразования Фурье часто применяют при расчете переходных процессов с помощью частотных характеристик, полученных экспериментально. Пусть спектральная характеристика $F(j\omega)$ представлена в алгебраической форме:

$$F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega) = F(\omega) \cos \psi(\omega) + jF(\omega) \sin \psi(\omega).$$

Вещественная и мнимая части спектральной характеристики определяются в соответствии с равенством (16.46):

$$F_1(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt; \quad (16.54)$$

$$F_2(\omega) = - \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt. \quad (16.55)$$

Вещественная часть спектральной характеристики $F_1(\omega)$ — четная функция, а мнимая часть $F_2(\omega)$ — нечетная функция частоты. Согласно обратному преобразованию,

$$\begin{aligned} t(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) + jF_2(\omega)] [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t - F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega + \\ &+ \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \sin \omega t + F_2(\omega) \cos \omega t] d\omega. \end{aligned}$$

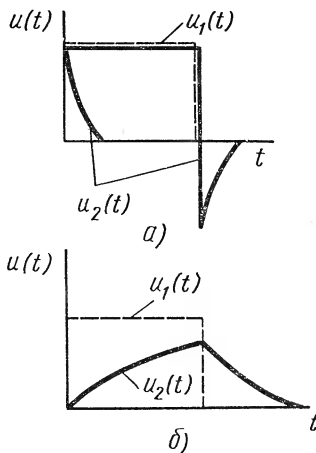


Рис. 16.24

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \sin \omega t + F_2(\omega) \cos \omega t] d\omega = 0,$$

так как функция в квадратных скобках нечетная. Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t - F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

или, учитывая четность функции в квадратных скобках,

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t - F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Если спектральная характеристика определяется равенством (16.46), то функция $f(-t) = 0$ ($t > 0$):

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0,$$

откуда

$$\int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega = - \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Таким образом, функцию $f(t)$ можно определить через вещественную или мнимую спектральные характеристики:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (16.56)$$

При известных частотных характеристиках $F_1(\omega)$ или $F_2(\omega)$ интегралы в соотношении (16.54) вычисляются приближенными методами.

Пусть функция $F_1(\omega)$ имеет вид трапеции (рис. 16.25). Интегрируя выражение для $f(t)$ по частям, получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi t} F_1(\omega) \sin \omega t \Big|_{\omega=0}^{\infty} - \\ &\quad - \frac{2}{\pi t} \int_0^{\infty} \sin \omega t \frac{dF_1(\omega)}{d\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что первое слагаемое в правой части равно нулю,

$$f(t) = - \frac{2}{\pi t} \int_0^{\infty} \sin \omega t \frac{dF_1(\omega)}{d\omega} d\omega.$$

Производная $dF_1(\omega)/d\omega$ отлична от нуля только в диапазоне частот $\omega_1 - \Delta\omega_1 \div \omega_1 + \Delta\omega_1$, поэтому

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi t} \frac{A_1}{2\Delta\omega_1} \int_{\omega_1 - \Delta\omega_1}^{\omega_1 + \Delta\omega_1} \sin \omega t d\omega = \\ &= \frac{A_1}{\pi t^2 \Delta\omega_1} [\cos(\omega_1 - \Delta\omega_1)t - \cos(\omega_1 + \Delta\omega_1)t]. \end{aligned}$$

После элементарного преобразования

$$f(t) = \frac{2A_1\omega_1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \frac{\sin \Delta\omega_1 t}{\Delta\omega_1 t}. \quad (16.57)$$

Функции $\sin x/x$ могут быть табулированы, поэтому расчет $f(t)$ по выражению (16.57) не вызывает затруднений.

В общем случае частотная характеристика $\bar{F}_1(\omega)$ может быть аппроксимирована с достаточной точностью несколькими трапециями. Если параметры трапеций определить величинами A_k , ω_k , $\Delta\omega_k$ (аналогично величинам на рис. 16.25), то

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_k A_k \omega_k \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k t} \frac{\sin \Delta\omega_k t}{\Delta\omega_k t}.$$

$$(16.58) \quad F_{1(k)}(\omega)$$

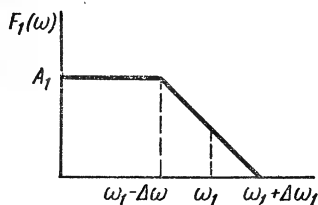


Рис. 16.25

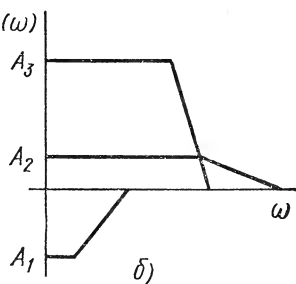
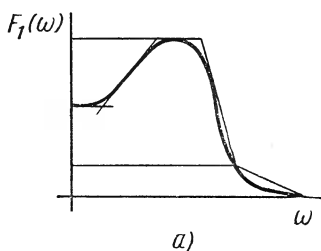


Рис. 16.26

На рис. 16.26, а, б приведены соответственно частотная характеристика $F_1(\omega)$ и аппроксимирующие трапеции $F_{1(k)}(\omega)$.

§ 16.8. Некоторые соотношения между временными и частотными характеристиками цепи

Реакция цепи во временной области может быть найдена с помощью интеграла Дюамеля, если известна переходная или импульсная характеристика цепи (см. § 15.2, 15.3). С другой стороны, реакцию цепи можно определить, вычислив предварительно изображение или спектральную характеристику реакции. Изображение (спектральную характеристику) реакции получают

при умножении изображения (спектральной характеристики) входного воздействия на соответствующую схемную функцию — входную или взаимную проводимость, входное или взаимное сопротивление, коэффициент передачи напряжения или тока — в операторной (комплексной) форме.

Пусть напряжение на входе четырехполюсника $u_1(t) = 1(t)$; тогда выходное напряжение $u_2(t)$ равно переходному коэффициенту передачи напряжения $u_2(t) = K^{(u)}(t)$. Так как изображение входного напряжения $1(t)$ равно $1/p$, операторный коэффициент передачи напряжения

$$K^{(u)}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = p\mathcal{L}[u_2(t)] = p\mathcal{L}[K^{(u)}(t)]. \quad (16.59)$$

Таким образом, при умножении изображения переходного коэффициента передачи напряжения на p получают операторный коэффициент передачи напряжения.

Производная функции $K^{(u)}(t)$ равна импульсному коэффициенту передачи $K_\delta^{(u)}(t)$. Умножение изображения $\mathcal{L}[K^{(u)}(t)]$ на p соответствует дифференцированию функции $K^{(u)}(t)$, поэтому

$$K^{(u)}(p) = \mathcal{L}[K_\delta^{(u)}(t)] = K_\delta^{(u)}(p), \quad (16.60)$$

т. е. операторный коэффициент передачи напряжения представляет собой изображение импульсного коэффициента передачи. При $p = j\omega$ соотношение (16.60) принимает вид

$$K^{(u)}(j\omega) = K_\delta^{(u)}(j\omega), \quad (16.61)$$

т. е. коэффициент передачи в комплексной форме равен спектральной характеристике импульсного коэффициента передачи.

Функцию $K^{(u)}(j\omega)$ можно представить в виде

$$K^{(u)}(j\omega) = K^{(u)}(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

или

$$K^{(u)}(j\omega) = K_1(\omega) + jK_2(\omega),$$

где $K^{(u)}(\omega)$ и $\theta(\omega)$ — соответственно амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики коэффициента передачи напряжения; $K_1(\omega)$ и $K_2(\omega)$ — частотные характеристики вещественной и мнимой частей.

По аналогии с выражениями (16.54) и (16.55) получаем:

$$K_1^{(u)}(\omega) = \int_0^\infty K_\delta^{(u)}(t) \cos \omega t dt; \quad (16.62)$$

$$K_2^{(u)}(\omega) = - \int_0^\infty K_\delta^{(u)}(t) \sin \omega t dt. \quad (16.63)$$

Для импульсной характеристики справедливы выражения, аналогичные (16.56):

$$K_{\delta}^{(u)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_1^{(u)}(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_2^{(u)}(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (16.64)$$

Таким образом, импульсная характеристика определяется частотной зависимостью только вещественной или мнимой части коэффициента передачи напряжения.

Соотношения, аналогичные (16.59) ÷ (16.64), могут быть записаны и для других входных и передаточных функций.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 17.1. Характер переходных процессов в цепях с распределенными параметрами

В цепях с распределенными параметрами, в частности, в высоковольтных сетях и линиях связи, переходные процессы возникают при изменении режима цепи (включения и отключения отдельных ветвей), а также в результате грозовых явлений. Появляющиеся при этом перенапряжения или большие токи нередко приводят к повреждению изоляции или других частей электротехнических установок, если они неверно спроектированы.

В отличие от переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами изменение токов и напряжений в цепях с распределенными параметрами происходит неодновременно во всех частях установки. Изменение тока и напряжения, начавшееся в каком-либо участке цепи, распространяется на остальные элементы цепи с конечной скоростью. Вдоль воздушных линий эти изменения распространяются приблизительно со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ км/с, а в кабелях — со скоростью, примерно в два раза меньшей. Скорость распространения изменений тока и напряжения или, как говорят, волн тока и напряжения на много порядков больше скорости перемещения электронов в проводах линий или кабелей. Она практически совпадает со скоростью распространения электромагнитных волн в среде, окружающей проводники. В линиях такой средой является воздух; в кабелях — изоляция между жилой и оболочкой.

Движение волн тока и напряжения сопровождается передачей вдоль линии электромагнитной энергии, которая сосредоточена в поле, окружающем проводники. Распространение волн тока и напряжения определяется взаимодействием связанных с ними электрических и магнитных полей.

Здесь основное внимание уделено расчету напряжений и токов в различных частях цепи с распределенными параметрами при переходных процессах. При этом упрощение расчета достигается использованием операторного метода. Операторный метод позволяет производить в цепях с сосредоточенными параметрами расчет переходных процессов по формулам, аналогичным формулам для цепей с синусоидальными токами и напряжениями (см. § 16.3). Подобное положение имеет место и в цепях с распределенными параметрами при *нулевых начальных условиях*. В этом можно убедиться, применив преобразование Лапласа к уравнениям длинной линии (12.4), которые в операторной форме приобретут вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= (r_0 + pL_0) I; \\ -\frac{dI}{dx} &= (g_0 + pC_0) U, \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

если обозначить через

$$U = U(p, x) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t, x) dt$$

— изображение напряжения $u(t, x)$ между проводами линии в точке с координатой x , а через

$$I = I(p, x) = \int_0^{\infty} e^{-pt} i(t, x) dt$$

— изображение тока $i(t, x)$ в проводах линии в той же точке.

Совместное решение уравнений (17.1) приводит к однородным линейным уравнениям второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} d^2 U / dx^2 &= \gamma^2 U; \\ d^2 I / dx^2 &= \gamma^2 I, \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

если ввести в рассмотрение операторный коэффициент распространения

$$\gamma = \gamma(p) = \sqrt{(r_0 + pL_0)(g_0 + pC_0)}. \quad (17.3)$$

Решение уравнений (17.2) не представляет никаких затруднений, однако в нем нет необходимости, так как формальная аналогия дифференциальных уравнений (12.6) и (17.2) позволяет воспользоваться окончательными результатами решения уравнений. При этом вместо комплексных значений подставляют операторные изображения. Например, подобно уравнениям (12.7) и (12.8), для изображений напряжения и тока в линии можно записать:

$$U = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = F_1 + F_2; \quad (17.4a)$$

$$I = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{F_1 - F_2}{Z_c}, \quad (17.4b)$$

где

$$Z_c = Z_c(p) = \sqrt{\frac{r_0 + pL_0}{g_0 + pC_0}}. \quad (17.5)$$

— операторное характеристическое (волновое) сопротивление.

Теперь остается найти оригиналы искомых напряжений $u(t, x)$ и токов $i(t, x)$ по правилам операционного исчисления. Проще всего расчет проводится в случае, когда потери в линии не оказывают заметного влияния на переходной процесс и второе частное решение отсутствует ($F_2 = A_2 e^{\gamma x} = 0$).

Линия без потерь ($r_0 = g_0 = 0$) имеет коэффициент распространения

$$\gamma = p \sqrt{L_0 C_0} = p/v$$

и волновое сопротивление

$$Z_c = z_c = \sqrt{L_0 / C_0}.$$

В этом случае постоянная интегрирования A_1 совпадает с изображением напряжения в начале ($x=0$) линии $U_1=U_1(p)$, а изображения в других точках

$$U = A_1 e^{-px} = U_1 e^{-px/v}. \quad (17.6)$$

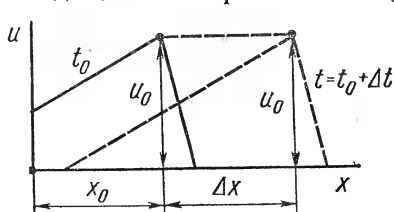
Согласно теореме смещения, при $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$

$$e^{-Tp}F(p) = \mathcal{L}[f(t-T)]. \quad (17.7)$$

Поэтому из уравнения (17.6) следует, что напряжение в любой точке линии без потерь

$$u(t, x) = u_1\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

На рис. 17.1 изображена кривая распределения напряжения $u(t_0, x)$ для момента времени t_0 . На этой кривой отмечена точка, находящаяся на расстоянии x_0 от начала линии, с напряжением



$u_0 = u(t_0, x_0)$. Таким же напряжением будет обладать в момент времени $t > t_0$ та точка линии, для которой выполняется условие

$$t_0 - \frac{x_0}{v} = t - \frac{x}{v},$$

Рис. 17.1

т. е. $x = x_0 + v(t - t_0)$. Отсюда следует, что ордината u_0 первоначальной кривой за время $\Delta t = t - t_0$ перемещается вдоль линии на расстояние $\Delta x = x - x_0 = v \Delta t$. Подобное рассуждение справедливо для любой ординаты первоначальной кривой напряжения. Поэтому можно считать, что за любой интервал времени Δt кривая напряжения оказывается сдвинутой без искажения и изменения амплитуды вдоль линии в направлении положительных значений оси x на расстояние $\Delta x = v \Delta t$. Иначе говоря, напряжение распространяется вдоль линии без потерь в виде волны, которая движется без деформации и затухания с постоянной скоростью $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$. Такую волну, определяемую функцией $F_1 = \mathcal{L}[f_1(t)]$, называют прямой волной.

Аргументы функций F_1 и F_2 отличаются только знаками перед теми членами выражения, в которые входит скорость, т. е. функция $F_2 = \mathcal{L}[f_2(t)]$ определяет волну напряжения, перемещающуюся от конца линии к ее началу, так как направление вектора скорости для нее противоположно направлению вектора скорости прямой волны. Волну напряжения, определяемую функцией f_2 , называют обратной волной.

В общем случае напряжение на линии складывается, согласно (17.4а), из напряжения прямой волны

$$u_{\text{пр}} = f_1\left(t - \frac{x}{v} + \tau_1\right) \quad (17.8)$$

и напряжения обратной волны

$$u_{обр} = f_2 \left(t + \frac{x}{v} + \tau_2 \right), \quad (17.9)$$

где τ_1 и τ_2 — постоянные величины, зависящие от выбора системы отсчета времени и расстояний. Например, $\tau_1 = 0$, когда отсчет расстояний производят от начала линии, а отсчет времени t — с момента подключения источника энергии к началу линии; $\tau_2 = 0$, когда начало отсчета x находится в конце линии, а t отсчитывается с момента появления напряжения в конце линии.

Уравнение (17.46) также имеет две составляющие. Первая составляющая определяет ток прямой волны

$$i_{пр} = \frac{1}{z_c} f_1 \left(t - \frac{x}{v} + \tau_1 \right), \quad (17.10)$$

вторая составляющая — ток обратной волны

$$i_{обр} = \frac{1}{z_c} f_2 \left(t + \frac{x}{v} + \tau_2 \right). \quad (17.11)$$

Если прямая и обратная волны напряжения определены, то волны тока можно найти из соотношения, аналогичного закону Ома:

$$u_{пр}/i_{пр} = u_{обр}/i_{обр} = z_c. \quad (17.12)$$

С помощью этого уравнения можно доказать, что энергия магнитного поля волны равняется энергии ее электрического поля. Например, энергия магнитного поля прямой волны, отнесенная к единице длины линии, равна энергии ее электрического поля:

$$W_{м. пр} = \frac{L_0 i_{пр}^2}{2} = \frac{L_0}{2} \left(\frac{u_{пр}}{z_c} \right)^2 = \frac{L_0}{2} \left(\frac{u_{пр}}{\sqrt{L_0/C_0}} \right)^2 = \frac{C_0 u_{пр}^2}{2} = W_{э. пр}.$$

Аналогично доказывается, что для обратной волны $W_{м. обр} = W_{э. обр}$.

Прямые и обратные волны возникают не сразу во всех точках линии. После присоединения линии к источнику энергии сначала появляется только прямая волна. В момент включения линии ($t=0$) волна начинает распространяться от источника энергии ($x=0$) по направлению к концу линии. Если до включения линии напряжение на ней отсутствовало, то оно равно нулю и на том участке линии, до которого прямая волна еще не дошла. На той части линии, до которой прямая волна уже дошла, напряжение вначале равно напряжению только прямой волны. Оно будет оставаться таким до прихода обратной волны. В общем случае на тех участках линии, где имеются и прямая и обратная волны, напряжение и ток определяются наложением прямых и обратных волн:

$$u = u_{пр} + u_{обр}; \quad (17.13)$$

$$i = i_{пр} - i_{обр}. \quad (17.14)$$

Уравнение (17.13) непосредственно следует из уравнений (17.4а), (17.8) и (17.9), а уравнение (17.14) — из уравнений (17.4б), (17.10) и (17.11).

§ 17.2. Расчет напряжения прямой волны

Пусть источник э. д. с. с напряжением $u_0(t)$ подключается к началу линии без потерь через пассивный четырехполюсник Π с сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим явления, происходящие в начале переходного процесса, когда после замыкания ключа (рис. 17.2) в линии возникает прямая волна, а обратная волна еще не появилась ($u_{обр} = 0$). В этом случае, согласно уравнениям (17.12), (17.13) и (17.14),

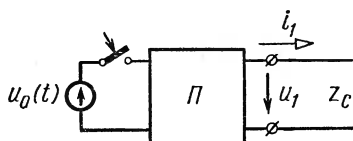


Рис. 17.2

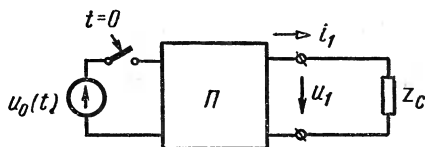


Рис. 17.3

напряжение и ток в начале линии ($x=0$) совпадают с напряжением и током прямой волны, а также напряжением и током на выходе четырехполюсника:

$$u_1(t) = u_{пр}(t, 0) = f_1(t) = z_c i_{пр}(t, 0) = z_c i_1(t). \quad (17.15)$$

Из этого соотношения следует, что эквивалентная схема для определения напряжения и тока в начале линии (до прихода обратной волны) состоит из пассивного четырехполюсника Π , к входу которого подключается источник э. д. с. с напряжением $u_0(t)$, а к выходу — активное сопротивление, равное волновому сопротивлению линии z_c (рис. 17.3).

Сопоставление уравнений (17.8) и (17.15) показывает, что уравнение прямой волны в начале линии совпадает с уравнением полного напряжения, а в остальных точках отличается от него только аргументом ($t - \frac{x}{v}$ вместо t). Следовательно, для получения уравнения напряжения прямой волны необходимо в уравнении напряжения в начале линии заменить t на $t - \frac{x}{v}$:

$$u_{пр} = u_1 \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (17.16)$$

По этому уравнению можно рассчитать напряжение прямой волны в любой момент времени $t > 0$ в точках линии, для которых $x \leq vt$, по известному уравнению напряжения в начале линии. Пользуясь формулой (17.12), легко найти и уравнение тока прямой волны.

Пример 17.1. К началу воздушной линии длиной $l = 120$ км присоединен источник э. д. с. с напряжением $u_0 = U_0(1 - e^{-\alpha t})$, где $U_0 = 1000$ кВ; $\alpha = 5000$ с $^{-1}$. Построить график распределения напряжения прямой волны вдоль линии спустя 0,6 с после начала распространения волны.

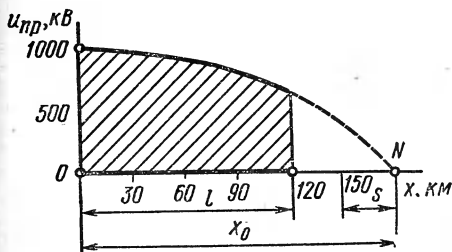


Рис. 17.4

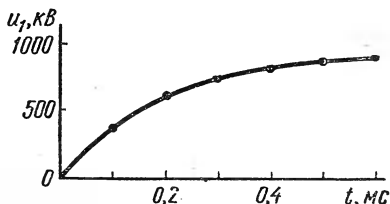


Рис. 17.5

Решение. Исходя из того, что напряжение в начале линии совпадает с напряжением источника энергии, и учитывая общее правило (17.16), напряжение прямой волны

$$u_{\text{пр}} = u_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) = U_0 \left[1 - e^{-\alpha \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right] = \\ = 1000 \left[1 - e^{-5 \cdot 10^3 \left(0,6 \cdot 10^{-3} - \frac{x}{3 \cdot 10^5} \right)} \right] \text{ кВ,}$$

где $v = 3 \cdot 10^5$ км/с. График распределения напряжения прямой волны вдоль линии построен на рис. 17.4.

Сравним график распределения напряжения вдоль линии в зависимости от координаты x с графиком изменения напряжения в начале линии в зависимости от времени t (рис. 17.5). Кривые напряжения на обоих графиках имеют одинаковую форму, что нетрудно увидеть, если предположить, что линия имеет большую длину, и продолжить график распределения напряжения до точки $x_0 = vt$ (см. рис. 17.4), до которой могла бы распространиться волна к рассматриваемому моменту времени $t = 0,6$ с.

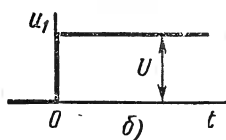
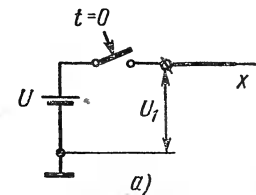


Рис. 17.6

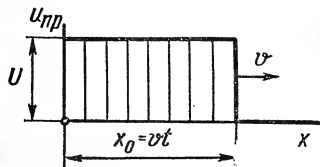


Рис. 17.7

Аналогия графиков напряжения $u_{\text{пр}}(x)$ и $u_1(t)$ носит более общий характер. При надлежащем выборе масштабов для аргументов кривая распределения напряжения вдоль линии (в зависимости от координаты $\xi = vt - x$) должна полностью совпадать с кривой зависимости напряжения в начале линии от времени t . Для этого достаточно выбрать масштаб для расстояний так, чтобы $m_\xi = vt$, где m_t — масштаб времени.

Если линия присоединяется к источнику постоянной э. д. с. $\mathcal{E} = U$ (рис. 17.6, а), то напряжение в начале линии до момента включения ($t < 0$) равно нулю, а после включения ($t \geq 0$) равно U (рис. 17.6, б). Поэтому распространяющаяся по линии волна имеет форму импульса бесконечной длины с прямоугольным фронтом (рис. 17.7).

§ 17.3. Ток и напряжение в конце линии

Расчетные уравнения для напряжений и тока в конце линии могут быть получены из уравнений (17.12), справедливых для любой точки линии:

$$i_{\text{пр}} = u_{\text{пр}}/z_c; \quad i_{\text{обр}} = u_{\text{обр}}/z_c.$$

Тогда согласно (17.13) и (17.14)

$$i = i_{\text{пр}} - i_{\text{обр}} = (u_{\text{пр}}/z_c) - (u_{\text{обр}}/z_c);$$

$$z_c i = u_{\text{пр}} - u_{\text{обр}};$$

$$u = u_{\text{пр}} + u_{\text{обр}}.$$

Почленное сложение последних двух уравнений дает

$$2u_{\text{пр}} = u + z_c i.$$

В дальнейшем токи и напряжения в конце линии будут отмечаться индексом 2, а в начале линии — индексом 1 (рис. 17.8). Например, если последнее уравнение, справедливое для любой точки линии, должно быть использовано для конца линии, то его можно переписать следующим образом:

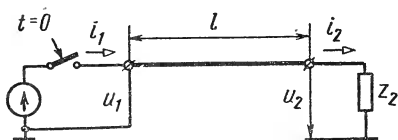


Рис. 17.8

$$2u_{2\text{пр}} = u_2 + z_c i_2, \quad (17.17)$$

где $u_{2\text{пр}}$ — напряжение прямой волны в конце линии; i_2 — ток в конце линии; u_2 — напряжение в конце линии.

Уравнения (17.17) недостаточны для определения тока и напряжения, так как в него входят две неизвестные величины (u_2 и i_2). Дополнительное условие, связывающее неизвестные, зависит от нагрузки. Например, для активной нагрузки

$$u_2 = r i_2, \quad (17.18)$$

где r — сопротивление нагрузки.

Расчетные уравнения для этого случая принимают вид

$$i_2 = \frac{2u_{2\text{пр}}}{z_c + r}; \quad (17.19)$$

$$u_2 = \frac{2r}{z_c + r} u_{2\text{пр}}. \quad (17.20)$$

Уравнение (17.20) можно записать в виде

$$u_2 = n u_{2\text{пр}},$$

где

$$n = \frac{u_2}{u_{2\text{пр}}} = \frac{2r}{z_c + r} \quad (17.21)$$

— коэффициент преломления.

Если к концу линии (рис. 17.8) присоединены индуктивность и емкость, то расчет удобнее вести исходя из схемы замещения (рис. 17.9), соответствующей уравнению (17.17). При этом уравнения могут быть записаны аналогично (17.19) и (17.20) только для изображений:

$$I_2(p) = \frac{2U_{2\text{пр}}(p)}{Z_c(p) + Z_2(p)}; \quad U_2(p) = \frac{2Z_2(p)}{Z_c(p) + Z_2(p)} U_{2\text{пр}}(p).$$

Коэффициент преломления в общем случае

$$N(p) = \frac{U_2(p)}{U_{2\text{пр}}(p)} = \frac{2Z_2(p)}{Z_c(p) + Z_2(p)}. \quad (17.22)$$

При использовании схемы рис. 17.9 следует помнить, что токи и напряжения в ней появляются не сразу после замыкания ключа в начале линии, а только после распространения прямой волны по всей линии. Поэтому при расчете схемы замещения отсчет времени удобнее начинать с момента прихода прямой волны к концу линии ($t = l/v$). Время, отсчитываемое от этого момента, $\theta = t - l/v$.

Согласно (17.16), напряжение прямой волны в конце линии

$$u_{2\text{пр}} = u_1(t - l/v) = u_1(\theta). \quad (17.23)$$

Таким образом, схема замещения для расчета напряжений и токов в конце линии имеет вид, изображенный на рис. 17.10.

Для составления схемы замещения необходимо: а) последовательно с сопротивлением нагрузки, включенным в конце линии, соединить активное (сосредоточенное) сопротивление, равное характеристическому сопротивлению линии; б) при помощи ключа подключить генератор с напряжением, равным двойному напряжению в начале линии, в момент прихода падающей волны, к концу линии, когда $\theta = 0$.

Схема на рис. 17.10 позволяет свести расчет переходных процессов в цепи с распределенными параметрами к расчету переходных процессов в цепи с сосредоточенными параметрами.

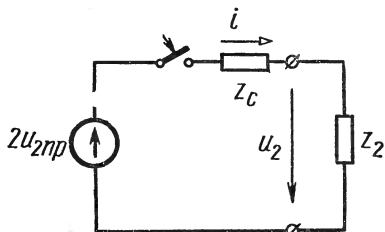


Рис. 17.9

Пример 17.2. Определить ток и напряжение в конце линии длиной l с характеристическим сопротивлением z_c . В конце линии присоединена индуктивность L . Напряжение в начале линии $u = U_0 e^{-\alpha t}$.

Решение. Составим схему замещения (рис. 17.11) и рассчитаем ее так же, как и схему цепи с сосредоточенными параметрами. Для этой схемы

$$Z(p) = z_c + pL;$$

$$Z(-\alpha) = z_c - \alpha L$$

и производная $Z'(p) = L$.

Корень уравнения $Z(p) = 0$ равен $p_1 = -z_c/L$.

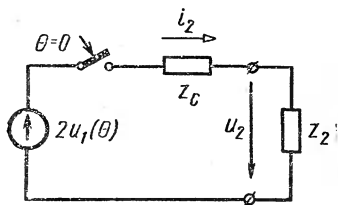


Рис. 17.10

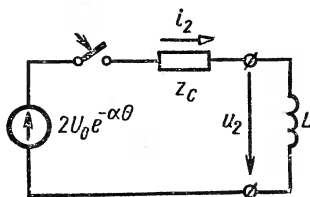


Рис. 17.11

Для экспоненциального напряжения согласно теореме разложения получим

$$i_2 = \frac{2U_0 e^{-\alpha \theta}}{Z(-\alpha)} + \frac{2U_0 e^{\alpha_1 \theta}}{(p_1 + \alpha) Z'(p)} = \frac{2U_0 e^{-\alpha \theta}}{z_c - \alpha L} + \frac{2U_0 e^{-\frac{z_c}{L} \theta}}{\left(\alpha - \frac{z_c}{L}\right) L}$$

или

$$i_2 = \frac{2U_0}{z_c - \alpha L} \left[e^{-\alpha \left(t - \frac{l}{v}\right)} - e^{-\frac{z_c}{L} \left(t - \frac{l}{v}\right)} \right].$$

Как видно из рис. 17.11, напряжение в конце линии

$$\begin{aligned} u_2 &= 2u_1 - z_c i_2 = 2U_0 e^{-\alpha \theta} - 2U_0 \frac{z_c}{z_c - \alpha L} \left(e^{-\alpha \theta} - e^{-\frac{z_c}{L} \theta} \right) = \\ &= 2U_0 \left(\frac{\alpha L}{\alpha L - z_c} e^{-\alpha \theta} - \frac{z_c}{\alpha L - z_c} e^{-\frac{z_c}{L} \theta} \right) \end{aligned}$$

или

$$u_2 = 2U_0 \left[\frac{\alpha}{\alpha - \frac{z_c}{L}} e^{-\alpha \left(t - \frac{l}{v}\right)} - \frac{\frac{z_c}{L}}{\alpha - \frac{z_c}{L}} e^{-\frac{z_c}{L} \left(t - \frac{l}{v}\right)} \right].$$

§ 17.4. Расчет напряжения обратной волны

В общем виде напряжение обратной волны в конце линии ($x = l$) согласно (17.9)

$$u_{2\text{обп}} = f_2 \left(t + \frac{l}{v} + \tau_2 \right). \quad (17.24)$$

Это напряжение может быть определено из схемы замещения по уравнению (17.13):

$$u_{2\text{обп}} = u_2 - u_{2\text{пр}}. \quad (17.25)$$

Напряжение в конце линии начинает изменяться только после прихода прямой волны. Поэтому напряжение (17.25) получается в виде функции

$$u_{2обр} = f_2(\theta) \quad (17.26)$$

от переменной

$$\theta = t - \frac{l}{v} = t + \frac{l}{v} - \frac{2l}{v}. \quad (17.27)$$

Из уравнений (17.24), (17.26) и (17.27) следует, что в данном случае $\tau_2 = -2l/v$.

Сравнение выражений (17.9), (17.26) и (17.27) позволяет сделать следующий вывод. Если известно уравнение напряжения обратной волны в конце линии в виде функции

$$u_{2обр} = u_{2обр}(\theta), \quad (17.28)$$

то для получения $u_{обр}$ в любой точке, находящейся на расстоянии x от начала линии, необходимо заменить переменную $\theta = t - l/v$ переменной $t + x/v - 2l/v$, т. е.

$$u_{обр} = u_{2обр} \left(t + \frac{x}{v} - \frac{2l}{v} \right). \quad (17.29)$$

Пример 17.3. Определить напряжение обратной волны по данным примера 17.2.

Решение. В примере 17.2 было получено выражение

$$u_2 = 2U_0 \left(\frac{\alpha L}{\alpha L - z_c} e^{-\alpha \theta} - \frac{z_c}{\alpha L - z_c} e^{-\frac{z_c}{L} \theta} \right)$$

при

$$u_{2пр} = U_0 e^{-\alpha \theta};$$

поэтому

$$u_{2обр} = u_2 - u_{2пр} = U_0 \left(\frac{\alpha L + z_c}{\alpha L - z_c} e^{-\alpha \theta} - \frac{2z_c}{\alpha L - z_c} e^{-\frac{z_c}{L} \theta} \right) = u_{2обр}(\theta).$$

Следовательно,

$$u_{обр} = u_{2обр} \left(t + \frac{x}{v} - \frac{2l}{v} \right) = U_0 \left[\frac{\alpha L + z_c}{\alpha L - z_c} e^{-\alpha \left(t + \frac{x}{v} - \frac{2l}{v} \right)} - \frac{2z_c}{\alpha L - z_c} e^{-\frac{z_c}{L} \left(t + \frac{x}{v} - \frac{2l}{v} \right)} \right].$$

Уравнение (17.29) позволяет найти расчетным путем напряжения и ток обратной волны в любой момент времени $\left(t > \frac{l}{v} \right)$ и в любой точке линии $(2l - vt < x < vt)$. При этом необходимо помнить, что в уравнении (17.29) расстояние x отсчитывается от начала линии (исходной точки движения прямой волны), а время t — от момента начала движения прямой волны.

Иногда при расчетах и построениях графиков обратных волн расстояния y отсчитывают от конца первой линии в сторону ее

начала, а время θ — от момента начала движения обратной волны. Уравнение обратной волны в новой системе координат может быть получено из уравнения (17.29) после подстановки в него $x = l - y$ и $\theta = t - l/v$.

В результате этого уравнение обратной волны примет вид

$$u_{обр} = u_{2обр} \left(\theta - \frac{y}{v} \right). \quad (17.30)$$

Сравнение выражений (17.30) и (17.28) показывает, что в новой системе координат переход от напряжения обратной волны в конце линии к напряжению этой волны в любой точке осуществляется заменой аргумента θ на $\theta - y/v$, т. е. аналогичен переходу от напряжения прямой волны в начале линии к напряжению прямой волны в любой точке. В случае прямой волны переход связан с заменой аргумента t на $t - x/v$ в соответствии с уравнением (17.16).

Таким образом, если время t отсчитывать всегда с момента начала движения рассматриваемой волны от какой-либо точки, а расстояния x откладывать по направлению движения волны от той же точки, то можно сформулировать общее правило для определения закона изменения волны: *если в начальной точке движения ($x = 0$) волна изменяется во времени по закону $f(t)$, то в точке, находящейся от исходной на расстоянии x , волна будет изменяться по закону $f(\tau)$; где $\tau = t - x/v$; v — скорость движения волны в линии; $x < vt$.*

Это правило можно применить как для расчета прямых, так и обратных волн, а также для волн, возникающих при последовательном соединении нескольких линий. При этом для каждой волны следует выбирать свою систему отсчета расстояний и времени.

Если источник энергии включен в начале линии ($x = 0$), то непосредственным источником энергии для обратной волны может быть только энергия, доставляемая к концу линии ($x = l$) прямой волной. Действительно, мощность в нагрузке

$$p_2 = u_2 i_2 = (u_{2пр} + u_{2обр}) \frac{u_{2пр} - u_{2обр}}{z_c} = \frac{u_{2пр}^2}{z_c} - \frac{u_{2обр}^2}{z_c} = p_{2пр} - p_{2обр},$$

где $p_{2пр}$ и $p_{2обр}$ — соответственно мощности прямой и обратной волн в конце линии.

Следовательно, $p_{2обр} = p_{2пр} - p_2$, т. е. обратная волна возникает в результате того, что нагрузка не поглощает всю электромагнитную энергию, приносимую прямой волной. Поэтому в данных условиях прямую волну называют падающей, а обратную — отраженной.

В случае активной нагрузки (r) в конце линии для нахождения напряжения отраженной волны используют коэффициент отражения

$$m = u_{2отр}/u_{2пад} = i_{2отр}/i_{2пад}.$$

Из уравнений (17.13) и (17.20) определяем

$$u_{2\text{отр}} = u_2 - u_{2\text{пад}} = \frac{2r}{z_c + r} u_{2\text{пад}} - u_{2\text{пад}} = \frac{r - z_c}{r + z_c} u_{2\text{пад}}.$$

Из уравнений (17.14) и (17.19) можно убедиться, что

$$i_{2\text{отр}} = i_{2\text{пад}} - i_2 = i_{2\text{пад}} - \frac{2z_c}{z_c + r} i_{2\text{пад}} = \frac{r - z_c}{r + z_c} i_{2\text{пад}}.$$

Таким образом,

$$m = \frac{r - z_c}{r + z_c}. \quad (17.31)$$

Ранее отмечалось, что график напряжения падающей волны в конце линии, построенный в зависимости от времени t , совпадает с графиком напряжения в начале линии, если по оси абсцисс отложить функцию времени $\theta: u_{2\text{пад}} = u_1(\theta)$. Поэтому напряжение (ток) отраженной волны в конце линии

$$u_{2\text{отр}} = m u_{2\text{пад}} = m u_1(\theta)$$

может быть получено пропорциональным изменением напряжения (тока) в начале линии в соответствии с величиной коэффициента отражения.

При коротком замыкании на конце линии ($r=0$) $m=-1$, т. е. отраженная волна в конце линии равна по величине падающей волне и противоположна ей по знаку. При разомкнутом конце линии ($r=\infty$) $m=1$, т. е. отраженная волна в конце линии равна и по величине и по знаку падающей волне. При согласованной нагрузке ($r=z_c$) отраженные волны отсутствуют ($m=0$).

Следовательно, переходные процессы в линии связаны с распространением падающих и отраженных волн. Форма падающей волны напряжения при включении линии определяется напряжением источника энергии в начале линии, форма отраженной волны напряжения — законом изменения напряжения отраженной волны в конце линии. Напряжение отраженной волны может быть найдено из расчета схемы замещения линии. Как уже отмечалось, ток и напряжение падающей (отраженной) волны связаны выражением, аналогичным закону Ома, причем в качестве сопротивления следует взять волновое сопротивление линии z_c . Результирующие напряжения и токи в каждой точке линии подсчитывают суммированием напряжений и вычитанием токов падающей и отраженной волн.

В общем случае, когда источники энергии, сосредоточенные индуктивности и емкости, а также прямые и обратные волны имеются и в начале и в конце линии, коэффициентами отражения

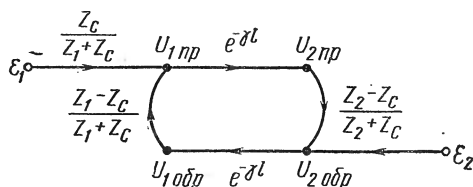


Рис. 17.12

можно пользоваться только в операторной форме; причем коэффициент отражения для начала и конца линии соответственно

$$M_1(p) = \frac{Z_1(p) - Z_c(p)}{Z_1(p) + Z_c(p)};$$

$$M_2(p) = \frac{Z_2(p) - Z_c(p)}{Z_2(p) + Z_c(p)},$$

где $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ — входные сопротивления эквивалентных активных двухполюсников в начале и конце линии*. При этом результирующие значения напряжений прямых и обратных волн можно найти с помощью графа на рис. 17.12, где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — эквивалентные э. д. с. активных двухполюсников в начале и конце линии.

§ 17.5. Переход волн с одной линии на другую

Очень часто воздушная линия переходит в кабельную, и наоборот. Такой переход возможен при пересечении линий связи с высоковольтными или железнодорожными линиями, на подходах воздушных линий генераторного напряжения к электрическим станциям (иногда это делается для ограничения перенапряжений). В этих

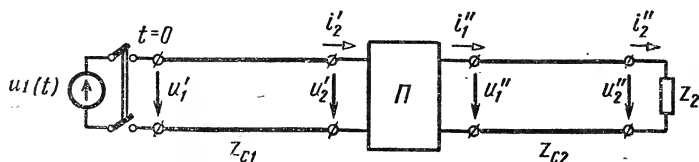


Рис. 17.13

и подобных случаях две линии с разными волновыми сопротивлениями оказываются включенными последовательно. Волна, движущаяся по одной из линий, попадая на другую, изменяет свою амплитуду (преломляется) и частично отражается от места соединения линий. В том месте, где линии соединяются, включают элементы с сосредоточенными постоянными: индуктивные катушки, конденсаторы и резисторы. Их назначение может быть самым различным: ограничение перенапряжений, токов короткого замыкания или уменьшение искажений, увеличение пропускной способности линий (дальних энергопередач) и др. Учесть такие элементы при расчете переходных процессов в цепях с распределенными постоянными можно, если в точках соединения двух линий с волновыми сопротивлениями z_{c1} и z_{c2} включить четырехполюсник Π с сосредоточенными параметрами (рис. 17.13).

Напряжение и ток на входе четырехполюсника связаны с напряжением падающей волны в конце линии уравнением (17.17)**

$$Z_{\text{вх}} u'_2 = z_{c1} i'_2 + u'_2. \quad (17.32)$$

* Для линии без потерь $Z_c(p) = z_c$.

** Все величины, кроме волнового сопротивления и длины, относящиеся к первой линии, обозначаются с одним штрихом, а ко второй — двумя штрихами.

На выходе четырехполюсника до появления волн, отраженных от конца второй линии, напряжения и ток связаны формулой

$$u_1'' = i_1'' z_{c2}. \quad (17.33)$$

Уравнения (17.32) и (17.33) позволяют составить простую расчетную схему (рис. 17.14) для определения токов и напряжений в месте соединения первой и второй линий. Эта схема получается путем присоединения к входным зажимам четырехполюсника через активное сопротивление z_{c1} источника с удвоенным напряжением $2u_1$ в начале первой линии, а к выходным зажимам — активного сопротивления z_{c2} . В данной схеме время $\theta' = t' - l_1/v'$ отсчитывается с момента прихода падающей волны к четырехполюснику. В расчетную схему не входит сопротивление нагрузки второй линии Z_2 , так как эта схема пригодна только до момента появления у четырехполюсника отраженных волн от конца второй линии.

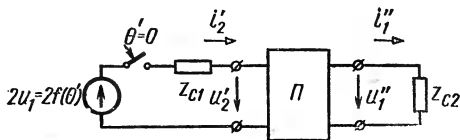


Рис. 17.14

Если к выходным зажимам четырехполюсника присоединено несколько различных линий, то в расчетной схеме каждая из них заменяется волновым сопротивлением, присоединенным к выходу четырехполюсника параллельно волновым сопротивлениям остальных линий.

Расчетная схема для точки соединения линий дает возможность свести расчет цепи на рис. 17.13 к расчету цепи на рис. 17.14. Для определения четырех неизвестных токов и напряжений расчетной схемы в общем случае (17.33) следует рассмотреть еще два уравнения четырехполюсника:

$$U_2' = AU_1'' + BI_1'';$$

$$I_2' = CU_1'' + DI_1''.$$

Для практических расчетов вместо общей схемы четырехполюсника рассматривают конкретную схему (рис. 17.14), которую рассчитывают как единое целое. Расчет упрощается, если в четырехполюсник Π не входят индуктивность и емкость. В этом случае для определения отраженной волны можно воспользоваться формулой (17.31), если в ней заменить r на входное сопротивление нагруженного четырехполюсника r_{11} :

$$m = \frac{u_{2\text{отр}}'}{u_{2\text{пад}}'} = \frac{r_{11} - z_{c1}}{r_{11} + z_{c1}}. \quad (17.34)$$

При этом напряжение на входе четырехполюсника будет определяться коэффициентом преломления

$$n' = \frac{u_2'}{u_{2\text{пад}}'} = \frac{2r_{11}}{r_{11} + z_{c1}}, \quad (17.35)$$

а на выходе четырехполосника — коэффициентом преломления

$$n'' = u_1''/u_{2\text{пад}}'$$

Если конец первой линии непосредственно соединен с началом второй линии, то $r_{11} = z_{c2}$. Следовательно,

$$m = \frac{z_{c2} - z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}};$$

$$n = n' = n'' = \frac{2z_{c2}}{z_{c2} + z_{c1}}.$$

Пусть в этом случае начало первой линии присоединяется к источнику э. д. с. с напряжением $u_1' = f(t')$. Тогда

$$u_{\text{пад}}' = f\left(t' - \frac{x'}{v'}\right); \quad (17.36)$$

$$u_{\text{отр}}' = mf\left(t' - \frac{x'}{v'}\right); \quad (17.37)$$

$$u_{\text{пад}}'' = n''f\left(t'' - \frac{x''}{v''}\right), \quad (17.38)$$

где расстояние x'' отсчитывают от начала второй линии, а время $t'' = \theta'$ — от момента появления напряжения в начале второй линии. Сопоставление уравнений (17.36), (17.37) и (17.38) показывает, что волна, появляющаяся во второй линии, как и отраженная волна, имеет ту же форму, что и создающая ее падающая волна первой линии; все волны отличаются только амплитудами. Если $z_{c1} > z_{c2}$, то отраженная волна имеет знак, противоположный падающей, а преломленная волна меньше падающей волны. Если $z_{c1} < z_{c2}$, то отраженная и падающая волны имеют одинаковые знаки, но преломленная волна больше падающей (при $n' = n''$).

Пример 17.4. Прямоугольная волна с амплитудой $U = 100$ кВ переходит с воздушной линии с $z_{c1} = 400$ Ом через сопротивление R на две кабельные

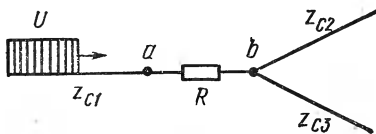


Рис. 17.15

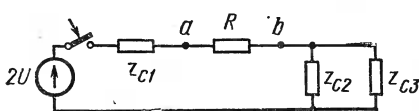


Рис. 17.16

линии с $z_{c2} = z_{c3} = 50$ Ом (рис. 17.15). Определить сопротивление R , при котором в воздушной линии отсутствуют отраженные волны, а также амплитуду падающих волн в кабелях при наличии и отсутствии этого сопротивления.

Решение. Как видно из схемы на рис. 17.16, эквивалентное сопротивление в конце первой линии

$$r = R + \frac{z_{c2}z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}}.$$

Отражение в воздушной линии отсутствует, если $r = z_{c1}$, так как в этом случае коэффициент отражения

$$m = \frac{r - z_{c1}}{r + z_{c1}} = 0.$$

Найдем искомое значение сопротивления:

$$R = z_{c1} - \frac{z_{c2} z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}} = 400 - \frac{50 \cdot 50}{50 + 50} = 375 \text{ Ом.}$$

Напряжение падающих волн в кабелях до прихода волн, отраженных от их концов, определяется напряжением в узловой точке b .

Из расчетной схемы

$$u_{\text{пад}} = 2U \frac{\frac{z_{c2} z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}}}{z_{c1} + R + \frac{z_{c2} z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}}} = 200 \frac{25}{400 + 375 + 25} = 6,25 \text{ кВ.}$$

При $R = 0$

$$u_{\text{пад}} = 200 \frac{25}{400 + 25} = 11,8 \text{ кВ.}$$

Если требуется определить напряжения в месте перехода с одной линии на другую с учетом напряжения обратной волны во второй линии, то такая задача может быть решена методом

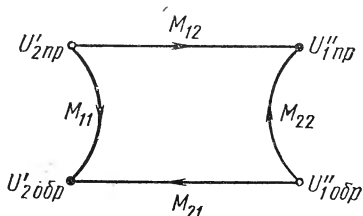


Рис. 17.17

наложения, причем коэффициентами отражения и преломления в общем случае можно пользоваться только в операторной форме:

$$M_{11}(p) = \left[\frac{U'_{2\text{отр}}(p)}{U'_{2\text{пр}}(p)} \right] U''_{1\text{отр}} = 0; \quad M_{12}(p) = \left[\frac{U''_{1\text{пр}}(p)}{U'_{2\text{пр}}(p)} \right] U''_{1\text{отр}} = 0;$$

$$M_{22}(p) = \left[\frac{U'_{1\text{пр}}(p)}{U'_{1\text{отр}}(p)} \right] U'_{2\text{пр}} = 0; \quad M_{21}(p) = \left[\frac{U'_{2\text{отр}}(p)}{U'_{1\text{отр}}(p)} \right] U'_{2\text{пр}} = 0.$$

Параметры M_{jk} называются волновыми коэффициентами. Соотношения между амплитудами прямых и обратных волн в переходном устройстве (Π) в общем случае показаны на графе рис. 17.17. Когда n разных линий соединены в общий узел, связь между ними описывается матрицей волновых коэффициентов из n строк и n столбцов.

§ 17.6. Волны в линиях при включении и отключении ветвей

Волны в линиях при включении новых ветвей. Волны возникают не только в том случае, когда к линии подключают источник энергии, но также при включении или отключении отдельных ветвей, расположенных в различных точках электрической цепи, например в конце или середине линии.

Задачи, связанные с включением новой ветви, решают методом наложения. При этом токи и напряжения в линии и ветвях, соединенных с ней, находятся путем наложения токов и напряжений, имеющих до включения, на соответствующие токи и напряжения, возникающие в цепи после включения источника с напряжением, равным напряжению на разомкнутом ключе.

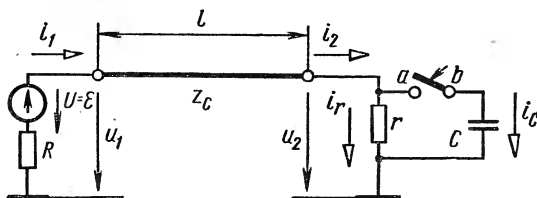


Рис. 17.18

Примером может служить цепь (рис. 17.18), в которой линия длиной l с волновым сопротивлением z_c и током нагрузки $I_n = \frac{U}{r+R}$ находится под напряжением $\frac{r}{r+R}U$. К концу такой линии подключается конденсатор с емкостью C .

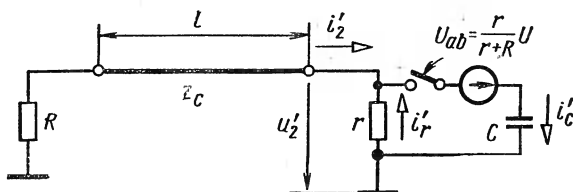


Рис. 17.19

Для этой цепи при незамкнутом ключе

$$i_{20} = i_{r0} = \frac{U}{r+R} = I_n; \quad i_{c0} = 0; \quad u_{20} = \frac{r}{r+R} U.$$

Вторые составляющие напряжений и токов в соответствующих ветвях получают при расчете цепи на рис. 17.19. Обоснование изложенного метода расчета аналогично доказательству теоремы об активном двухполуснике.

Для определения вторых составляющих токов и напряжений используют расчетную эквивалентную схему с сосредоточенными параметрами на рис. 17.3, в которой вблизи ключа присоединяется вместо линии активное сопротивление z_c . Так, эквивалентная схема для токов и напряжений в конце линии (рис. 17.19) имеет вид, изображенный на рис. 17.20.

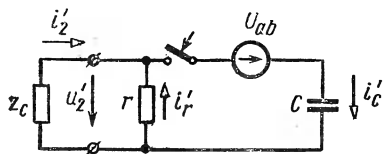


Рис. 17.20

сто линии активное сопротивление z_c . Так, эквивалентная схема для токов и напряжений в конце линии (рис. 17.19) имеет вид, изображенный на рис. 17.20.

Напряжения и токи, найденные из расчета эквивалентной схемы, позволяют определить напряжение и ток падающих волн, распространяющихся от того конца линии, который соединен с ключом непосредственно или через ветви с сосредоточенными параметрами. Алгебраически сложив напряжение и токи этих волн с напряжениями и токами, имевшимися до коммутации, можно получить распределение токов и напряжений вдоль линии.

Пример 17.5. Линия без потерь длиной $l=400$ м и с волновым сопротивлением $z_c=500$ Ом питает сопротивление нагрузки $r=300$ Ом от генератора с источником э. д. с. $\mathcal{E}=2000$ В, включенного последовательно с сопротивлением $R=100$ Ом (см. рис. 17.18). Определить распределение тока и напряжения вдоль линии спустя 1 мс после включения емкости $C=2,667$ нФ.

Решение. До коммутации

$$i_{20}=i_{10}=i_{r0}=\frac{\mathcal{E}}{r+R}=\frac{2000}{100+300}=5 \text{ А}; i_{c0}=0;$$

$$u_{10}=u_{20}=\frac{r}{r+R} \mathcal{E}=\frac{300}{300+100} 2000=1500 \text{ В}.$$

Дополнительные токи и напряжения, появляющиеся после коммутации, определим из схем на рис. 17.19 и 17.20 при условии, что

$$u_{ab}=\frac{r}{r+R} \mathcal{E}=1500 \text{ В}.$$

Входное операторное сопротивление

$$Z(p)=\frac{1}{pC}+\frac{rz_c}{r+z_c}.$$

Ток

$$I_2(p)=\frac{r}{r+z_c} I_c(p)=\frac{U_{ab}(p)}{\frac{r+z_c}{r} Z(p)}=\frac{U_{ab}(p)}{Z_1(p)},$$

где

$$Z_1(p)=Z(p)\frac{r+z_c}{r}=z_c+\frac{r+z_c}{rpC}.$$

Корень уравнения $Z_1(p)=0$

$$p_1=-\frac{r+z_c}{rz_cC}=-\frac{300+500}{300 \cdot 500 \cdot 2,667 \cdot 10^{-9}}=-2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

При этом

$$p_1 Z'_1(p_1)=-p_1 \frac{r+z_c}{rp_1^2 C}=z_c; Z_1(0)=\infty.$$

Ток после присоединения конденсатора найдем по формуле включения

$$i'_2=\frac{U_{ab}}{Z_1(0)}+\frac{U_{ab}}{p_1 Z'_1(p_1)} e^{p_1 t}=\frac{U_{ab}}{z_c} e^{p_1 t}=3e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ А}.$$

Дополнительное напряжение в конце линии

$$u'_3=-z_c i'_2=-1500e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ В}$$

взято с отрицательным знаком в соответствии с положительными направлениями токов и напряжений, изображенных на рис. 17.20.

Появление дополнительного напряжения u'_2 в конце линии обуславливает распространение вдоль линии волн:

$$u'_{\text{пад}} = -1500e^{-2 \cdot 10^8 \left(t - \frac{x}{v}\right)} \text{ В;}$$

$$i'_{\text{пад}} = \frac{u'_{\text{пад}}}{z_c} = -3e^{-2 \cdot 10^8 \left(t - \frac{x}{v}\right)} \text{ А,}$$

где $v = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, а расстояния x отсчитываются от конца линии.

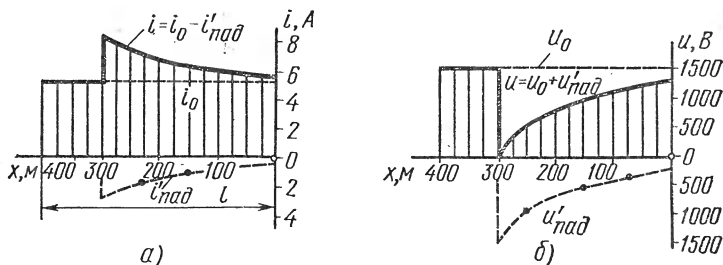


Рис. 17.21

Распределение токов (рис. 17.21, а) и напряжений (рис. 17.21, б) получено суммированием: $u = u_0 + u'_{\text{пад}}$, $i = i_0 - i'_{\text{пад}}$.

Волны в линиях при отключении ветвей. Переходные процессы, возникающие в линии при отключении ветвей, определяются как

результат наложения на токи и напряжения линии до коммутации дополнительных токов, которые возникают в результате коммутации. Дополнительные токи находятся как результат включения источника с током, равным по величине и противоположному по направлению току до отключения. Этот

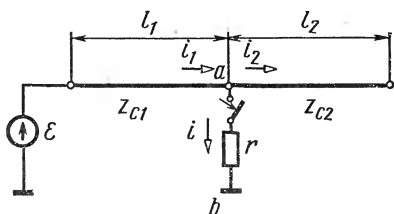


Рис. 17.22

прием можно использовать только в тех случаях, когда отключение не сопровождается разрывом ветви с током в индуктивности.

Пример 17.6. Две последовательно соединенные линии одинаковой длины и волновыми сопротивлениями $z_{c1} = 300$ Ом, $z_{c2} = 500$ Ом присоединены к источнику постоянной э. д. с. $\mathcal{E} = 1600$ В. Конец второй линии разомкнут (рис. 17.22). В месте соединения линий сопротивление $r = 400$ Ом отключается. Найти распределение тока и напряжения для момента времени, при котором возникающие волны распространятся до середины обеих линий.

Решение. До коммутации первая и вторая линии находились под одинаковым напряжением $u_{10} = u_{20} = \mathcal{E} = 1600$ В. Ток в первой линии и сопротивлении r $i_{10} = i_0 = \mathcal{E}/r = 4$ А. Во второй линии ток отсутствует: $i_{20} = 0$.

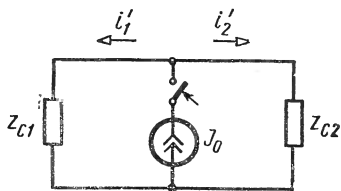


Рис. 17.23

Для определения дополнительных токов и напряжений, возникающих после коммутации, подключим к месту соединений линий источник тока $i' = J_0 = 4$ А.

Токи в линиях в месте соединения найдем из эквивалентной схемы (рис. 17.23):

$$i'_1 = \frac{z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} J_0 = \frac{500}{300 + 500} 4 = 2,5 \text{ А};$$

$$i'_2 = J_0 - i'_1 = 1,5 \text{ А}.$$

Таким образом, после отключения сопротивления r по первой линии начнет распространяться волна тока с амплитудой $i'_1 = 2,5$ А, а по второй линии — $i'_2 = 1,5$ А. Соответственно волны напряжений будут иметь одинаковые амплитуды:

$$u'_1 = z_{c1} i'_1 = 750 \text{ В};$$

$$u'_2 = z_{c2} i'_2 = 750 \text{ В}.$$

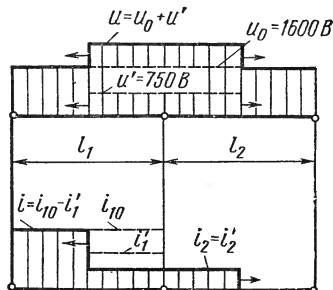


Рис. 17.24

В тех точках линий, до которых дошли вызванные коммутацией волны, напряжение $u = u_0 + u' = 2350$ В, а токи: $i_1 = i_{10} - i'_1 = 1,5$ А; $i_2 = i_{20} + i'_2 = 1,5$ А.

Кривые распределения токов и напряжений вдоль линий приведены на рис. 17.24.

§ 17.7. Формирование импульсов с помощью линий

Линии представляют собой цепи с задержкой и обратной связью, величинами и характером которых можно управлять подбором числа линий, волновых коэффициентов и длин. Поэтому цепи с распределенными параметрами можно использовать для формирования (синтеза) импульсов.

Линия, формирующая импульсы, может быть по-

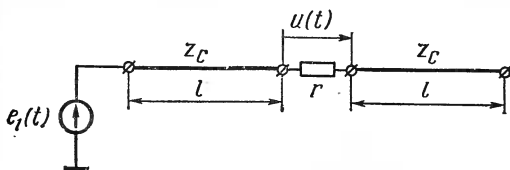


Рис. 17.25

лучена, например, из разомкнутой на конце линии длиной $2l$, если в ее середине включить сопротивление $r = 2z_c$, к началу присоединить источник э. д. с. $e_1(t)$, а импульсное напряжение $u(t)$ снимать с зажимов сопротивления r (рис. 17.25). Прямые и обратные волны такой системы могут быть найдены при рассмотрении графа на рис. 17.26. Передаточная функция

$$H(p) = \frac{U(p)}{\mathcal{E}_1(p)} = \frac{U'_2 - U''_1}{\mathcal{E}_1} = \frac{U'_2 \text{ пр} + U'_2 \text{ обр} - (U''_1 \text{ пр} + U''_1 \text{ обр})}{\mathcal{E}_1} =$$

$$= e^{-pT} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-2pT} \right) + \frac{1}{2} e^{-pT} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-2pT} \right) + \frac{1}{4} e^{-3pT} -$$

$$- \frac{1}{2} e^{-pT} - \frac{1}{2} e^{-3pT} = e^{-pT} - e^{-3pT},$$

где $T = l/v$. Таким образом, если с помощью э. д. с. e_1 создается прямоугольный бесконечный импульс, то напряжение имеет вид

прямоугольного импульса той же амплитуды, но конечной ($2T$) длительности (рис. 17.27), так как начальный импульс ($\mathcal{E}$) через T приходит к узлу $U'_{2пр}$ и в результате создаются два импульса: отраженный $U'_{отр}$ и преломленный $U'_{1пр}$ половинной амплитуды ($\mathcal{E}/2$). Эти импульсы про-

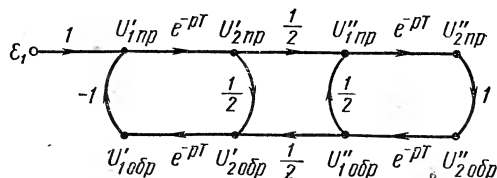


Рис. 17.26

ходят по двум контурам обратной связи графа на рис. 17.26; один из них возвращается в исходную точку ($U'_{2пр}$) с переменной, а другой возвращается в исходную точку ($U'_{1отр}$) без изменения знака. Следовательно, через $3T$ после

включения источника энергии два равных и противоположных импульса достигают точек $U'_{2пр}$, $U'_{1отр}$ и взаимно уничтожаются. После этого система приходит в первоначальное состояние.

Линия может быть превращена в генератор непрерывной последовательности одинаковых импульсов, если ее конец присоединить к реактивной нагрузке. При этом напряжение и ток в линии определяются многократными отражениями прямых и обратных волн. Для количественного анализа явлений в таком квазиустановившемся режиме следует вернуться к общему решению (17.4) уравнений длинной линии, изменив направление отсчета расстояний (x) на противоположное и совместив начало отсчета с нагрузкой. Тогда

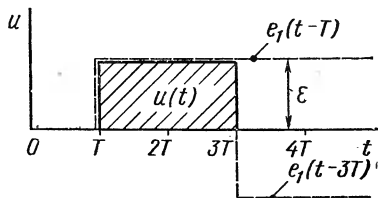


Рис. 17.27

$$\begin{aligned} U &= A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} = \mathcal{E} (e^{\gamma x} + M e^{-\gamma x}), \\ I &= \frac{1}{z_c} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}) = \frac{\mathcal{E}}{z_c} (e^{\gamma x} - M e^{-\gamma x}). \end{aligned} \quad (17.39)$$

Если в начале линии длиной $2l$ включен источник э. д. с. с напряжением $u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_1]$, то из (17.39) при $x=l$

$$U_1 = \mathcal{E} (e^{2\gamma l} + M e^{-2\gamma l}),$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{z_c} (e^{2\gamma l} - M e^{-2\gamma l})$$

и в любой точке линии

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 \frac{e^{\gamma x} + M e^{-\gamma x}}{e^{2\gamma l} + M e^{-2\gamma l}}; \\ I &= I_1 \frac{e^{\gamma x} - M e^{-\gamma x}}{e^{2\gamma l} - M e^{-2\gamma l}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.40)$$

Активная нагрузка. Если линия без потерь ($\gamma = p/v$) нагружена на конце активным сопротивлением, то операторный коэф-

коэффициент отражения

$$M = M(p) = \frac{r - z_c}{r + z_c} = m$$

не содержит оператора p , является вещественным числом и совпадает с коэффициентом отражения (17.31). В точке $x=l$ изображение (17.40)

$$\begin{aligned} U_M &= U_1 \frac{e^{pl/v} + m e^{-pl/v}}{e^{2pl/v} + m e^{-2pl/v}} = \\ &= U_1 e^{-pT} \frac{1 + m e^{-2pT}}{1 + m e^{-4pT}} = U_1 (e^{-pT} + \\ &+ m e^{-3pT} - m e^{-5pT} - m^2 e^{-7pT} + \dots). \end{aligned} \quad (17.41)$$

Следовательно, напряжение в середине линии

$$\begin{aligned} u_M &= u_1(t - T) + m u_1(t - 3T) - \\ &- m u_1(t - 5T) - m^2 u_1(t - 7T) + \dots \end{aligned}$$

представляет собой такую последовательность функций, каждая из которых имеет ту же форму, что напряжение в начале линии, но уменьшена относительно предыдущей в соответствии со значением коэффициента отражения $\pm m$ и сдвинута относительно нее на время пробега волной всей линии ($2T = 2l/v$).

Кривые напряжения в средней точке линии при воздействии на начало линии ступенчатой функции изображены на рис. 17.28, а — д для разных значений m . Все кривые идентичны для первых $3T$.

Из рис. 17.28, а видно, что возбуждаемая источником э. д. с. короткозамкнутая линия резонирует с основной частотой $1/4T$. Рис. 17.28, д показывает, что основная частота ($1/8T$) разомкнутой на конце линии в два раза меньше основной частоты той же короткозамкнутой линии.

Одним из способов получения спектра последовательности прямоугольных импульсов является разложение изображения напряжения (17.40) в ряд при $m=1$ и $U_1(p) = \mathcal{E}/p$ с помощью формулы разложения рациональной дроби на сумму простых

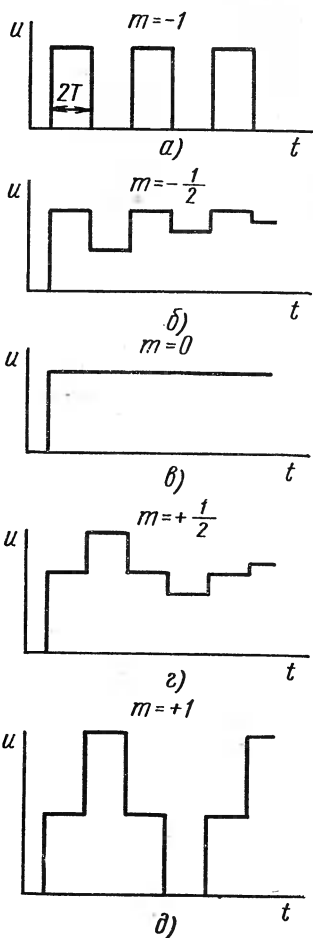


Рис. 17.28

дробей:

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 \frac{e^{px/v} + e^{-px/v}}{e^{2pl/v} + e^{-2pl/v}} = \frac{\mathcal{E} \operatorname{ch} \frac{px}{v}}{p \operatorname{ch} 2 \frac{pl}{v}} = \frac{P(p)}{Q(p)} = \\
 &= \sum_{j=1}^{j=n} \frac{P(p_j)}{(p-p_j) Q'(p_j)} = \mathcal{E} \left[\frac{1}{p} + \frac{\operatorname{ch} \left(j \frac{\pi x}{4l} \right)}{\left(p - j \frac{\pi}{4T} \right) j \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{j\pi}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\operatorname{ch} \left(-j \frac{\pi x}{4l} \right)}{\left(p + j \frac{\pi}{4T} \right) j \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \left(-j \frac{\pi}{2} \right)} + \frac{\operatorname{ch} \left(j3 \frac{\pi x}{4l} \right)}{\left(p - j3 \frac{\pi}{4T} \right) j3 \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \left(j3 \frac{\pi}{2} \right)} - \dots \right] = \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{p}{p^2 + \left(\frac{\pi}{4T} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{4l} - \frac{1}{3} \frac{p}{p^2 + \left(3 \frac{\pi}{4T} \right)^2} \cos \frac{3\pi x}{4l} + \dots \right] \right\},
 \end{aligned}$$

так как $Q'(p) = \operatorname{ch} 2pT + 2pT \operatorname{sh} 2pT$ и корни уравнения $Q(p) = p \operatorname{ch} 2pT = 0$ равны 0, $\pm j\pi/4T$, $\pm j3\pi/4T \dots$. Следовательно, напряжение на линии без потерь с разомкнутым концом

$$u = \mathcal{E} \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{4l} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{4T} \right].$$

Емкостная нагрузка. В этом случае расчет сложнее, так как операторный коэффициент отражения

$$M = \frac{1/pC - z_c}{1/pC + z_c} = -\frac{p - \alpha}{p + \alpha}$$

зависит от оператора p ($\alpha = 1/z_c C$). Например, при подключении начала линии к источнику постоянной э. д. с. $\mathcal{E}$ для определения изображения напряжения на емкости ($x=0$) из уравнения (17.40) аналогично (17.41) можно записать

$$U_2 = U_1 \frac{1+M}{e^{2pT} + M e^{-2pT}} = \mathcal{E} (F_1 e^{-2pT} + F_3 e^{-6pT} + F_5 e^{-10pT} + \dots),$$

где

$$F_1 = F_1(p) = \frac{1+M}{p} = \frac{2\alpha}{p(p+\alpha)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+\alpha} = \mathcal{L} [2(1 - e^{-\alpha t})] = \mathcal{L} [f_1(t)];$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= -MF_1 = \frac{2\alpha(p-\alpha)}{p(p+\alpha)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{2}{p+\alpha} + \frac{4\alpha}{(p+\alpha)^2} = \\
 &= \mathcal{L} \{2[-1 + (1 + 2\alpha t)e^{-\alpha t}]\} = \mathcal{L} [f_3(t)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_5 &= -MF_3 = \frac{2\alpha(p-\alpha)^2}{p(p+\alpha)^4} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+\alpha} - \frac{8\alpha^2}{(p+\alpha)^3} = \\
 &= \mathcal{L} \{2[1 - (1 + 2\alpha^2 t^2)e^{-\alpha t}]\} = \mathcal{L} [f_5(t)]
 \end{aligned}$$

и т. д.

График напряжения на емкости

$$u_2 = \mathcal{E} [f_1(t - 2T) + f_3(t - 6T) + f_5(t - 10T) + \dots]$$

построен на рис. 17.29 при $2\alpha T = 5$. Из графика видно, что в рассматриваемой системе колебания напряжения происходят вблизи значения напряжения источника энергии $\mathcal{E}$, однако амплитуда этих колебаний выходит за пределы 0 и $2\mathcal{E}$.

Емкость, включенная в конце линии, уменьшает основную частоту резонансных колебаний по сравнению с основной частотой разомкнутой линии. Например, при $2\alpha T = 5$ период основной гармоники возрастает с $8T$ до $9,44T$. Количественную оценку этого эффекта в общем

случае, а также для высших гармоник можно провести с помощью уравнения, которое должно выполняться для каждой гармонической составляющей:

$$U_{1\omega} = U_{2\omega} (\cos \beta x - \omega C z_c \sin \beta x).$$

Значения резонансных частот находят из условий, что при резонансной частоте конечное значение напряжения на емкости $U_{2\omega}$ возникает для бесконечно малого напряжения $U_{1\omega}$ источника энергии, т. е. при

$$\cos 2\beta l - \omega C z_c \sin 2\beta l = 0$$

или

$$z_c \omega C = \operatorname{ctg} 2\beta l.$$

Корни этого уравнения соответствуют точкам $P_1, P_2 \dots$ пересечения прямой $z_c \omega C$ с котангенсоидой (рис. 17.30). Из приведенного построения видно, что соответствующие резонансные частоты не образуют гармонического ряда. Для сравнения на рис. 17.30 буквами $Q_1, Q_2, \dots$ обозначены значения резонансных частот в отсутствие емкости.

§ 17.8. Волны в линии без искажения

Если параметры линии связаны соотношением $r_0/\mathcal{L}_0 = g_0/C_0 = \alpha$, то коэффициент распространения (17.3)

$$\gamma = (\alpha + p) \sqrt{L_0 C_0} = \frac{\alpha + p}{v}.$$

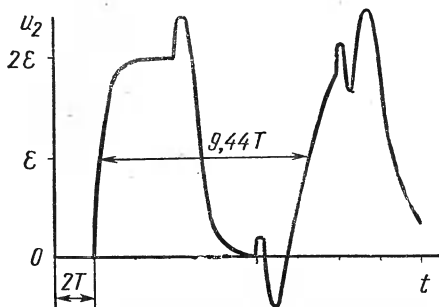


Рис. 17.29

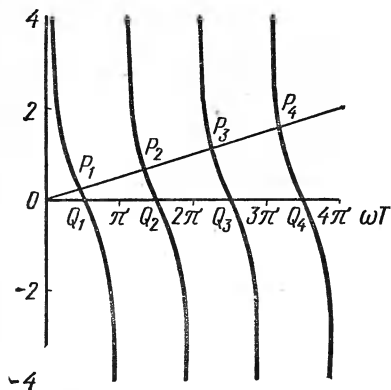


Рис. 17.30

Изображение напряжения в произвольной точке линии при тех же условиях, в которых получено уравнение (17.6),

$$U = A_1 e^{-\gamma x} = U_1 e^{-\frac{\alpha x}{v}} e^{-\frac{px}{v}}.$$

По теореме смещения (17.7), напряжение прямой волны

$$u(t, x) = e^{-\frac{\alpha x}{v}} u_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

или в общем случае

$$u_{\text{пр}} = e^{-\frac{\alpha x}{v}} f_1 \left(t - \frac{x}{v} + \tau_1 \right). \quad (17.42)$$

Аналогичным образом для обратной волны напряжения

$$u_{\text{обр}} = e^{\frac{\alpha x}{v}} f_2 \left(t + \frac{x}{v} + \tau_2 \right). \quad (17.43)$$

Следовательно, обе волны в такой линии распространяются с постоянной скоростью $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ и без изменения формы, но с затуханием, пропорциональным множителю $e^{-\alpha x/v}$ (рис. 17.31).

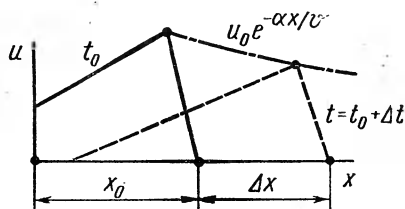


Рис. 17.31

Прямая и обратная волны тока имеют ту же скорость, форму и затухание, что и соответствующие волны напряжения, так как их уравнения (17.46) отличаются друг от друга только на величину волнового сопротивления $z_c = \sqrt{L_0/C_0}$.

Уменьшение амплитуды волн в неискажающей линии тем

больше, чем больше коэффициент затухания $\alpha = \sqrt{r_0 g_0}/v$, и определяется изменением энергии магнитного и электрического полей волны по мере преобразования этой энергии в тепло, выделяющееся в проводах ($r_0 > 0$) и изоляции ($g_0 > 0$).

Строго говоря, линию без потерь нельзя реализовать, так как всякий провод (кабель) обладает конечным сопротивлением. Однако анализ идеализированной линии без потерь дает достаточные для практики результаты в случае коротких хорошо изолированных линий как предельный случай безыскажающей линии, когда изменениями напряжения и тока за счет сопротивления проводов и утечки в изоляции можно пренебречь. Уравнения (17.42) и (17.43) позволяют произвести оценку связанной с этим ошибки.

§ 17.9. Процессы в кабеле без индуктивности и утечки

Кабель без индуктивности и утечки ($g_0 = L_0 = 0$) имеет коэффициент распространения $\gamma = \sqrt{pr_0 C_0} = q \sqrt{p}$, где $q = \sqrt{r_0 C_0}$.

Изображение напряжения прямой волны $U = A_1 e^{-\gamma x} = U_1 e^{-x\sqrt{pr_0 C_0}}$,

Для ступенчатого импульса напряжения в начале линии с амплитудой

$$u_1(t) = \begin{cases} \mathcal{E} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (17.44)$$

изображение напряжения в начале линии

$$U_1 = \int_0^{\infty} \mathcal{E} e^{-pt} dt = \frac{\mathcal{E}}{p}, \quad (17.45)$$

а в точке x

$$U = \mathcal{E} \frac{e^{-xq\sqrt{p}}}{p} = U(p, x) \quad (17.46)$$

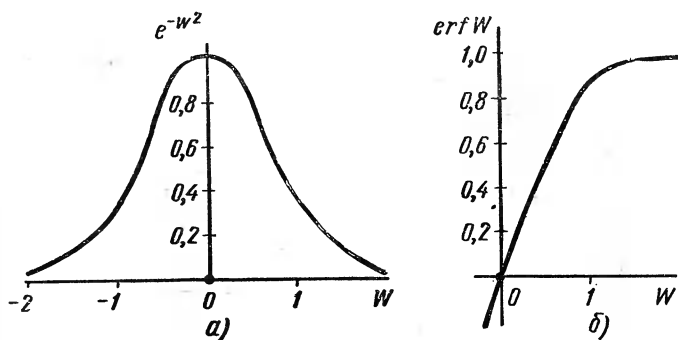


Рис. 17.32

Оригинал этого напряжения можно получить с помощью обратного преобразования Лапласа в плоскости p :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} U(p, x) e^{pt} dp = \frac{\mathcal{E}}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{e^{-qx\sqrt{p}} + pt}{p} dp = \\ &= \mathcal{E} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{qx}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{x^2 q^2}{4t}} d\left(\frac{qx}{2\sqrt{t}}\right) \right] = \mathcal{E} [1 - \operatorname{erf} W], \quad (17.47) \end{aligned}$$

где $W = \frac{x\sqrt{r_0 C_0}}{2\sqrt{t}}$ и

$$\operatorname{erf} W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^W e^{-W^2} dW \quad (17.48)$$

— известный из теории вероятностей интеграл ошибок от функции ошибок Гаусса e^{-W^2} ; функция и интеграл ошибок показаны соответственно на рис. 17.32, а, б.

Уравнение (17.47) является решением известного в математической физике уравнения диффузии

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r_0 C_0 \frac{\partial u}{\partial t} = q^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (17.49)$$

к которому сводятся уравнения длинной линии (12.4) при $g_0 = L_0 = 0$. В этом можно убедиться, если воспользоваться подстановкой

$$W = kxt^{-1/2}$$

и учесть, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial x} = kt^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial W};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k^2 t^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial W^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{2} kxt^{-3/2} \frac{\partial u}{\partial W},$$

где $k(x, t) = \text{const}$. После этого уравнение (17.49) приобретет вид

$$k^2 t^{-1} \frac{d^2 u}{dW^2} + \frac{q^2}{2} kxt^{-3/2} \frac{du}{dW} = 0,$$

или

$$\frac{d^2 u}{dW^2} + \frac{q^2}{2k^2} W \frac{du}{dW} = 0.$$

Если принять $k = q/2$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2 u}{dW^2} + 2W \frac{du}{dW} = 0$$

или

$$\frac{d}{dW} \left(e^{W^2} \frac{du}{dW} \right) = 0,$$

откуда

$$e^{W^2} \frac{du}{dW} = C_2 = \text{const};$$

$$u = C_0 + C_2 \int e^{-W^2} dW = C_0 + C_1 \text{erf } W.$$

При воздействии ступенчатого импульса и нулевых начальных условиях для всех $x > 0$ в начальный момент ($t = 0$) $u = 0$, а в установившемся режиме ($t = \infty$) $u = \mathcal{E}$. Эти условия выполняются при $C_0 = \mathcal{E} = -C_1$, так как $\text{erf } 0 = 0$ и $\text{erf } \infty = 1$. Таким образом, решение (17.48) действительно является решением уравнения диффузии (17.49) при воздействии ступенчатой функции.

Особенности распространения волн в кабеле без индуктивности и утечки легче проследить при воздействии на начало кабеля источника энергии, напряжение которого описывается импульсной

функцией

$$u_1 = u(t, 0) = \mathcal{E}\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \quad (17.50)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Импульсная функция может быть получена дифференцированием по времени ступенчатой функции. Следовательно, изображе-

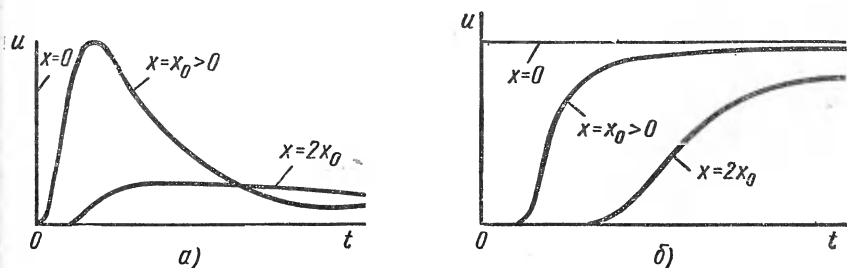


Рис. 17.33

ние напряжения импульсного источника энергии можно получить умножением изображения ступенчатого напряжения (17.45) на p :

$$U_1 = U_1(p) = \mathcal{E} = \mathcal{L}[\mathcal{E}\delta(t)]. \quad (17.51)$$

Так как в данном случае изображение напряжения между жилой и оболочкой кабеля

$$U = U(p, x) = \mathcal{E} e^{-qx\sqrt{p}} \quad (17.52)$$

оказывается в p раз больше изображения (17.46), оригинал изображения (17.50) может быть получен дифференцированием по времени оригинала (17.47) изображения (17.46):

$$u(x, t) = \mathcal{E} \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{qx}{2\sqrt{t}} \right) \right] = \mathcal{E} \frac{q}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x}{t^{3/2}} e^{-q^2 x^2 / 4t}. \quad (17.53)$$

В точке линии, находящейся от ее начала на расстоянии x , напряжение (17.53) достигает максимума при

$$t = \frac{1}{6} q^2 x^2 = t_{\max}, \quad (17.54)$$

а в момент t максимум находится в точке

$$x = \frac{\sqrt{6t}}{q} = x_{\max},$$

причем

$$u_{\max} = u(x, t_{\max}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} e^{-3/2} \frac{\mathcal{E}}{q^2 x^2} = 0,925 \frac{\mathcal{E}}{q^2 x^2}.$$

Скорость распространения максимума напряжения

$$v_{\max} = dx_{\max}/dt = \sqrt{6}/2q\sqrt{t}.$$

«Волна» с напряжением (17.53), образованная в рассматриваемом кабеле коротким импульсом (17.50), обладает свойствами, отличными от свойств волн в линии без искажения: ее амплитуда уменьшается пропорционально x^{-2} , а время достижения максимума (17.54) увеличивается пропорционально x^2 . Таким образом, происходит изменение и формы волны, и ее скорости, причем волна распространяется все более и более медленно. На рис. 17.33, *а* показано изменение напряжения в зависимости от времени в нескольких точках кабеля при воздействии короткого импульса, а на рис. 17.33, *б* — при воздействии ступенчатого импульса бесконечной длительности.

Формула (17.54) обосновывает известный в телеграфии закон RC , который устанавливает обратно пропорциональную зависимость скорости передачи информации (в импульсном режиме) по кабелю длиной l от произведения полной емкости $C = lC_0$ на полное сопротивление $R = lr_0$ (для всего кабеля $T_{\max} = \frac{1}{6} r_0 C_0 l^2 = \frac{1}{6} RC$).

Строго говоря, безындуктивный кабель также не реализуем, как и линия без потерь, поскольку цепь не может быть выполнена без индуктивности. Однако явления, происходящие в нем, представляют интерес как предельный случай такой цепи с распределенными параметрами, у которой $r_0 \gg \omega L_0$ и $g_0 \ll \omega C_0$. В этом случае отклонения от характеристик идеализированного кабеля будут более или менее заметны только для высокочастотных компонент сигнала.

РАЗДЕЛ ШЕСТОЙ

ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ГЛАВА 18

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 18.1. Задачи синтеза электрических цепей

В задачах синтеза определяются схема и параметры электрической цепи по известным свойствам (характеристикам), которым должна удовлетворять цепь. Простейшие задачи синтеза встречались ранее, например синтез цепи по заданной матрице (см. гл. 5 и 8).

Большое практическое значение имеет синтез цепей, удовлетворяющих необходимым частотным и временным характеристикам. Как было показано, частотные и временные характеристики цепи взаимно связаны. Поэтому в общем случае задаются частотными или временными характеристиками; соответственно различают методы синтеза в частотной области (по частотным характеристикам) и методы синтеза во временной области (по временным характеристикам). Здесь рассмотрены только некоторые методы синтеза в частотной области.

При синтезе в частотной области, как правило, бывает задана амплитудно-частотная (АЧХ) или фазо-частотная (ФЧХ) характеристика. По амплитудно-частотным характеристикам синтезируются, например, электрические фильтры; по фазочастотным характеристикам — цепи, осуществляющие задержку импульсов во времени (фазовые контуры с линейной ФЧХ).

Задачи синтеза цепей противоположны задачам анализа. В отличие от задач анализа, имеющих единственное решение, задачи синтеза имеют неоднозначное решение. Кроме того, решения может не существовать, т. е. не всегда по заданной характеристике можно построить цепь.

Если заданным требованиям удовлетворяют ряд цепей (такие цепи называют эквивалентными), то выбор одной из них осуществляется по различным критериям, например, можно отдать предпочтение цепи с минимальным числом элементов. Если четырехполюсник синтезируется по заданной АЧХ, то получаются схемы с неодинаковыми ФЧХ и наиболее желательной может оказаться схема, ФЧХ которой близка к линейной.

В общем случае задача синтеза состоит из двух этапов. На первом этапе (этапе аппроксимации) по заданным требованиям

к частотной характеристике необходимо определить аналитическое выражение схемой функции цепи *. При этом схемная функция должна быть реализуемой, т. е. удовлетворять соответствующим необходимым и достаточным для построения цепи условиям. На втором этапе (этапе реализации) по найденной схемной функции определяют схему и параметры цепи.

Электрические цепи могут состоять из различных элементов (LC , rC , rLC и т. п.), могут отличаться структурой (например, заземленные и незаземленные четырехполюсники). Схемные функции цепей различных классов имеют неодинаковые свойства. Свойства схемных функций определяют *необходимые* условия реализации этих функций. Если по функции, удовлетворяющей некоторым условиям, можно построить хотя бы одну цепь, то соответствующие условия являются *достаточными* для реализации цепи. В случаях, которые будут рассмотрены далее, необходимые и достаточные условия совпадают.

§ 18.2. Общие свойства схемных функций

Полюсы и нули схемных функций. Пусть $H(p)$ — некоторая схемная функция в операторной форме: входное сопротивление, входная проводимость, взаимное сопротивление, взаимная проводимость, коэффициент передачи напряжения или тока **. Функцию $H(p)$ можно рассчитать по топологической формуле (8.15) с помощью операторной схемы при нулевых начальных условиях. Проводимости элементов операторной схемы равны g_k , $1/pL_k$ и pC_k , следовательно, $H(p)$ является дробно-рациональной функцией переменной $p = \sigma + j\omega$, т. е. выражается отношением двух полиномов с вещественными коэффициентами:

$$H(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}. \quad (18.1)$$

Функцию $H(p)$ можно записать также в виде

$$H(p) = K \frac{(p - p'_1)(p - p'_2) \dots (p - p'_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \quad (18.2)$$

где $K = a_m/b_n$ — постоянный множитель; p'_k — нули функции [корни уравнения $A(p) = 0$]; p_k — полюсы функции [корни уравнения $B(p) = 0$].

Нули и полюсы определяют функцию $H(p)$ с точностью до постоянного множителя; они могут быть вещественными или комплексными. Так как коэффициенты полиномов $A(p)$ и $B(p)$ вещественны, каждому комплексному полюсу (нулю) должен соответствовать сопряженный полюс (нуль). Например, при сопряженных полюсах $p_k, p_{k+1} = -\sigma_k \pm j\omega_k$ полином $B(p)$ содержит мно-

* Частотная характеристика может быть задана в виде графика или таблицы.

** Далее взаимные сопротивления (проводимости), коэффициенты передачи напряжения (тока) называют передаточными функциями.

житель

$$(p - p_k)(p - p_{k+1}) = (p + \sigma_k - j\omega_k)(p + \sigma_k + j\omega_k) = p^2 + 2\sigma_k p + \sigma_k^2 + \omega_k^2,$$

имеющий только вещественные коэффициенты.

Из уравнения (16.34 а), связывающего матрицы изображений выходных величин и параметров источников, можно записать матрицу схемных функций цепи

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{A}_2(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (18.3)$$

Элементы матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ вещественны, элементы матрицы $(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}$ представляют собой отношения двух полиномов, причем знаменатель этих элементов одинаков и равен определителю матрицы:

$$\Delta(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_1).$$

Из выражения (18.3) следует, что схемные функции, образующие матрицу $\mathbf{H}(p)$, имеют общий знаменатель $\Delta(p)$ *. Уравнение $\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) = 0$ является характеристическим уравнением схемы (см. гл. 15). Таким образом, полюсы схемных функций совпадают с корнями характеристического уравнения схемы или собственными частотами. К этому выводу легко прийти также, анализируя выражения для схемных функций через узловую или контурный определитель и (или) алгебраические дополнения элементов определителя (см. гл. 7).

Расположение полюсов схемной функции на комплексной плоскости определяет характер свободных процессов в цепи. Если, например, схемная функция имеет два сопряженных простых полюса в левой полуплоскости: $p_{k, k+1} = -\sigma_k \pm j\omega_k$ ($\sigma_k > 0$, $\omega_k > 0$), то изображение выходного напряжения (тока) содержит слагаемые

$$\frac{A_k}{p + \sigma_k - j\omega_k} + \frac{A_k}{p + \sigma_k + j\omega_k} = \frac{2A_k(p + \sigma_k)}{(p + \sigma_k)^2 + \omega_k^2},$$

которым соответствует оригинал

$$f(t) = 2A_k e^{-\sigma_k t} \cos \omega_k t.$$

На рис. 18.1, а, б показаны соответственно расположение полюсов p_k, p_{k+1} ** и составляющая свободного напряжения (тока) $f(t)$.

* Предполагается, что возможные общие множители в числителе и знаменателе схемной функции не сокращаются.

** Здесь и далее полюсы функции отмечаются на рисунках крестиком, нули — кружочком.

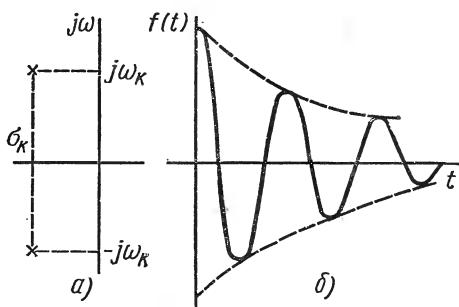


Рис. 18.1

В данном случае свободная составляющая представляет собой затухающую гармоническую функцию. Если $\sigma_k = 0$, то полюсы расположены на мнимой оси (рис. 18.2, а); свободный процесс описывается незатухающей гармонической функцией (рис. 18.2, б).

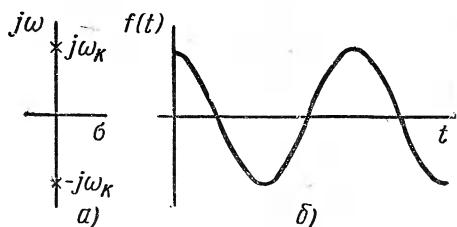


Рис. 18.2

Простому полюсу σ_k на отрицательной вещественной оси (рис. 18.3, а) соответствует экспоненциально затухающая функция (рис. 18.3, б).

Нетрудно убедиться, что в случае кратных полюсов, расположенных в левой полуплоскости ($\text{Re } p_k < 0$), свободная составляющая будет затухающей. Если кратные полюсы расположены на мни-

мой оси, то составляющая свободного напряжения (тока) возрастает. Например, слагаемому изображения $A_k p / (p^2 + \omega_k^2)^2$, имеющему на мнимой оси сопряженные полюсы кратности $m=2$ (рис. 18.4, а), соответствует свободная составляющая $(A_k t \sin \omega_k t) / 2\omega_k$ на рис. 18.4, б. Свободные составляющие напряжений (токов) также возрастают, если полюсы любой кратности расположены в правой полуплоскости. В пассивных цепях, состоящих из ре-

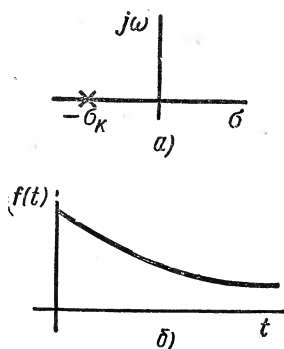


Рис. 18.3

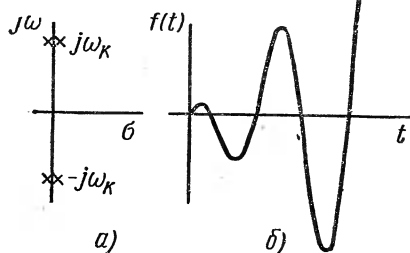


Рис. 18.4

зисторов, индуктивных катушек и конденсаторов, свободные напряжения и токи могут быть только затухающими, так как энергия, накопленная в магнитном и электрическом полях, связанных с катушками и конденсаторами, рассеивается в резисторах. Следовательно, полюсы схемных функций пассивных цепей с потерями расположены в левой полуплоскости. В идеализированных схемах без потерь свободные напряжения и токи не затухают. Таким образом, в схемах без потерь полюсы расположены на мнимой оси (включая начало координат); такие полюсы должны быть простыми.

Входное сопротивление и проводимость одного и того же двухполюсника связаны соотношением $Z(p) = 1/Y(p)$. Полюсы (нули) сопротивления $Z(p)$ совпадают соответственно с нулями (полюсами) проводимости $Y(p)$. Так как полюсы входных сопротивлений и проводимостей расположены в левой полуплоскости или на мнимой оси, то для входных функций справедливо утверждение: нули входных функций не могут быть расположены в правой полуплоскости; нули входных функций на мнимой оси должны быть простыми. В общем случае расположение и кратность нулей передаточных функций не ограничивается.

Энергетические функции. На рис. 18.5 показана цепь, содержащая элементы rLC (между ветвями цепи может быть взаимная индукция), а также n источников напряжения $e_1, e_2, \dots, e_n$. Для этой цепи можно составить контурные уравнения, выбирая в качестве первых n контурных токов токи $i_1, i_2, \dots, i_n$ в ветвях с источниками. В операторной форме уравнения имеют вид *

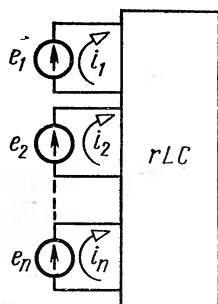


Рис. 18.5

$$\mathcal{E}(p) = Z(p) \mathbf{I}(p), \quad (18.4)$$

где матрица контурных э. д. с.

$$\mathcal{E}(p) = [\mathcal{E}_1(p) \mathcal{E}_2(p) \dots \mathcal{E}_n(p) 0 \dots 0]^T;$$

нулевые элементы этой матрицы соответствуют контурам $n+1, n+2, \dots$, не содержащим источников.

Произведение матрицы $[\mathbf{I}^*(p)]^T$ на матрицу $\mathcal{E}(p)$

$$[\mathbf{I}^*(p)]^T \mathcal{E}(p) = \sum_{j=1}^n \mathbf{I}_j^*(p) \mathcal{E}_j(p), \quad (18.5)$$

где $\mathbf{I}^*(p)$ — матрица с элементами $\mathbf{I}_j^*(p)$, сопряженными по отношению к элементам $\mathbf{I}_j(p)$ матрицы контурных токов $\mathbf{I}(p)$.

Матрицу контурных сопротивлений $Z(p)$ можно представить как сумму трех матриц (см. § 7.3, 9.3):

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{p} D, \quad (18.6)$$

где матрицы параметров контуров R, L, D имеют вещественные элементы.

С учетом равенств (18.4) и (18.6) произведение (18.5) принимает вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}^*(p)] \mathcal{E}(p) &= [\mathbf{I}^*(p)]^T Z(p) \mathbf{I}(p) = \\ &= [\mathbf{I}^*(p)]^T R \mathbf{I}(p) + p [\mathbf{I}^*(p)]^T L \mathbf{I}(p) + \frac{1}{p} [\mathbf{I}^*(p)]^T D \mathbf{I}(p). \end{aligned}$$

* В обозначениях матриц $\mathcal{E}^{(k)}(p)$, $\mathbf{I}^{(k)}(p)$ и $Z^{(k)}(p)$ для краткости опущен индекс (k) .

Если обозначить

$$F = [\dot{\mathbf{I}}^*(p)]^T \mathbf{R} \mathbf{I}(p), \quad (18.7)$$

$$T = [\dot{\mathbf{I}}^*(p)]^T \mathbf{L} \mathbf{I}(p); \quad (18.8)$$

$$V = [\dot{\mathbf{I}}^*(p)]^T \mathbf{D} \mathbf{I}(p), \quad (18.9)$$

то

$$[\dot{\mathbf{I}}^*(p)]^T \mathcal{E}(p) = F + pT + \frac{1}{p} V. \quad (18.10)$$

При условии, что все э. д. с. и токи в цепи изменяются по гармоническому закону с частотой ω_0 , контурные уравнения можно записать в комплексной форме: $\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{Z}(j\omega_0) \dot{\mathbf{I}}$, где $\mathbf{Z}(j\omega_0) = = \mathbf{Z}(p)|_{p=j\omega_0}$. Произведение матриц

$$\dot{\mathbf{I}}^T \dot{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^n \dot{I}_j \dot{\mathcal{E}}_j \quad (18.11)$$

выражает комплексную мощность, отдаваемую источниками и поступающую в пассивную часть цепи ($\dot{\mathcal{E}}_j$, $\dot{I}_j$ — комплексные действующие значения).

При гармонических э. д. с. и токах вместо равенства (18.10) справедливо равенство

$$\dot{\mathbf{I}}^T \dot{\mathcal{E}} = F_0 + j\omega_0 \left(T_0 - \frac{1}{\omega_0^2} V_0 \right), \quad (18.12)$$

где $F_0 = \dot{\mathbf{I}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{I}}$; $T_0 = \dot{\mathbf{I}}^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{I}}$; $V_0 = \dot{\mathbf{I}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{I}}$ — функции, аналогичные функциям (18.7) ÷ (18.9). Функции F_0 , T_0 и V_0 имеют определенный физический смысл. Так как матрица активных сопротивлений контуров (см. § 7.3) $\mathbf{R} = \mathbf{B} \mathbf{R}^{(B)} \mathbf{B}^T$, функция

$$F_0 = [\dot{\mathbf{I}}^*(j\omega_0)]^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{(B)} \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}(j\omega_0).$$

Матрицы контурных токов $\mathbf{I}$ связаны с матрицами токов в ветвях $\mathbf{I}^{(B)}$ соотношениями

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{B}^T \mathbf{I};$$

$$[\mathbf{I}^{(B)}]^T = [\mathbf{B}^T \mathbf{I}]^T = \mathbf{I}^T \mathbf{B}.$$

Учитывая записанные соотношения, функцию F_0 можно выразить через токи ветвей и матрицу активных сопротивлений ветвей:

$$F_0 = [\dot{\mathbf{I}}^{(B)}(j\omega_0)]^T \mathbf{R}^{(B)} \dot{\mathbf{I}}^{(B)}(j\omega_0) = [\dot{\mathbf{I}}^{(B)}]^T \mathbf{R}^{(B)} \dot{\mathbf{I}}^{(B)}.$$

Матрица сопротивлений ветвей $\mathbf{R}^{(B)}$ диагональна, поэтому

$$F_0 = \sum_v r_v \dot{I}_v \dot{I}_v^* = \sum_v r_v \dot{I}_v^2,$$

где r_v — сопротивление v -й ветви. Таким образом, функция F_0 равна средней мощности, рассеиваемой в активных сопротивлениях схемы.

Аналогично можно показать, что функция T_0 равна максимальной энергии магнитного поля, связанного с индуктивностями, а функция V_0/ω_0^2 — максимальной энергии электрического поля, связанного с емкостями.

Выражение (18.12) эквивалентно выражению

$$\tilde{S} = P + jQ,$$

где $P = F_0$; $Q = \omega_0 (T_0 - V_0/\omega_0^2)$.

Так как функции F_0 , T_0 и V_0 связаны с мощностями и энергиями, их называют энергетическими функциями. Функции (18.7) ÷ (18.9), которые обобщают функции F_0 , T_0 и V_0 для $p = \sigma + j\omega$, также называют энергетическими*.

Мощность, рассеиваемая в сопротивлении, а также энергия магнитного и электрического полей, связанных с индуктивностями и емкостями, представляют собой вещественные неотрицательные величины. Поэтому значения функций F_0 , T_0 и V_0 вещественны и удовлетворяют условиям $F_0 \geq 0$, $T_0 \geq 0$ и $V_0 \geq 0$. Учитывая отмеченные свойства функций F_0 , T_0 и V_0 , можно доказать, что функции F , T и V также принимают только вещественные и неотрицательные значения при любых значениях аргумента p^{**} .

С помощью энергетических функций могут быть установлены свойства схемных функций. Например, в случае двухполюсника (рис. 18.6) соотношение (18.10) принимает вид

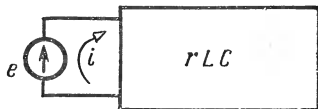


Рис. 18.6

$$\tilde{I}(p) \mathcal{E}(p) = F + pT + \frac{1}{p} V. \quad (18.13)$$

При делении обеих частей этого равенства на произведение $I(p) \tilde{I}(p) = |I(p)|^2$ получаем

$$Z(p) = \frac{\mathcal{E}(p)}{I(p)} = \frac{1}{|I(p)|^2} \left(F + pT + \frac{1}{p} V \right). \quad (18.14)$$

* Аналогичные функции можно получить с помощью узловых уравнений.

** Функции (18.7) ÷ (18.9) называют эрмитовыми формами, если они принимают только вещественные значения. При $p = j\omega_0$ функции F_0 , T_0 и V_0 вещественны и, следовательно, являются эрмитовыми формами. Если $F_0 \geq 0$, $T_0 \geq 0$, $V_0 \geq 0$, то формы называют положительно полуопределенными. Матрицы R , L и D (эти матрицы симметричны и содержат вещественные элементы) называют положительно полуопределенными матрицами соответствующих эрмитовых форм. Функции F , T и V имеют матрицы R , L и D , совпадающие с матрицами положительно полуопределенных эрмитовых форм F_0 , T_0 и V_0 . Такие функции также являются положительно полуопределенными эрмитовыми формами, т. е. для любых p эти функции вещественны и неотрицательны.

Аналогично, разделив обе части равенства (18.13) на $\mathcal{E}(p) \mathcal{E}^*(p) = |\mathcal{E}(p)|^2$, можно найти

$$\dot{Y}^*(p) = \frac{\dot{I}^*(p)}{\mathcal{E}^*(p)} = \frac{1}{|\mathcal{E}(p)|^2} \left(F + pT + \frac{1}{p} V \right)$$

или

$$Y(p) = \frac{I(p)}{\mathcal{E}(p)} = \frac{1}{|\mathcal{E}(p)|^2} \left(F + p^*T + \frac{1}{p^*} V \right). \quad (18.15)$$

В формулах (18.14) и (18.15) $|I(p)|^2$, $|\mathcal{E}(p)|^2$ — положительные вещественные величины, а F , T и V — неотрицательные вещественные величины. Поэтому функции $Z(p)$ и $Y(p)$ удовлетворяют двум условиям: 1) вещественным значениям $p = \sigma$ соответствуют вещественные значения $Z(p)$ и $Y(p)$; 2) комплексным значениям p с неотрицательной вещественной частью $\operatorname{Re} p = \sigma \geq 0$ соответствуют комплексные значения $Z(p)$ и $Y(p)$, имеющие неотрицательные вещественные части $\operatorname{Re} Z(p) \geq 0$ и $\operatorname{Re} Y(p) \geq 0$. Функции, удовлетворяющие сформулированным двум условиям, называют положительными вещественными функциями (ПВФ). Таким образом, входные функции электрических цепей — положительные вещественные функции.

Приравнявая к нулю правую часть соотношения (18.14), можно получить квадратное уравнение

$$p^2 + p \frac{F}{T} + \frac{V}{T} = 0,$$

откуда

$$p = -\frac{F}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{2T}\right)^2 - \frac{V}{T}}. \quad (18.16)$$

Формулу (18.16) нельзя рассматривать как выражение для нулей функции $Z(p)$, так как энергетические функции F , T и V зависят от переменной p . Однако из этой формулы видно, что нули сопротивления (полюсы проводимости) не могут быть расположены в правой полуплоскости*.

§ 18.3. Свойства входных функций LC-, rC-, rL- и rLC-цепей

Свойства входных функций LC-цепей. Цепи, содержащие только индуктивности и емкости, называются цепями без потерь. У таких цепей энергетическая функция $F=0$ и нули сопротивления двухполосника, как видно из формулы (18.16),

$$p = \pm j\sqrt{V/T}. \quad (18.17)$$

Следовательно, нули и полюсы входных функций цепей без потерь расположены на мнимой оси.

* Приравнявая к нулю проводимость (18.15), можно получить формулу, аналогичную (18.16).

Входная функция $Z(p)$ комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$ имеет вид

$$Z(p) = pT + \frac{V}{p} = (\sigma + j\omega)T + \frac{\sigma - j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}V = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega),$$

где вещественная часть функции $R(\sigma, \omega) = \sigma T + \frac{\sigma V}{\sigma^2 + \omega^2}$, мнимая часть функции $X(\sigma, \omega) = \omega T - \frac{\omega V}{\sigma^2 + \omega^2}$.

Вещественная и мнимая части аналитической функции $Z(p)$ должны удовлетворять условиям Коши — Римана. Согласно одному из этих условий,

$$\frac{\partial R(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} = \frac{\partial X(\sigma, \omega)}{\partial \omega}.$$

Производная

$$\frac{\partial R(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} = T + \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} + V \frac{\omega^2 - \sigma^2}{(\sigma^2 + \omega^2)^2} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \sigma},$$

следовательно, производная

$$\left. \frac{\partial X(\sigma, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\sigma=0} = \frac{dX(\omega)}{d\omega} = T + \frac{V}{\omega^2}, \quad (18.18)$$

где $X(\omega)$ — реактивное сопротивление*.

Правая часть равенства (18.18) пропорциональна сумме максимальных энергий магнитного и электрического полей, связанных с индуктивностями и емкостями в установившемся синусоидальном режиме ($p = j\omega$). Сумма энергий всегда положительна, поэтому $\left. \frac{\partial X(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\sigma=0} > 0$, т. е. наклон графика реактивного сопротивления $X(\omega)$ положителен для всех частот.

Условие положительности наклона справедливо и для реактивной проводимости, взятой с отрицательным знаком. Действительно, пусть при $p = \sigma + j\omega$ функция

$$Y(p) = G(\sigma, \omega) - jB(\sigma, \omega).$$

Производная

$$\frac{dY(p)}{dp} = \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{Z(p)} \right] = - \frac{1}{[Z(p)]^2} \frac{dZ(p)}{dp}.$$

Если $p = j\omega$, то $Y(j\omega) = -jB(\omega)$, где $B(\omega)$ — реактивная проводимость. Производная

$$\left. \frac{dY(p)}{dp} \right|_{p=j\omega} = - \frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{[X(\omega)]^2} \frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0.$$

Из условия положительности наклона вытекают следующие свойства входного сопротивления $Z(p)$ [входной проводимости $Y(p)$]: нули и полюсы сопротивления (проводимости) простые и чередуются, т. е. между каждой парой полюсов расположен нуль, а между каждой парой нулей — полюс. Пример зависимости

* Если $p = j\omega$, то $R(\sigma, \omega) = 0$, $Z(j\omega) = jX(\omega)$.

входного сопротивления X от частоты показан на рис. 18.7. Если между парой полюсов отсутствует нуль (или наоборот) или кратность полюса (нуля) больше единицы, то зависимость $X(\omega)$ будет иметь участки с отрицательным наклоном $dX(\omega)/d\omega < 0$.

Поскольку нули и полюсы входных функций чисто мнимые, в числителе и знаменателе функций можно выделить сомножители

$$(p - j\omega_k)(p + j\omega_k) = p^2 + \omega_k^2.$$

Такие сомножители при $p = j\omega$ принимают вещественное значение, однако $Z(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ — мнимые величины. Следовательно, в числителе или знаменателе входной функции кроме множителей

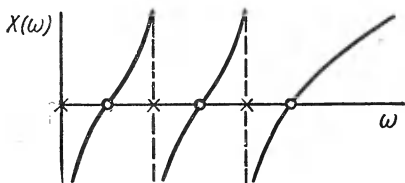


Рис. 18.7

вида $p^2 + \omega_k^2$ должен быть множитель p , т. е. входная функция цепи без потерь имеет полюс или нуль в начале координат (рис. 18.7 соответствует случаю, когда при $p = 0$ сопротивление имеет полюс).

При $p \rightarrow \infty$ входная функция также имеет полюс или нуль. Кратность этого полюса

(нуля) равна единице, поэтому степени полиномов числителя и знаменателя отличаются на единицу (рис. 18.7 соответствует случаю, когда сопротивление имеет полюс при $p \rightarrow \infty$, т. е. степень полинома числителя на единицу больше степени полинома знаменателя).

В общем виде входное сопротивление цепи без потерь можно представить следующим образом:

$$Z(p) = K \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \dots}{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots}, \quad (18.19)$$

если в точке $p = 0$ функция имеет полюс, или

$$Z(p) = K \frac{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots}{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \dots}, \quad (18.20)$$

если в точке $p = 0$ функция имеет нуль. В формулах (18.19) и (18.20) $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots$. Для входной проводимости цепи без потерь справедливы аналогичные выражения.

Как видно из приведенных выражений, сопротивление (проводимость) представляет собой отношение четного полинома к нечетному или наоборот. Конечные нули и полюсы входных функций соответствуют резонансным частотам схемы. Нули и полюсы при $p = 0$ и $p = \infty$ соответствуют короткому замыканию или размыканию зажимов двухполюсника без потерь, который на очень низких или очень высоких частотах эквивалентен одной емкости или индуктивности.

Вычеты в полюсах входных функций вещественны и положительны. Пусть сопротивление $Z(p)$ имеет полюс при $p = j\omega_0$ и вычет в этом полюсе равен K_0 . Тогда функцию сопротивления

можно разложить в ряд Лорана:

$$Z(p) = \frac{K_0}{p - j\omega_0} + a_0 + a_1(p - j\omega_0) + a_2(p - j\omega_0)^2 + \dots$$

Производная

$$\frac{dZ}{dp} = -\frac{K_0}{(p - j\omega_0)^2} + a_1 + 2a_2(p - j\omega_0) + \dots$$

Если $p = j\omega \rightarrow j\omega_0$, то

$$\left. \frac{dZ}{dp} \right|_{p=j\omega} = \frac{dX(\omega)}{d\omega} \approx \frac{K_0}{(\omega - \omega_0)^2} > 0.$$

Так как $(\omega - \omega_0)^2 > 0$, вычет K_0 в полюсе $j\omega_0$ — вещественная положительная величина. Вычет в сопряженном полюсе $p = -j\omega_0$ равен K_0^* .

Свойство положительности вычета получено как следствие свойства положительности наклона кривой реактивного сопротивления.

Необходимые условия реализации входного сопротивления (проводимости) цепи без потерь можно сформулировать следующим образом: 1) полюсы сопротивления (проводимости) простые и расположены на мнимой оси; 2) вычеты в полюсах вещественны и положительны. Функции, удовлетворяющие этим условиям, называются реактансными.

Свойства входных функций rC -, rL - и rLC -цепей. Если цепь содержит только активные сопротивления и емкости, то энергетическая функция $T=0$. На основании формулы (18.14) выражение для нулей сопротивления двухполюсника имеет вид

$$p = -V/F. \quad (18.21)$$

Следовательно, нули и полюсы входных функций rC -цепи расположены на отрицательной вещественной полуоси. При $p = \sigma + j\omega$ входное сопротивление такой цепи

$$Z(p) = F + \frac{\sigma V}{\sigma^2 + \omega^2} + j \left(-\frac{V\omega}{\sigma^2 + \omega^2} \right) = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega).$$

Применяя одно из условий Коши — Римана, можно получить

$$\left. \frac{\partial R(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} \right|_{\omega=0} = \left. \frac{\partial X(\sigma, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = -\frac{V}{\sigma^2} < 0.$$

Учитывая, что $X(\sigma, \omega) = 0$ при $\omega = 0$, находим

$$\left. \frac{\partial R(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} \right|_{\omega=0} = \frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} < 0,$$

т. е. наклон графика функции $Z(\sigma)$ отрицателен для всех значений σ . Нетрудно убедиться, что наклон графика $Y(\sigma)$ положителен: $dY(\sigma)/d\sigma > 0$. Если $p \rightarrow 0$, то rC -двухполюсник эквива-

* В случае произвольной функции комплексной переменной p вычеты в сопряженных полюсах являются комплексно-сопряженными величинами.

лентен сопротивлению или емкости. Поэтому функция $Z(p)$ в начале координат может быть конечной величиной или иметь простой полюс; функция $Y(p)$ в начале координат принимает конечное или нулевое значение. При $p \rightarrow \infty$ такой двухполюсник также эквивалентен сопротивлению или емкости. Функция $Z(p)$ при $p \rightarrow \infty$ может быть конечной или равной нулю величиной; функция $Y(p)$ имеет полюс при $p = \infty$ или принимает конечное значение.

Из условия отрицательности наклона кривой $Z(\sigma)$ и положительности наклона кривой $Y(\sigma)$ следует, что нули и полюсы входных функций $Z(p)$ и $Y(p)$ чередуются. Примеры графиков $Z(\sigma)$ и $Y(\sigma)$ rC -цепи приведены соответственно на рис. 18.8, а, б.

В общем виде входное сопротивление и входную проводимость rC -цепи можно представить следующим образом:

$$Z(p) = K_Z \frac{(p + \sigma_2)(p + \sigma_4) \dots (p + \sigma_m)}{(p + \sigma_1)(p + \sigma_3) \dots (p + \sigma_n)}, \quad (18.22)$$

где $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots; m = n$ или $m = n - 1$,

$$Y(p) = K_Y \frac{(p + \sigma_1)(p + \sigma_3) \dots (p + \sigma_m)}{(p + \sigma_2)(p + \sigma_4) \dots (p + \sigma_n)}, \quad (18.23)$$

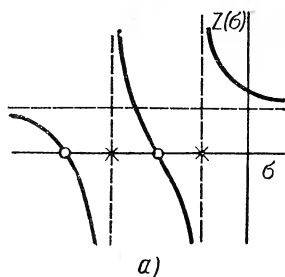
где $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots, m = n$ или $m = n + 1$.

Воспользовавшись свойством отрицательности наклона кривой $Z(\sigma)$ или положительности наклона кривой $Y(\sigma)$, можно доказать, что вычеты

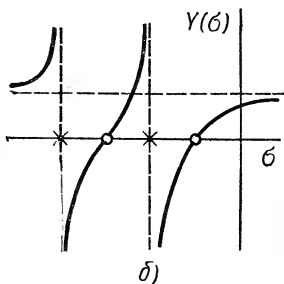
функций $Z(p)$ и $Y(p)/p$ в полюсах положительны. Установленные выше свойства позволяют сформулировать необходимые условия реализации входного сопротивления $Z(p)$ rC -цепи: 1) функция $Z(p)$ имеет простые полюсы, расположенные на отрицательной вещественной полуоси; 2) вычеты функции $Z(p)$ во всех полюсах положительны; 3) при $p = \infty$ функция $Z(p)$ не имеет полюса.

Необходимые условия реализации входной проводимости $Y(p)$ rC -цепи состоят в следующем: 1) функция $Y(p)$ имеет простые полюсы, расположенные на отрицательной вещественной полуоси; 2) вычеты функции $Y(p)/p$ во всех полюсах положительны; 3) при $p = 0$ функция $Y(p)$ не имеет полюса.

Необходимые условия реализации сопротивления $Z(p)$ и проводимости $Y(p)$ rC -цепи неодинаковы (за исключением условия на расположение и кратность полюсов), в то время как условия реализации входных функций $Z(p)$ и $Y(p)$ LC -цепи совпадают.



а)



б)

Рис. 18.8

Если цепь содержит только активные сопротивления и индуктивности, то энергетическая функция $V = 0$. Аналогично предыдущему легко установить, что свойства входного сопротивления $Z(p)$ [входной проводимости $Y(p)$] rL -цепи полностью идентичны соответственно свойствам входной проводимости $Y(p)$ [входного сопротивления $Z(p)$] rC -цепи.

В общем случае цепь может состоять из активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей. Входные сопротивления (проводимости) такой цепи представляют собой положительные вещественные функции (см. § 18.2)*. Другими словами, необходимое условие реализации входного сопротивления $Z(p)$ [входной проводимости $Y(p)$] rLC -цепи состоит в том, что функция $Z(p)$ [$Y(p)$] должна быть положительной и вещественной. ПФФ не имеет полюсов и нулей в правой полуплоскости комплексной переменной p ; полюсы на мнимой оси простые, а вычеты в таких полюсах — вещественны и положительны; нули на мнимой оси также простые. Высшие и низшие степени полиномов в числителе и знаменателе ПФФ не могут отличаться более чем на единицу.

Пусть $Z(p)$ — дробно-рациональная функция переменной p . Эту функцию можно записать в виде

$$Z(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}, \quad (18.24)$$

где m_1 и n_1 — соответственно четная и нечетная части полинома числителя $A(p)$; m_2 и n_2 — соответственно четная и нечетная части полинома знаменателя $B(p)$.

Функция $Z(p)$ будет ПФФ, если удовлетворяются следующие условия**.

1. Отношение m_2/n_2 (n_2/m_2) представляет собой реактансную функцию, т. е. сопротивление (проводимость) LC -цепи. Если m_2 и n_2 имеют общий множитель — полином $M(p)$, то нули этого полинома простые и расположены на мнимой оси. Нули полинома $M(p)$ являются полюсами функции $Z(p)$; вычеты в таких полюсах должны быть вещественными и положительными.

2. Вещественная часть функции $Z(p)$ на мнимой оси неотрицательна, т. е. $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$ при $-\infty < \omega < \infty$. На основании равенства (18.24)

$$Z(p) = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} + \frac{m_2 n_1 - m_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}. \quad (18.25)$$

Если $p = j\omega$, то первое четное слагаемое в выражении (18.25) будет вещественной частью функции $Z(p)$:

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \Big|_{p=j\omega}.$$

Знаменатель $(m_2^2 - n_2^2)_{p=j\omega}$ — положительная величина, поэтому $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$, когда полином

$$N(\omega^2) = (m_1 m_2 - n_1 n_2)_{p=j\omega} \geq 0. \quad (-\infty < \omega < \infty)$$

* Это утверждение справедливо и при наличии взаимной индукции.

** Доказательство этих условий здесь не рассматривается.

или

$$N(x) = N(\omega^2)|_{\omega^2=x} \geq 0 \quad (0 \leq x < \infty).$$

В простых случаях знак полинома $N(x)$ может быть установлен непосредственно. Для полиномов высокой степени можно применить косвенные методы*.

§ 18.4. Свойства функций четырехполюсников

Общие свойства передаточных функций. Четырехполюсник, содержащий активные сопротивления, индуктивности и емкости, характеризуется следующими функциями: сопротивлениями при разомкнутых зажимах $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$ и $Z_{12}(p) = Z_{21}(p)$ или проводимостями при короткозамкнутых зажимах $Y_{11}(p)$, $Y_{22}(p)$ и $Y_{12}(p) = Y_{21}(p)$. Функции $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$, $[Y_{11}(p), Y_{22}(p)]$ представляют собой входные сопротивления (проводимости), свойства которых были рассмотрены.

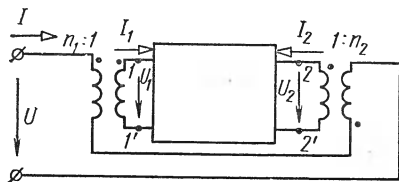


Рис. 18.9

На рис. 18.9 показан четырехполюсник, к зажимам которого 1—1' и 2—2' присоединены идеальные трансформаторы. Для четырехполюсника справедливо уравнение

$$\begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix}. \quad (18.26)$$

Две обмотки идеальных трансформаторов соединены между собой последовательно. Напряжение

$$U(p) = n_1 U_1(p) + n_2 U_2(p) = [n_1 \ n_2] \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix}, \quad (18.27)$$

$$\text{ток } I(p) = I_1(p)/n_1 = I_2(p)/n_2$$

или

$$\begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} I(p). \quad (18.28)$$

Из уравнений (18.26) ÷ (18.28) легко получить выражение для входного сопротивления**:

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{U(p)}{I(p)} = [n_1 n_2] \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \\ &= n_1^2 Z_{11}(p) + 2n_1 n_2 Z_{12}(p) + n_2^2 Z_{22}(p). \end{aligned} \quad (18.29)$$

* Полином $N(x) \geq 0$, если у этого полинома нет положительных нулей нечетного порядка. Наличие нулей и их порядок на интервале $[0, \infty]$ можно определить по известной из курса математики теореме Штурма.

** В выражении (18.29) учтено равенство $Z_{12}(p) = Z_{21}(p)$.

Сопротивление $Z(p)$ как входное сопротивление пассивной схемы является ПФФ. В соответствии с равенством (18.29) любой полюс сопротивлений $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$ и $Z_{21}(p)$ будет и полюсом ПФФ $Z(p)$. Поэтому функция $Z_{21}(p)$ не может иметь полюсов в правой полуплоскости, а полюсы этой функции на мнимой оси простые.

Пусть K_{ij} — вычет функции $Z_{ij}(p)$ в одном из полюсов, расположенных на мнимой оси ($i, j=1, 2$), а K — вычет функции $Z(p)$ в том же полюсе. Тогда из соотношения (18.29) можно получить *

$$K = [n_1 n_2] \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = n_1^2 K_{11} + 2n_1 n_2 K_{21} + n_2^2 K_{22}. \quad (18.30)$$

Вычет K — вещественный и положительный, поэтому из равенства (18.30) следует, что K_{21} — вещественный вычет, удовлетворяющий условию

$$K_{11} K_{22} - K_{21}^2 \geq 0, \quad (18.31)$$

которое называется условием вычетов **.

Из условия вычетов следует, что любой полюс $Z_{21}(p)$ на мнимой оси будет также и полюсом входных функций. В то же время входные функции могут иметь полюсы, которых нет у функции $Z_{21}(p)$ (частные полюсы входных функций).

Необходимо рассмотреть свойство вещественной части функции $Z_{21}(p)$ при $p = j\omega$. Если $r_{ij} = \operatorname{Re} Z_{ij}(j\omega)$, $r = \operatorname{Re} Z(j\omega)$, то из соотношения (18.29)

$$r = [n_1 n_2] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = n_1^2 r_{11} + 2n_1 n_2 r_{21} + n_2^2 r_{22}. \quad (18.32)$$

Так как $r \geq 0$, из соотношения (18.32) следует, что вещественная часть функции $Z_{21}(j\omega)$ должна удовлетворять условию

$$r_{11} r_{22} - r_{21}^2 \geq 0, \quad (18.33)$$

которое называют условием вещественных составляющих и х ***.

Свойства функции $Y_{21}(p)$ аналогичны свойствам функции $Z_{21}(p)$. Свойства функций $Z_{ij}(p)$ при разомкнутых зажимах и функций $Y_{ij}(p)$ при короткозамкнутых зажимах определяют свойства других передаточных функций. Например, если ток $I_2(p) = 0$, то справедливы уравнения

$$U_1(p) = Z_{11}(p) I_1(p); \quad U_2(p) = Z_{21}(p) I_1(p); \\ Y_{21}(p) U_1(p) + Y_{22}(p) U_2(p) = 0.$$

* В матрице вычетов $K_{12} = K_{21}$.

** Выражение (18.30) называется квадратичной формой; если $K \geq 0$, то матрица этой формы $[K_{ij}]$ должна быть положительно полуопределенной, т. е. должны удовлетворяться условия $K_{11} \geq 0$, $K_{22} \geq 0$ и (18.31).

*** Выражение (18.32), как и (18.30), представляет собой положительно полуопределенную квадратичную форму; матрица $[r_{ij}]$ этой формы должна удовлетворять условиям $r_{11} \geq 0$, $r_{22} \geq 0$ и (18.33).

Из этих уравнений находим коэффициент передачи напряжения:

$$K^{(u)}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)} \quad (18.34)$$

или

$$K^{(u)}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \Big|_{I_2=0} = -\frac{Y_{21}(p)}{Y_{22}(p)}. \quad (18.35)$$

Выражения (18.34) и (18.35) показывают, что полюсы функции $K^{(u)}(p)$ могут быть расположены в левой полуплоскости или на мнимой оси. Полюсы на мнимой оси простые, а вычеты в них являются мнимыми. Кроме того, функция $K^{(u)}(p)$ не может иметь полюса при $p=0$ или $p=\infty$; степень полинома числителя не выше степени полинома знаменателя.

На рис. 18.10 показан четырехполюсник, нагруженный на сопротивление $r_2 = 1/g_2$. Такой четырехполюсник можно characterize-

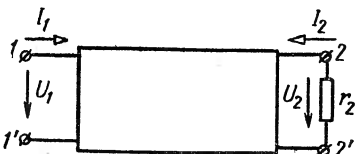


Рис. 18.10

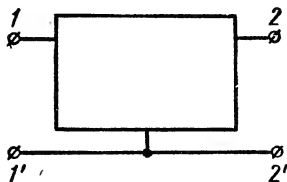


Рис. 18.11

вать следующими передаточными функциями: взаимным сопротивлением $Z_{21}^{(n)}(p) = U_2(p)/I_1(p)$ и взаимной проводимостью $Y_{21}^{(n)}(p) = I_2(p)/U_1(p)$. Из уравнений четырехполюсника совместно с уравнением $U_2(p) = -r_2 I_2(p)$ получаем выражения:

$$Z_{21}^{(n)}(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = \frac{r_2 Z_{21}(p)}{r_2 + Z_{22}(p)}; \quad (18.36)$$

$$Y_{21}^{(n)}(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)} = \frac{g_2 Y_{21}(p)}{g_2 + Y_{22}(p)}. \quad (18.37)$$

В частном случае при $r_2 = 1$ Ом

$$Z_{21}^{(n)}(p) = \frac{Z_{21}(p)}{1 + Z_{22}(p)}; \quad (18.38)$$

$$Y_{21}^{(n)}(p) = \frac{Y_{21}(p)}{1 + Y_{22}(p)}. \quad (18.39)$$

Полюсы функций (18.36) ÷ (18.39) расположены в левой полуплоскости или на мнимой оси.

Проведенный анализ показывает, что расположение полюсов всех передаточных функций ограничено левой полуплоскостью и мнимой осью. В общем случае расположение и кратность нулей передаточных функций (эти нули называют ниже нулями передачи) не ограничиваются. Если передаточные функции не имеют нулей в правой полуплоскости, то их называют функциями минимальной фазы. Передаточные функции, имеющие нули

в правой полуплоскости, называют функциями не минимальной фазы.

Рассмотренные свойства функций четырехполюсников справедливы для четырехполюсников любой структуры, содержащих элементы r , L , C , а также имеющих индуктивные связи между ветвями.

Особенности функций четырехполюсников без взаимной индукции. Широкое применение находят четырехполюсники без взаимной индукции, имеющие общий зажим $1' - 2'$ и называемые заземленными, неуравновешенными четырехполюсниками (рис. 18.11).

Функции $Z_{ij}(p)$ заземленного четырехполюсника можно записать в виде ($i, j = 1, 2$)

$$Z_{ij}(p) = \frac{a_{(m)ij}p^m + a_{(m-1)ij}p^{m-1} + \dots + a_{(1)ij}p + a_{(0)ij}}{B(p)}. \quad (18.40)$$

Для расчета функций $Z_{ij}(p)$ применимы топологические формулы. С помощью этих формул нетрудно убедиться что все коэффициенты $a_{(k)ij}$ ($k = 0, 1, \dots, m$) неотрицательны: $a_{(k)ij} \geq 0$. Кроме того, эти коэффициенты удовлетворяют условиям $a_{(k)11} \geq a_{(k)21}$; $a_{(k)22} \geq a_{(k)12}$. Аналогичным условиям удовлетворяют коэффициенты полиномов в числителях функций — Y_{21} , Y_{11} , Y_{22} . Из выражений (18.34) и (18.35)

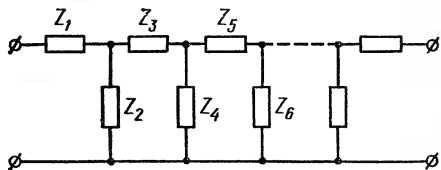


Рис. 18.12

следует, что коэффициенты полинома числителя функции $K^{(u)}(p)$ не превышают соответствующих коэффициентов полинома знаменателя. Если $p = \sigma > 0$, то $0 < K^{(u)}(\sigma) \leq 1$.

Передачные функции заземленного четырехполюсника не могут иметь нулей на положительной вещественной полуоси (за исключением значений $\sigma = 0$ и $\sigma = \infty$), так как коэффициенты полиномов в числителях функций неотрицательны.

На рис. 18.12 показан частный случай заземленного четырехполюсника — четырехполюсник цепочечной схемы. Нули передачи

цепочечного четырехполюсника совпадают с полюсами продольных сопротивлений $Z_1, Z_3, Z_5, \dots$ и нулями поперечных сопротивлений $Z_2, Z_4, Z_6, \dots$. Действительно, полюсу (нулю) соответствует бесконечно большое (нулевое) сопротивление, т. е. разомкнутая (короткозамкнутая) ветвь.

Четырехполюсники, у которых зажимы $1'$ и $2'$ не совпадают (см. рис. 18.10), называются уравновешенными или незаземленными. Коэффициенты $a_{(k)ij}$ функций вида (18.40) уравновешенных четырехполюсников без взаимной индукции удовле-

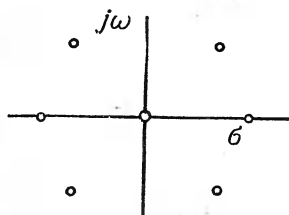


Рис. 18.13

творяют условиям

$$a_{(k)11} \geq |a_{(k)21}|; a_{(k)22} \geq |a_{(k)21}|.$$

Коэффициенты $a_{(k)21}$ могут быть положительными или отрицательными, а также равными нулю. В справедливости записанных условий можно убедиться с помощью топологических формул. Если $p = \sigma > 0$, то коэффициент передачи уравновешенной цепи $-1 \leq K^{(u)}(\sigma) \leq 1$. Нули передаточных функций могут быть расположены в любой точке комплексной плоскости, включая положительную вещественную полуось.

Особенности функций LC -, rC - и rL -четырёхполосников. Полюсы всех функций четырёхполосников без потерь (LC) расположены на мнимой оси. При $p = j\omega$ функции $Z_{21}(j\omega)$ и $Y_{21}(j\omega)$ должны быть мнимыми, поэтому $Z_{21}(p)$ и $Y_{21}(p)$ представляют собой нечетные функции p — отношение нечетного полинома к четному или наоборот. Функция $K^{(u)}(p)$ является отношением двух четных полиномов. Числитель функций (18.38) и (18.39) — четный или нечетный полином.

У LC -четырёхполосника цепочечной схемы (рис. 18.12) нули передачи расположены на мнимой оси, так как полюсы сопротивлений $Z_1, Z_3, \dots$ и нули сопротивлений $Z_2, Z_4, \dots$ расположены на мнимой оси. В общем случае нули передачи такого четырёхполосника имеют квадрантную симметрию (рис. 18.13) вследствие четности (нечетности) полиномов в числителях передаточных функций.

Полюсы всех функций rC -четырёхполосников расположены на отрицательной вещественной полуоси. С помощью схемы на рис. 18.9 и формулы (18.29) можно доказать, что вычеты K_{ij} в полюсах функций $Z_{ij}(p)$ должны удовлетворять условию (18.31); такому же условию удовлетворяют вычеты функций $Y_{ij}(p)/p$. Расположение нулей передачи в общем случае не ограничивается. У rC -четырёхполосника цепочечной схемы (см. рис. 18.12) нули передачи расположены на отрицательной вещественной полуоси, так как полюсы сопротивлений $Z_1, Z_3, \dots$ и нули сопротивлений $Z_2, Z_4, \dots$ расположены на отрицательной вещественной полуоси.

Свойства $Z_{ij}(p) [Y_{ij}(p)]$ rL -четырёхполосников совпадают соответственно со свойствами функций $Y_{ij}(p) [Z_{ij}(p)]$ rC -четырёхполосников.

§ 19.1. Нормирование параметров элементов электрических цепей

В реальных электрических цепях сопротивления резисторов, индуктивности катушек и емкости конденсаторов имеют различные численные значения. Частоты напряжений и токов источников в цепях также изменяются в широких пределах. Расчеты функций цепей с реальными параметрами могут быть громоздки. Для удобства расчетов применяют нормирование (нормализацию) параметров цепей по уровню сопротивления и частоте.

Пусть все сопротивления r , индуктивности L и величины, обратные емкостям ($1/C$), разделены на некоторую положительную постоянную r_0 *. Тогда каждый элемент определителя контурных сопротивлений

$$Z_{ij}(p) = r_{ij} + pL_{ij} + (1/pC_{ij})$$

уменьшится в r_0 раз. Если порядок определителя равен n , то $\Delta^{(k)}(p)$ уменьшится в r_0^n раз. Алгебраическое дополнение любого элемента $\Delta_{ij}^{(k)}(p)$ определителя уменьшается в r_0^{n-1} раз. В результате входные и взаимные сопротивления схемы, равные отношению $\Delta^{(k)}(p)/\Delta_{ij}^{(k)}(p)$, уменьшаются, а входные и взаимные проводимости возрастают в r_0 раз. Коэффициенты передачи напряжения (тока), которые определяются как отношения алгебраических дополнений одинакового порядка, не изменяются.

Следовательно, если заданную функцию (входное или взаимное сопротивление) разделить на некоторую постоянную r_0 (нормирование по уровню сопротивления), то расчет схемы по нормированной функции приводит к нормированным параметрам r_n , L_n и $1/C_n$, которые в r_0 раз меньше фактических (денормированных) параметров. Это утверждение также будет справедливо, если заданную функцию (входную или взаимную проводимость) умножить на постоянную r_0 . Безразмерные функции (коэффициенты передачи напряжения и тока) инвариантны к нормированию по уровню сопротивления.

При нормировании функции по частоте частота ω заменяется нормированной частотой ω/ω_0 (ω_0 — некоторая положительная безразмерная постоянная). Нормирование по частоте не должно изменять индуктивных сопротивлений ωL и емкостных проводимостей ωC . Поэтому если схема рассчитана по частотной характеристике с нормированной частотой $[H(\omega/\omega_0)]$, то нормированные параметры L_n и C_n больше фактических в ω_0 раз:

$$\omega L = \frac{\omega}{\omega_0} L_n; \quad \omega C = \frac{\omega}{\omega_0} C_n,$$

* Эта постоянная может быть больше или меньше единицы и считается безразмерной.

откуда $L = L_n/\omega_0$; $C = C_n/\omega_0$. Нормирование по частоте не влияет на величину активных сопротивлений.

При синтезе цепей, как правило, функции нормируются одновременно по уровню сопротивления и частоте. Если при расчете цепи, нормированной по уровню сопротивления и частоте, получены нормированные параметры r_n , L_n и C_n , то денормированные параметры можно представить как

$$r = r_0 r_n; L = r_0 L_n / \omega_0; C = C_n / r_0 \omega_0.$$

Полученные выражения для денормированных параметров справедливы, если исходные функции (сопротивления) делят на r_0 , функции (проводимости) умножают на r_0 , а частоту ω уменьшают в ω_0 раз *.

§ 19.2. Реализация двухполюсников

Построение канонических схем двухполюсников, содержащих индуктивности и емкости. Двухполюсник реализуется по известному входному сопротивлению $Z(p)$ или проводимости $Y(p)$. Входные функции должны удовлетворять необходимым условиям реализации, рассмотренным в гл. 18. Если по заданной функции, удовлетворяющей необходимым условиям реализации, можно построить схему, то необходимые условия будут и достаточными условиями реализации.

Входное сопротивление (18.19) LC -двухполюсника с помощью разложения на элементарные дроби можно представить в следующем виде:

$$Z(p) = \frac{K_0}{p} + \sum_{i=1}^M \frac{2K_i p}{(p^2 + \omega_i^2)} + K_\infty p, \quad (19.1)$$

где

$$K_0 = [pZ(p)]_{p=0} \quad (19.2)$$

— вычет в полюсе $p=0$;

$$2K_i = \left[\frac{p^2 + \omega_i^2}{p} Z(p) \right]_{p=-\omega_i^2} \quad (19.3)$$

— удвоенный вычет в полюсах $p = \pm j\omega_i$;

$$K_\infty = \left[\frac{Z(p)}{p} \right]_{p \rightarrow \infty} \quad (19.4)$$

— вычет в полюсе $p = \infty$.

Вычеты (19.2) ÷ (19.4) неотрицательны, поэтому разложению (19.1) соответствует LC -схема с положительными параметрами. Слагаемое K_0/p реализуется емкостью $C_0 = 1/K_0$, слагаемое $K_\infty p$ —

* Для упрощения численных расчетов далее рассматриваются только нормированные функции и схемы с нормированными параметрами.

индуктивностью $L_\infty = K_\infty$. Сопротивление

$$Z_i = \frac{2K_i p}{p^2 + \omega_i^2}$$

реализуется параллельно соединенными индуктивностью L_i и емкостью C_i . Действительно, проводимость

$$\frac{1}{Z_i} = \frac{p^2 + \omega_i^2}{2K_i p} = \frac{1}{2K_i} p + \frac{\omega_i^2}{2K_i p} = C_i p + \frac{1}{L_i p},$$

где $C_i = 1/2K_i$; $L_i = 2K_i/\omega_i^2$.

Таким образом, выражению (19.1) соответствует LC-схема двухполюсника, приведенная на рис. 19.1, а.

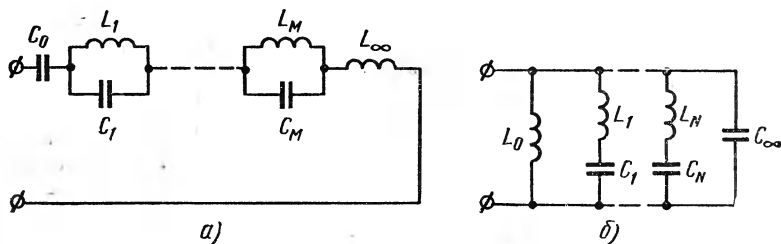


Рис. 19.1

Проводимость LC-двухполюсника удовлетворяет таким же условиям реализации, как и сопротивление. Поэтому разложение функции $Y(p)$ аналогично (19.1):

$$Y(p) = \frac{K_0}{p} + \sum_{i=1}^N \frac{2K_i p}{p^2 + \omega_i^2} + K_\infty p, \quad (19.5)$$

где вычеты определяются по формулам (19.2) ÷ (19.4). Слагаемое K_0/p реализуется индуктивностью $L_0 = 1/K_0$, слагаемое $K_\infty p$ — емкостью $C_\infty = K_\infty$. Проводимость

$$Y_i = \frac{2K_i p}{p^2 + \omega_i^2}$$

реализуется последовательно соединенными индуктивностью L_i и емкостью C_i , так как

$$\frac{1}{Y_i} = \frac{1}{2K_i} p + \frac{\omega_i^2}{2K_i p} = L_i p + \frac{1}{C_i p},$$

где $L_i = 1/2K_i$; $C_i = 2K_i/\omega_i^2$. Схема двухполюсника, соответствующая выражению (19.5), приведена на рис. 19.1 б. Схемы двухполюсника на рис. 19.1, а, б называют каноническими схемами Фостера.

По заданной входной функции также можно построить другие схемы двухполюсников. На рис. 19.2 показан двухполюсник цепочечной структуры. Входное сопротивление такого двухполюсника

выражается непрерывной дробью:

$$Z(p) = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \dots}}}$$

Если сопротивление $Z(p)$ имеет полюс при $p = \infty$, то нетрудно выделить слагаемое вида pL_1 или, говоря условно, выделить полюс при $p = \infty$:

$$Z(p) = pL_1 + Z'(p).$$

Функция $1/Z'(p)$ также имеет полюс при $p = \infty$:

$$1/Z'(p) = pC_2 + Y''(p).$$

Последовательное выделение полюсов при $p = \infty$ приводит к непрерывной дроби

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_2 + \frac{1}{pL_3 + \frac{1}{pC_4 + \dots}}}, \quad (19.6)$$

которой соответствует двухполюсник на рис. 19.3, а.

Непрерывная дробь (19.6) практически получается путем последовательного деления числителя функции $Z(p)$ на знаменатель, начиная со слагаемых высших степеней. Сначала вычисляют значение индуктивности L_1 и остаток от деления $Z'(p)$; затем числитель функции, обратной остатку [функции $1/Z'(p)$], делят на знаменатель и находят значение емкости C_2 и новый остаток от деления $Y''(p)$ и т. д.

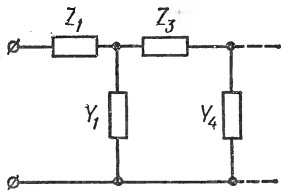


Рис. 19.2

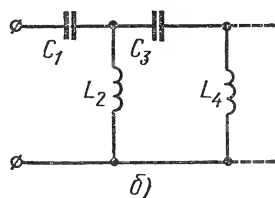
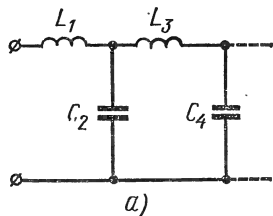


Рис. 19.3

Если функция $Z(p)$ имеет полюс при $p = 0$, то можно выделить слагаемое вида $1/pC_1$ или, говоря условно, выделить полюс при $p = 0$:

$$Z(p) = \frac{1}{pC_1} + Z'(p).$$

Функция $1/Z'(p)$ также имеет полюс при $p = 0$:

$$1/Z'(p) = (1/pL_2) + Y''(p).$$

Последовательное выделение полюсов при $p=0$ приводит к непрерывной дроби

$$Z(p) = \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{\frac{1}{pL_2} + \frac{1}{\frac{1}{pC_3} + \frac{1}{\frac{1}{pL_4} + \dots}}}, \quad (19.7)$$

которой соответствует схема на рис. 19.3, б. Непрерывная дробь (19.7) получается путем деления числителей функции $Z(p)$ и соответствующих остатков на знаменатели, начиная со слагаемых низших степеней. Схемы на рис. 19.3, а и б называют каноническими схемами Кауэра.

Если проводимость $Y(p)$ имеет полюс при $p=\infty$ или

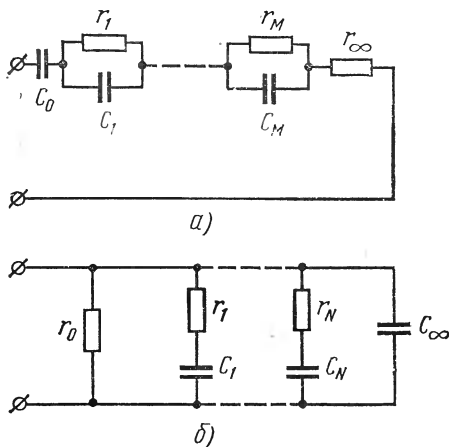


Рис. 19.5

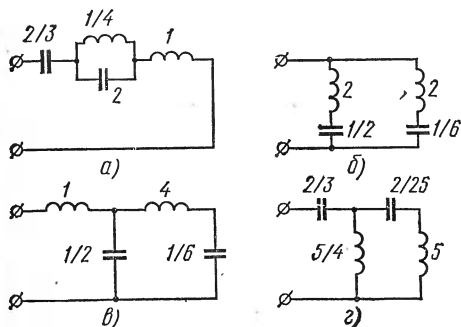


Рис. 19.4

$p=0$, то разложение в непрерывную дробь функции $Y(p)$ имеет вид, аналогичный правой части выражений (19.6) и (19.7), только L_k заменяется на C_k и наоборот.

Пример 19.1. Построить канонические схемы Фостера и Кауэра, если входное сопротивление двухполюсника

$$Z(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^3 + 2p} = \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 3)}{p(p^2 + 2)}.$$

Решение. При разложении $Z(p)$ на элементарные дроби в соответствии с формулами (19.1) ÷ (19.4) получим

$$Z(p) = \frac{3}{2p} + \frac{p}{2(p^2 + 2)} + p.$$

На рис. 19.4, а приведена первая каноническая схема Фостера, на которой значения индуктивностей и емкостей указаны соответственно в генри (Г) и фарадах (Ф).

Разложение проводимости $Y(p) = 1/Z(p)$ на элементарные дроби имеет вид

$$Y(p) = \frac{p}{2(p^2 + 1)} + \frac{p}{2(p^2 + 3)},$$

чему соответствует вторая каноническая схема Фостера (рис. 19.4, б).

Последовательное выделение полюсов при $p \rightarrow \infty$ приводит к дроби

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4p + \frac{1}{\frac{1}{6}p}}}.$$

Полученная непрерывная дробь позволяет построить первую каноническую схему Кауэра (рис. 19.4, а)

Последовательно выделив полюсы при $p=0$, найдем

$$Z(p) = \frac{3}{2p} + \frac{1}{\frac{4}{5}p + \frac{1}{\frac{25}{2p} + \frac{1}{\frac{1}{5}p}}}.$$

Полученная непрерывная дробь позволяет построить вторую каноническую схему Кауэра (рис. 19.4, в).

Следует отметить, что канонические схемы реализуют входные функции с помощью минимального числа элементов.

Построение канонических схем двухполюсников, содержащих сопротивления и емкости (индуктивности). Канонические схемы Фостера для rC -двухполюсника получают аналогично каноническим схемам для LC -двухполюсника.

Так, если сопротивление $Z(p)$ rC -цепи разложить на элементарные дроби:

$$Z(p) = \frac{K_0}{p} + \sum_{i=1}^M \frac{K_i}{p + \sigma_i} + K_{\infty}, \quad (19.8)$$

где

$$K_0 = [pZ(p)]_{p=0}; \quad (19.9)$$

$$K_i = [(p + \sigma_i)Z(p)]_{p=-\sigma_i}; \quad (19.10)$$

$$K_{\infty} = [Z(p)]_{p \rightarrow \infty}, \quad (19.11)$$

то можно построить схему на рис. 19.5, а. В этой схеме

$$C_0 = 1/K_0; \quad r_i = K_i/\sigma_i; \quad C_i = 1/K_i; \quad r_{\infty} = K_{\infty}.$$

Проводимость rC -цепи можно представить в виде

$$Y(p) = K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{K_i p}{p + \sigma_i} + K_{\infty} p, \quad (19.12)$$

где

$$K_0 = [Y(p)]_{p=0}, \quad (19.13)$$

$$K_i = \left[\frac{p + \sigma_i}{p} Y(p) \right]_{p=-\sigma_i}; \quad (19.14)$$

$$K_{\infty} = \left[\frac{Y(p)}{p} \right]_{p \rightarrow \infty}. \quad (19.15)$$

Выражению (19.12) соответствует схема на рис. 19.5, б. В этой схеме $r_0 = 1/K_0$; $r_i = 1/K_i$; $C_i = K_i/\sigma_i$; $C_\infty = K_\infty$.

С помощью представления функции $Z(p)$ или $Y(p)$ в виде непрерывных дробей могут быть построены канонические схемы Кауэра. Эти схемы аналогичны схемам на рис. 19.3, а, б, только индуктивности заменяются активными сопротивлениями.

Пример 19.2. Построить канонические схемы двухполосника, если входное сопротивление

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p} = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)}.$$

Решение. В соответствии с разложениями на элементарные дроби:

$$Z(p) = \frac{3}{2p} + \frac{1}{2(p+2)} + 1;$$

$$Y(p) = \frac{p}{2(p+1)} + \frac{p}{2(p+3)}$$

строим схемы Фостера, приведенные на рис. 19.6, а, б (значения сопротивлений указаны в омах, емкостей — в фарадах).

Выполняя деление соответствующих полиномов, начиная со слагаемых высших или низших степеней, получим непрерывные дроби:

$$Z(p) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}p}};$$

$$Z(p) = \frac{3}{2p} + \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{1}{\frac{25}{2p} + \frac{1}{5}}}.$$

Эти дроби позволяют построить схемы Кауэра (рис. 19.6, в, г).

Методы реализации rL -двухполосников аналогичны методам реализации rC -двухполосников.

Понятие о реализации двухполосников, содержащих сопротивления, индуктивности и емкости. Любая ПФФ $Z(p)$ или $Y(p)$ может быть реализована как входное сопротивление rLC -двухполосника.

В некоторых случаях реализация может быть выполнена следующим образом. Пусть задана ПФФ сопротивления $Z(p)$. Если функция $Z(p)$ имеет полюсы на мнимой оси, то следует выделить слагаемые, соответствующие этим полюсам:

$$Z(p) = K_\infty p + \frac{K_0}{p} + \sum_i \frac{2K_i p}{p^2 + \omega_i^2} + Z_1(p),$$

где функция $Z_1(p)$ не содержит полюсов на мнимой оси. Выделенные слагаемые реализуются с помощью LC -элементов.

Функция $Z_1(p)$ может иметь нули на мнимой оси. Тогда

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = K'_\infty p + \frac{K'_0}{p} + \sum_i \frac{2K'_i p}{p^2 + \omega_i^2} + Y_2(p),$$

где $Y_2(p)$ — функция, не имеющая полюсов на мнимой оси. Выделенные слагаемые реализуются LC -схемой.

В результате последовательного выделения полюсов на мнимой оси из функций сопротивления и проводимости может получиться

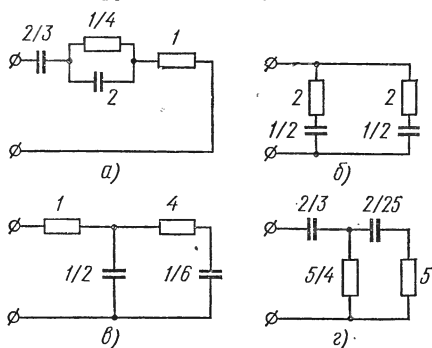


Рис. 19.6

функция $Z_k(p) [Y_k(p)]$, не имеющая как полюсов, так и нулей на мнимой оси. Вещественная часть такой функции на мнимой оси неотрицательна. Если вещественная часть положительна, то из функции можно вычесть постоянную величину $r_k(g_k)$, равную минимальному значению $\operatorname{Re} Z_k(j\omega) [\operatorname{Re} Y_k(j\omega)]$. При этом у остатка $Z_{k+1} = Z_k - r_k (Y_{k+1} = Y_k - g_k)$ может быть нуль или полюс на

мнимой оси, позволяющий выделить слагаемое, реализуемое с помощью LC -элементов. Изложенная методика выделения слагаемых в ряде случаев дает возможность построить схему rLC -двухполюсника.

Пример 19.3. Реализовать функцию

$$Z(p) = \frac{3p^2 + 4p^2 + 8p + 3}{p^3 + 5p^2 + p + 5}.$$

Решение. Заданная функция представляет собой ПФФ и имеет полюсы на мнимой оси $p_{1,2} = \pm j$. Следовательно, функцию можно представить в виде

$$Z(p) = \frac{2K_1 p}{p^2 + 1} + Z_1(p).$$

Вычет этой функции $Z(p)$ в полюсе $p_1 = j$ ($p_2 = -j$) $K_1 = 1/2$, поэтому функция

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= Z(p) - \frac{2K_1 p}{p^2 + 1} = \\ &= Z(p) - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{3(p+1)}{p+5}. \end{aligned}$$

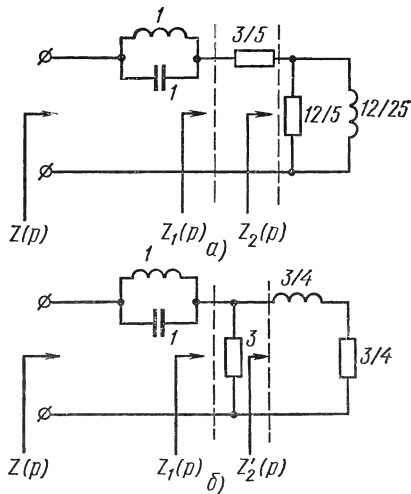


Рис. 19.7

Минимальное значение $\operatorname{Re} Z_i(j\omega)$ равно $r_1 = 3/5$ при $\omega = 0$. Функция

$$Z_2(p) = Z_1(p) - r_1 = \frac{12p}{5(p+5)}$$

имеет нуль на мнимой оси при $p = 0$. Обратная функция

$$Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{25}{12p} + \frac{5}{12}.$$

Схема двухполюсника, реализующая заданную функцию, приведена на рис. 19.7, а.

Если вместо функции $Z_1(p)$ воспользоваться обратной функцией

$$Y_1(p) = \frac{p+5}{3(p+1)},$$

то можно получить еще одну схему двухполосника.

Минимальное значение $\operatorname{Re} Y_1(j\omega)$ равно $g_1 = \frac{1}{3}$ при $\omega = \infty$. Функция

$$Y'_2(p) = Y_1(p) - g_1 = \frac{4}{3(p+1)}$$

имеет нуль при $p = \infty$. Обратная функция

$$Z'_2(p) = \frac{1}{Y'_2(p)} = \frac{3}{4}p + \frac{3}{4}.$$

На рис. 19.7, б изображена вторая схема двухполосника, реализующая заданную функцию $Z(p)$.

Следует отметить, что функция $Z_1(p)$ удовлетворяет необходимым требованиям для входных сопротивлений rL -двухполосника. Реализации этой функции, показанные на рис. 19.7, а, б, соответствуют каноническим схемам Фостера.

В общем случае ПФФ не может быть реализована рассмотренным выше простым методом; известны другие методы, позволяющие реализовать произвольную ПФФ.

§ 19.3. Реализация LC - и rC -четыреxpолосников мостовой схемы

Пусть задана передаточная функция четырехполосника (взаимное сопротивление $Z_{21}(p)$) при разомкнутых зажимах. Такая функция реализуется симметричной мостовой схемой, показанной на рис. 19.8, а (на рис. 19.8, б дано упрощенное обозначение мо-

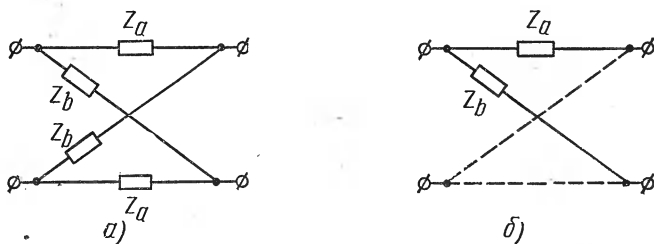


Рис. 19.8

стовой схемы). Так как четырехполосник является симметричным, его входные сопротивления равны: $Z_{11} = Z_{22}$. Условие вычетов (18.31) принимает вид $K_{11}^2 - K_{21}^2 \geq 0$. Можно потребовать, чтобы условие вычетов выполнялось со знаком равенства для всех полюсов. Вычет $K_{11} > 0$, а вычет K_{21} может быть положительным или отрицательным, поэтому из условия вычетов $K_{11} = |K_{21}|$. Если вычеты функции $Z_{12}(p)$ в полюсах известны, то на основании равенства $K_{11} = |K_{12}|$, легко найти функцию $Z_{11}(p)$. Вычеты функ-

ции $Z_{21}(p)$ определяют при разложении этой функции на элементарные дроби. Группируя слагаемые с положительными и отрицательными вычетами, можно записать

$$Z_{21}(p) = Z_{21}^{(+)}(p) - Z_{21}^{(-)}(p), \quad (19.16)$$

где функции $Z_{21}^{(+)}(p)$ и $Z_{21}^{(-)}(p)$ содержат слагаемые только с положительными вычетами. Полагая для каждого полюса $K_{11} = |K_{21}|$, получаем выражение для входной функции:

$$Z_{11}(p) = Z_{21}^{(+)}(p) + Z_{21}^{(-)}(p). \quad (19.17)$$

По известным функциям $Z_{11}(p)$ и $Z_{21}(p)$ можно найти сопротивления $Z_a(p)$ и $Z_b(p)$ мостовой схемы (рис. 19.8).

Для мостовой схемы

$$Z_{11} = (Z_a + Z_b)/2; \quad Z_{21} = (Z_b - Z_a)/2,$$

откуда $Z_a = Z_{11} - Z_{21}$; $Z_b = Z_{11} + Z_{21}$. Если учесть выражения (19.16) и (19.17), то

$$Z_a(p) = 2Z_{21}^{(-)}(p); \quad (19.18)$$

$$Z_b(p) = 2Z_{21}^{(+)}(p). \quad (19.19)$$

Формулы (19.18) и (19.19) позволяют построить схему четырехполюсника.

Пример 19.4. Требуется реализовать функцию

$$Z_{21}(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p^2+2)(p^2+3)}.$$

Решение. Разложение функции $Z_{21}(p)$ на элементарные дроби имеет вид

$$Z_{21}(p) = \frac{1}{6p} - \frac{p}{2(p^2+1)} + \frac{p}{2(p^2+2)} - \frac{p}{6(p^2+3)}.$$

Следовательно,

$$Z_{21}^{(+)}(p) = \frac{1}{6p} + \frac{p}{2(p^2+2)}; \quad Z_{21}^{(-)}(p) = \frac{p}{2(p^2+1)} - \frac{p}{6(p^2+3)}.$$

На основании выражений (19.18) и (19.19)

$$Z_a(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{3(p^2+3)}; \quad Z_b(p) = \frac{1}{3p} + \frac{p}{p^2+2}.$$

Функции $Z_a(p)$ и $Z_b(p)$ реализуются как входные сопротивления LC-двухполюсников. На рис. 19.9 приведены схема мостового четырехполюсника и параметры ее элементов.

Пример 19.5. Реализовать функцию

$$Z_{21}(p) = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Решение. Функция

$$Z_{21}(p) = -\frac{12}{p+1} + \frac{60}{p+2} - \frac{60}{p+3} + 1,$$

поэтому

$$Z_{21}^{(+)}(p) = 1 + \frac{60}{p+2}; \quad Z_{21}^{(-)}(p) = \frac{12}{p+1} - \frac{60}{p+3};$$

$$Z_a(p) = \frac{24}{p+1} + \frac{120}{p+3}; \quad Z_b(p) = 2 + \frac{120}{p+2}.$$

Функции $Z_a(p)$ и $Z_b(p)$ реализуются как входные сопротивления rC -двухполюсников; в результате получаем схему на рис. 19.10.

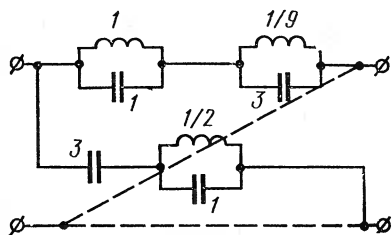


Рис. 19.9

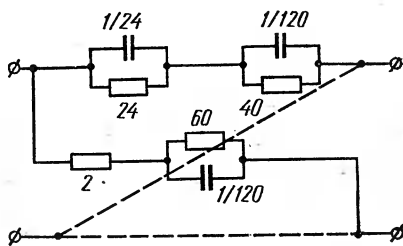


Рис. 19.10

Следует отметить, что каждому полюсу функции $Z_{21}(p)$, расположенному в левой полуплоскости, соответствует нуль, расположенный симметрично в правой полуплоскости. Амплитудно-частотная характеристика $|Z_{21}(j\omega)|$ в таком случае не зависит от частоты.

С помощью симметричного мостового четырехполюсника аналогично предыдущему реализуется функция $Y_{21}(p)$.

§ 19.4. Реализация LC - и rC -четыреполюсников цепочечной схемы

Четыреполюсники цепочечной схемы, как уже отмечалось, находят широкое применение и могут быть построены по различным передаточным функциям, например, $Z_{21}^{(n)}(p)$, $Y_{21}^{(n)}(p)$.

Пусть задана функция LC -четыреполюсника, нагруженного на активное сопротивление (см. рис. 18.10):

$$Y_{21}^{(n)}(p) = -A(p)/B(p). \quad (19.20)$$

Если сопротивление нагрузки нормировано $r_2 = 1$ Ом, то для функции $Y_{21}^{(n)}(p)$ справедливо выражение (18.39). Представляя полином $B(p)$, равный сумме четной $[m(p)]$ и нечетной $[n(p)]$ частей, можно записать

$$-\frac{Y_{21}(p)}{1+Y_{22}(p)} = \frac{A(p)}{m(p)+n(p)}. \quad (19.21)$$

Полином $A(p)$ может быть четным или нечетным. Если $A(p)$ — четный полином, то выражение (19.21) приводится к виду

$$-\frac{Y_{21}(p)}{1+Y_{22}(p)} = \frac{A(p)/n(p)}{1+[m(p)/n(p)]}, \quad (19.22)$$

откуда

$$-Y_{21}(p) = A(p)/n(p); \quad (19.23)$$

$$Y_{22}(p) = m(p)/n(p). \quad (19.24)$$

Если $A(p)$ — нечетный полином, то выражение (19.21) следует представить в виде

$$-\frac{Y_{21}(p)}{1+Y_{22}(p)} = \frac{A(p)/m(p)}{1+[n(p)/m(p)]}, \quad (19.25)$$

откуда

$$-Y_{21}(p) = \frac{A(p)}{m(p)}, \quad (19.26)$$

$$Y_{22}(p) = \frac{n(p)}{m(p)}. \quad (19.27)$$

Таким образом, по заданной функции LC -четыреxpолyсника с нагрузкой (19.20) можно определить функции (19.23), (19.24) или (19.26), (19.27), представляющие собой проводимости четыреxpолyсника при короткозамкнутых зажимах. Тем самым задача реализации функции $Y_{21}^{(n)}(p)$ сводится к задаче реализации двух функций $Y_{21}(p)$ и $Y_{22}(p)$. Аналогично, если задана функция $Z_{21}^{(n)}(p)$ LC -четыреxpолyсника, нагруженного на активное сопротивление $r_2 = 1$ Ом, то на основании (18.38) можно получить функции $Z_{21}(p)$ и $Z_{22}(p)$, представляющие собой сопротивления четыреxpолyсника при разомкнутых зажимах.

Пусть функция (19.20) — функция rC -четыреxpолyсника, нагруженного на сопротивление $r_2 = 1$ Ом. Тогда знаменатель функции следует разложить на сумму двух полиномов $B_1(p)$ и $B_2(p)$ так, чтобы отношение $B_1(p)/B_2(p)$ удовлетворяло необходимым условиям реализации входной проводимости rC -схемы. При этом можно записать

$$-\frac{Y_{21}(p)}{1+Y_{22}(p)} = \frac{A(p)/B_2(p)}{1+[B_1(p)/B_2(p)]}, \quad (19.28)$$

откуда

$$-Y_{21}(p) = A(p)/B_2(p); \quad (19.29)$$

$$Y_{22}(p) = B_1(p)/B_2(p). \quad (19.30)$$

Вновь задача реализации функции $Y_{21}^{(n)}(p)$ сводится к реализации функций $Y_{21}(p)$ и $Y_{22}(p)$.

Если задана функция LC - или rC -четыреxpолyсника

$$K^{(u)}(p) = A(p)/B(p), \quad (19.31)$$

то, разделив числитель и знаменатель этой функции на соответствующий полином $D(p)^*$, можно на основании выражений (18.34) и (18.35) найти функции $Y_{21}(p)$ и $Y_{22}(p)$ [$Z_{21}(p)$ и $Z_{22}(p)$].

При синтезе LC -четыреxpолyсника цепочечной схемы по двум функциям Y_{21} и Y_{22} (Z_{21} и Z_{22}) необходимо, чтобы нули функций $Y_{21}(Z_{21})$, т. е. нули передачи, были расположены на мнимой оси. При синтезе rC -четыреxpолyсника цепочечной схемы необходимо, чтобы нули передачи были расположены на отрицательной вещественной полуоси (см. гл. 18).

Реализация LC -четыреxpолyсника цепочечной схемой по функциям $Y_{21}(p)$, $Y_{22}(p)$ осуществляются следующим образом. Если функция $Y_{22}(p)$ имеет частные полюсы, то выделяют соответствующие слагаемые, которые реализуются как проводимости попе-

* Полином $D(p)$ выбирается произвольно, но так, чтобы полученные функции Y_{21} , Y_{22} (Z_{21} , Z_{22}) удовлетворяли необходимым условиям реализации LC - или rC -схем (см. гл. 18).

речных ветвей, присоединенных к выходным зажимам четырех- полюсника.

Пусть функция $Y_{22}(p)$ (или ее часть, оставшаяся после реализации частных полюсов) не имеет частных полюсов. По этой функции следует построить четырехполюсник так, чтобы были реализованы все нули передачи. Нули передачи цепочечной схемы совпадают с полюсами продольных сопротивлений и нулями поперечных сопротивлений. Если функции $Y_{21}(p)$ и $Y_{22}(p)$ имеют одинаковый нуль в некоторой точке на мнимой оси, то функция $1/Y_{22}$ будет иметь полюс в этой же точке. Выделяя слагаемое с таким полюсом из функции $1/Y_{22}$, можно получить продольную ветвь, полюс сопротивления которой совпадает с нулем передачи. Тем самым реализуется нуль передачи.

Если функция $Y_{22}(p)$ не имеет нуля, совпадающего с нулем передачи, то из этой функции можно вычесть одно из слагаемых (частично выделить один из полюсов):

$$Y = K/p, \text{ или } Y = Kp, \text{ или } Y = \frac{Kp}{p^2 + \omega_i^2} \quad (K > 0)$$

(Функция $Y_{22}(p)$ имеет соответственно полюс при $p=0$, $p=\infty$ или $p=\pm j\omega_i$). Вычитание слагаемого соответствует выделению поперечной подготовительной ветви схемы с проводимостью Y . В результате вычитания один нуль остатка $Y'_{22} = Y_{22} - Y$ должен совпасть с нулем передачи. Если у остатка получился нуль, совпадающий с нулем передачи, то из функции $1/Y'_{22}$ выделяется слагаемое с полюсом, равным нулю передачи. Этому слагаемому соответствует продольная ветвь схемы, реализующая нуль передачи.

В данном случае подготовительная поперечная ветвь с проводимостью Y вызывает смещение нуля функции Y_{22} . Нуль смещается в сторону частично выделяемого полюса. Не всегда с помощью частичного выделения полюсов из функции $Y_{22}(p)$ можно получить необходимый нуль у остатка $Y'_{22}(p)$. Если, например, $j\omega_k$ — нуль передачи и при решении всех уравнений вида $Y'_{22}(j\omega_k) = Y_{22}(j\omega_k) - Y(j\omega_k) = 0$ получается отрицательное значение K , то при частичном выделении полюсов требуемый нуль не может быть получен.

Если частичное выделение полюсов из функции Y_{22} не дает необходимого нуля у остатка Y'_{22} , то следует воспользоваться функцией $1/Y_{22}$. При частичном выделении полюса из функции $1/Y_{22}$ (продольная подготовительная ветвь) можно сместить нуль этой функции так, чтобы он совпал с нулем передачи. Затем, выделяя поперечную ветвь цепочечной схемы, сопротивление которой имеет нуль, равный нулю передачи, реализуем нуль передачи.

Таким образом, для синтеза цепочечной схемы поочередно применяют две основные операции: *смещение нуля входной функции* с помощью подготовительных поперечных (продольных) ветвей и *реализацию нуля передачи* с помощью продольной (поперечной) ветви, сопротивление которой имеет полюс (нуль), совпадающий

с нулем передачи. Реализация цепочечной LC -схемы по известным функциям $Z_{21}(p)$ и $Z_{22}(p)$ выполняется аналогично.

Реализация цепочечной схемы rC по известным функциям $Y_{21}(p)$ и $Y_{22}(p)$ или $Z_{21}(p)$ и $Z_{22}(p)$ также производится аналогичным методом. Смещение нулей функции $Y_{22}(p)$ осуществляется, вычитанием слагаемых вида $Y = K$, $Y = \frac{Kp}{p + \sigma_i}$, $Y = Kp$. При смещении

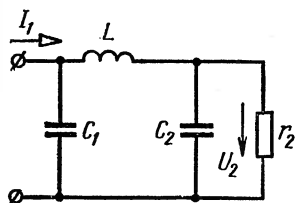


Рис. 19.11

нулей функции $Z_{22}(p)$ следует воспользоваться слагаемыми вида $Z = K/p$, $Z = K/(p + \sigma_i)$, $Z = K$.

Наиболее просто синтезируются цепочечные схемы, если все нули передачи расположены при $p = 0$ или $p = \infty$. В таких случаях схема четырехполюсника получается с помощью соответствующего представления Y_{22} (или $1/Y_{22}$), Z_{22} (или $1/Z_{22}$) в виде непрерывной дроби.

Пример 19.6 Реализовать функцию LC -четыреполюсника, нагруженного на сопротивление $r_2 = 1$ Ом;

$$Z_{21}^{(H)}(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)} = \frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}.$$

Решение. Определим четную и нечетную части знаменателя:

$$m(p) = 2p^2 + 1, \quad n(p) = p^3 + 2p.$$

Так как числитель $A(p) = 1$ — четный, функцию $Z_{21}^{(H)}$ представим в виде

$$Z_{21}^{(H)}(p) = \frac{1}{1 + \frac{2p^2+1}{p^3+2p}} = \frac{Z_{21}(p)}{1 + Z_{22}(p)},$$

откуда

$$Z_{21}(p) = \frac{1}{p^3+2p}; \quad Z_{22}(p) = \frac{2p^2+1}{p^3+2p}.$$

Функция $Z_{21}(p)$ имеет все нули при $p = \infty$ (тройной нуль). Для функции $1/Z_{22}(p)$ непрерывную дробь получим, начиная деление со слагаемых высших степеней:

$$\frac{1}{Z_{22}(p)} = \frac{p^3+2p}{2p^2+1} = \frac{p}{2} + \frac{1}{\frac{4p}{3} + \frac{3p}{2}}.$$

На каждом этапе деления выделяется полюс при $p = \infty$, поэтому реализуются и нули передачи. Схема четырехполюсника приведена на рис. 19.11; параметры элементов схемы:

$$L = 4/3 \text{ Г}; \quad C_1 = 3/2 \text{ Ф}; \quad C_2 = 1/2 \text{ Ф}.$$

Следует отметить, что в общем случае при синтезе цепочечных схем постоянный множитель передаточной функции не контролируется, т. е. передаточные функции реализуются с точностью до постоянного множителя.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	7
 <i>Раздел первый</i>	
Элементы и основные топологические свойства электрических цепей	
Глава 1. Электрическая цепь и ее элементы	13
§ 1.1. Классификация электрических цепей и их элементов	13
§ 1.2. Схема электрической цепи и элементы схемы	16
§ 1.3. Двухполюсные активные элементы	17
§ 1.4. Двухполюсные пассивные элементы	22
§ 1.5. Основные уравнения цепей с сосредоточенными параметрами	29
§ 1.6. Трехполюсные элементы цепей	32
Глава 2. Основные топологические понятия и соотношения	45
§ 2.1. Граф электрической цепи и некоторые его подграфы	45
§ 2.2. Законы Кирхгофа	49
§ 2.3. Топологические матрицы графа и их свойства	52
§ 2.4. Дуальные цепи	62
 <i>Раздел второй</i>	
Основные свойства и методы расчета электрических цепей с источниками постоянных э. д. с. и токов	
Глава 3. Анализ переходных и установившихся процессов в простейших цепях	67
§ 3.1. Постановка задач анализа электрических цепей	67
§ 3.2. Цепи с сопротивлением r и индуктивностью L	68
§ 3.3. Цепи с сопротивлением r и емкостью C	74
§ 3.4. Цепи с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C	77
§ 3.5. Разряд конденсатора в цепи с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C	82
§ 3.6. Общие замечания об анализе цепей с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C	84
Глава 4. Алгебраические методы анализа цепей при установившемся режиме	85
§ 4.1. Применение уравнений Кирхгофа	85
§ 4.2. Применение узловых уравнений	91
§ 4.3. Применение уравнений с напряжениями ветвей дерева	95
§ 4.4. Применение контурных уравнений	100
Глава 5. Основные свойства и преобразования электрических цепей	106
§ 5.1. Баланс мощностей	106
§ 5.2. Принцип наложения	108
§ 5.3. Свойство (принцип) взаимности	114
§ 5.4. Теорема о компенсации, линейные соотношения между напряжениями и токами	116

	<i>Стр.</i>
§ 5.5. Теорема об эквивалентном источнике (активном двухполюснике) . . .	123
§ 5.6. Простейшие эквивалентные преобразования схем	126
§ 5.7. Преобразования схем при исключении узлов	129
§ 5.8. Преобразования схем при исключении контуров	136
§ 5.9. Преобразование симметричных схем	144

Раздел третий

Свойства и методы расчета электрических цепей с источниками гармонических э. д. с. и токов

<i>Глава 6. Анализ переходных и установившихся процессов в простейших цепях</i>	<i>149</i>
§ 6.1. Синусоидальные (гармонические) напряжения и токи	149
§ 6.2. Понятие о генераторах гармонической э. д. с.	151
§ 6.3. Гармонические токи в сопротивлении r , индуктивности L и емкости C	153
§ 6.4. Цепь с сопротивлением r и индуктивностью L	160
§ 6.5. Цепи с сопротивлением r и емкостью C	165
§ 6.6. Цепи с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C	169
§ 6.7. Цепь с трансформатором	178
§ 6.8. Общие замечания по анализу rLC -цепей	183

<i>Глава 7. Установившиеся процессы в цепях с двухполюсными элементами без взаимной индукции</i>	<i>185</i>
§ 7.1. Комплексные величины, характеризующие установившиеся процессы в электрической цепи	185
§ 7.2. Энергетические процессы в цепи переменного тока	190
§ 7.3. Уравнения состояния электрических цепей с источниками гармонических э. д. с. и токов в комплексной (символической) форме . .	196
§ 7.4. Топографические диаграммы	201
§ 7.5. Основные свойства и преобразования цепей с источниками гармонических э. д. с. и токов	203
§ 7.6. Анализ цепей при изменении параметров	205
§ 7.7. Анализ резонансных явлений	212
§ 7.8. Основные алгебраические выражения для входных и передаточных функций	218

<i>Глава 8. Топологические методы анализа цепей, содержащих двухполюсные элементы без взаимной индукции</i>	<i>223</i>
§ 8.1. Топологические формулы для расчета определителей матриц узловых проводимостей и проводимостей сечений	223
§ 8.2. Топологические формулы для расчета алгебраических дополнений элементов узлового определителя	226
§ 8.3. Разложение узлового определителя и алгебраических дополнений его элементов	232
§ 8.4. Топологическая формула для расчета передаточных функций (формула Мэзона)	238
§ 8.5. Топологические формулы для расчета контурного определителя и алгебраических дополнений его элементов	244
§ 8.6. Применение сигнальных (направленных) графов к анализу электрических цепей	250
§ 8.7. Построение сигнальных графов для электрической цепи	257

<i>Глава 9. Анализ процессов в цепях с взаимной индукцией и электронными элементами (трехполюсниками)</i>	<i>263</i>
§ 9.1. Простейшие цепи с взаимной индукцией	263
§ 9.2. Трансформатор в линейном режиме. Индуктивно связанные контуры . .	267
§ 9.3. Разветвленные цепи с взаимной индукцией	275

§ 9.4. Эквивалентные схемы и преобразования цепей с взаимной индукцией	279
§ 9.5. Расчет цепей с невязимными элементами	284
§ 9.6. Топологические формулы для расчета цепей с невязимными элементами	293

Глава 10. Многофазные цепи 300

§ 10.1. Основные понятия и определения	300
§ 10.2. Симметричные трехфазные цепи и методы их расчета	304
§ 10.3. Расчет несимметричных трехфазных цепей	309
§ 10.4. Вращающееся магнитное поле; принцип действия асинхронного двигателя	313
§ 10.5. Измерение мощности в трехфазных цепях	317
§ 10.6. Основные понятия о методе симметричных составляющих	319

Глава 11. Многополюсники при синусоидальных токах и напряжениях 324

§ 11.1. Определение многополюсников	324
§ 11.2. Основные уравнения четырехполюсников	324
§ 11.3. Определение коэффициентов четырехполюсника	328
§ 11.4. Эквивалентные схемы четырехполюсника	330
§ 11.5. Режим четырехполюсника при нагрузке	335
§ 11.6. Основные уравнения и эквивалентные схемы активного четырехполюсника	336
§ 11.7. Характеристическое сопротивление и коэффициент передачи четырехполюсника	338
§ 11.8. Графы четырехполюсников и их простейшие соединения	342

Глава 12. Цепи с распределенными параметрами 346

§ 12.1. Симметричная однородная цепочечная схема	346
§ 12.2. Основные уравнения для цепей с распределенными параметрами	347
§ 12.3. Волны в линии при установившемся режиме	350
§ 12.4. Установившиеся процессы в нагруженной, разомкнутой и короткозамкнутой линиях с потерями	352
§ 12.5. Линия без потерь	356
§ 12.6. Стоячие волны	362
§ 12.7. Линия без искажений; измерительная линия	367

Раздел четвертый

Основные свойства и методы расчета электрических цепей с негармоническими периодическими напряжениями и токами

Глава 13. Анализ установившихся процессов в линейных цепях с негармоническими периодическими источниками 370

§ 13.1. Гармонический анализ и разложение функций	370
§ 13.2. Расчет установившихся процессов в линейных цепях	373
§ 13.3. Особенности несинусоидальных режимов	374
§ 13.4. Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений; коэффициенты, характеризующие форму кривых токов и напряжений	377
§ 13.5. Мощность при несинусоидальных токах и напряжениях	378
§ 13.6. Влияние индуктивности и емкости на форму кривых тока и напряжения в разветвленной цепи	379
§ 13.7. Несинусоидальные режимы в симметричных многофазных цепях	382

Глава 14. Элементы теории электрических фильтров 385

§ 14.1. Основные понятия и определения	385
§ 14.2. Симметричные реактивные фильтры	387
§ 14.3. Фильтры типа k	391
§ 14.4. Фильтры типа m	399
§ 14.5. Безындукционные rC -фильтры	404

Раздел пятый

Переходные процессы в линейных цепях и методы их расчета

Стр.

Глава 15. Анализ переходных процессов классическим методом и методом переменных состояния	408
§ 15.1. Классический метод расчета переходных процессов в разветвленных цепях	408
§ 15.2. Переходные и импульсные характеристики цепей	414
§ 15.3. Расчет переходных процессов при воздействии источников э. д. с. и тока произвольной формы	419
§ 15.4. Особенности расчета переходных процессов в цепях с емкостными контурами и индуктивными сечениями	422
§ 15.5. Основные положения метода переменных состояния	428
§ 15.6. Составление дифференциальных уравнений состояния электрических цепей	430
§ 15.7. Способы решения уравнений состояния	436
Глава 16. Применение преобразований Лапласа и Фурье к расчету переходных процессов	442
§ 16.1. Преобразования Лапласа	442
§ 16.2. Уравнения электрических цепей в операторной форме	449
§ 16.3. Расчет переходных напряжений и токов операторным методом	453
§ 16.4. Расчет свободных и принужденных составляющих напряжений и токов	457
§ 16.5. Приведение цепи к нулевым начальным условиям	461
§ 16.6. Преобразование Фурье и спектральные характеристики	464
§ 16.7. Применение преобразования Фурье к расчету переходных процессов	473
§ 16.8. Некоторые соотношения между временными и частотными характеристиками цепи	477
Глава 17. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами	480
§ 17.1. Характер переходных процессов в цепях с распределенными параметрами	480
§ 17.2. Расчет напряжения прямой волны	484
§ 17.3. Ток и напряжение в конце линии	486
§ 17.4. Расчет напряжения обратной волны	488
§ 17.5. Переход волн с одной линии на другую	492
§ 17.6. Волны в линиях при включении и отключении ветвей	495
§ 17.7. Формирование импульсов с помощью линий	499
§ 17.8. Волны в линии без искажения	503
§ 17.9. Процессы в кабеле без индуктивности и утечки	504

Раздел шестой

Элементы синтеза линейных пассивных цепей с сосредоточенными параметрами

Глава 18. Свойства функций электрических цепей	509
§ 18.1. Задачи синтеза электрических цепей	509
§ 18.2. Общие свойства схемных функций	510
§ 18.3. Свойства входных функций LC -, rC -, rL - и rLC -цепей	516
§ 18.4. Свойства функций четырехполосников	522
Глава 19. Методы реализации двухполосников и четырехполосников	527
§ 19.1. Нормирование параметров элементов электрических цепей	527
§ 19.2. Реализация двухполосников	528
§ 19.3. Реализация LC - и rC -четыреполосников мостовой схемы	535
§ 19.4. Реализация LC - и rC -четыреполосников цепочечной схемы	537

1 р. 23 к.

